Mapas de Progreso del Aprendizaje

Sector Matemática

Mapa de Progreso de Geometría

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mapas de Progreso del Aprendizaje

Sector Matemática
Mapa de Progreso de Geometría

GOBIERNO DE
CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mapas de Progreso del Aprendizaje
Geometría
Material elaborado por la Unidad de Currículum, UCE.
www.curriculum-mineduc.cl
ISBN: 978-956-292-278-4
Registro de Propiedad Intelectual Nº 190.666
Alameda 1371, Santiago.
Ministerio de Educación.

Se agradece a los profesores y profesoras de los siguientes establecimientos
que colaboraron en el proceso de recolección de trabajos de alumnos y alumnas:
Alianza Francesa - Vitacura
Alcántara de La Florida - La Florida
Alicante del Rosal - Maipú
Colegio Albert Einstein - La Serena
Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez - Puente Alto
Colegio La Misión - Calera de Tango
Colegio Municipal Juan Pablo Duarte - Providencia
Colegio Nuestra Señora de Andacollo - Santiago
Colegio Notre Dame - Peñalolén
Colegio Oratorio Don Bosco - Santiago
Colegio Pedro de Valdivia - Macul
Colegio Sagrado Corazón - Talagante
Colegio Sagrados Corazones - Santiago
Colegio Saint George - Vitacura
Colegio San Alberto Magno - La Florida
Colegio San Ignacio Alonso Ovalle - Santiago
Colegio Santa Cruz - Santiago
Escuela Antártica Chilena - Vitacura
Escuela Básica N° 10 Miguel de Cruchaga Tocornal - Puente Alto
Escuela Experimental de Música Jorge Peña Hen - La Serena
Instituto Alonso de Ercilla - Santiago
Instituto Nacional José Miguel Carrera - Santiago
La Girouette - Las Condes
Liceo San Alberto Hurtado - Quinta Normal
Liceo Antonio Hermida Fabres - Peñalolén
Liceo Leonardo Murialdo - Recoleta
Liceo Confederación Suiza - Santiago
Liceo Manuel de Salas - Ñuñoa
Liceo Municipal A-73 Santiago Bueras y Avaria - Maipú
Liceo Santa María - Santiago
Liceo Ruiz Tagle - Estación Central

Diseño y diagramación: Designio
Abril de 2010

Mapas de Progreso del Aprendizaje

El documento que se presenta a continuación es parte del conjunto de Mapas de Progreso del Aprendizaje, que describen la secuencia típica en que éste se desarrolla en determinadas áreas o dominios que se consideran fundamentales en la formación de cada estudiante, en los distintos sectores curriculares. Esta descripción está hecha de un modo conciso y sencillo para que todos puedan compartir esta visión sobre cómo progresa el aprendizaje a través de los 12 años de escolaridad. **Se busca aclarar a los profesores y profesoras, a los alumnos y alumnas y a las familias, qué significa mejorar en un determinado dominio del aprendizaje**.

Los Mapas complementan los actuales instrumentos curriculares (Marco Curricular de OF/CMO y Programas de Estudio) y en ningún caso los sustituyen. Establecen una relación entre currículum y evaluación, orientando lo que es importante evaluar y entregando criterios comunes para observar y describir cualitativamente el aprendizaje logrado. No constituyen un nuevo currículum, ya que no promueven otros aprendizajes; por el contrario, pretenden profundizar la implementación del currículum, promoviendo la observación de las competencias clave que se deben desarrollar.

Los Mapas describen el aprendizaje en 7 niveles, desde 1° Básico a 4° Medio, con la excepción de Inglés, que tiene menos niveles por comenzar su enseñanza en 5° Básico.

Cada nivel está asociado a lo que se espera que los estudiantes hayan logrado al término de determinados años escolares. Por ejemplo, el nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2° Básico; el nivel 2 corresponde al término de 4° Básico y así sucesivamente cada dos años. El último nivel (7) describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar es "sobresaliente", es decir, va más allá de la expectativa que se espera para la mayoría, que es el nivel 6. No obstante lo anterior, la realidad muestra que en un curso coexisten estudiantes con distintos niveles. Por esto, lo que se busca es ayudar a determinar dónde se encuentran en su aprendizaje y hacia dónde deben avanzar, y así orientar las acciones pedagógicas de mejoramiento.

Matemática

El currículum de Matemática tiene como propósito que los alumnos y alumnas adquieran los conocimientos básicos de la disciplina, a la vez que desarrollen el pensamiento lógico, la capacidad de deducción, la precisión, las capacidades para formular y resolver problemas y las habilidades necesarias para modelar situaciones o fenómenos. La construcción de la Matemática surge de la necesidad de responder y resolver desafíos provenientes de los más variados ámbitos del quehacer humano y de la Matemática misma; su construcción y desarrollo es una creación ligada a la historia y la cultura. Su aprendizaje enriquece la comprensión de la realidad, facilita la selección de estrategias para resolver problemas y contribuye al desarrollo de un pensamiento propio y autónomo. El modelamiento matemático de la realidad, mediante el uso apropiado de conceptos, relaciones entre ellos y procedimientos matemáticos, ayuda al estudiante a comprender situaciones y fenómenos, y le permite formular explicaciones y hacer predicciones de ellos, aumentando su capacidad para intervenir en esa realidad.

Los aprendizajes de Matemática se han organizado en cuatro Mapas de Progreso:

- **Números y Operaciones,** describe el desarrollo del concepto de cantidad y de número y la competencia en el uso de técnicas mentales y escritas para calcular y resolver problemas que involucran distintos tipos de números.
- **Álgebra,** describe cómo los alumnos y alumnas desarrollan, en primer lugar, las abstracciones que prefiguran el álgebra, para luego expresar operaciones y relaciones usando símbolos, así como realizar operaciones mediante el uso del lenguaje algebraico.
- **Geometría,** describe el progreso de las competencias relacionadas con la comprensión, medición y el modelamiento de las formas, las transformaciones, la posición y el espacio.
- **Datos y Azar,** describe el crecimiento de la capacidad de recolectar, organizar y representar información disponible, para describir y analizar situaciones, y hacer interpretaciones de sucesos en los que interviene el azar y la incertidumbre.

El **Razonamiento Matemático** constituye una dimensión que es abordada transversalmente en estos cuatro Mapas de Progreso.

Mapa de Progreso de Geometría

Los aprendizajes descritos en el Mapa de Progreso de Geometría progresan, considerando cuatro dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada:

a. Comprensión de la forma: Se refiere a la capacidad de caracterizar formas geométricas y sus transformaciones, a partir de un lenguaje básico de la geometría. Esta dimensión progresa desde la caracterización y establecimiento de relaciones en figuras simples como rectángulos y triángulos, en los niveles iniciales, hasta la comprensión de figuras geométricas en tres dimensiones, planos y rectas representadas en un sistema de coordenadas, en los niveles superiores.

b. Medición: Se refiere a la capacidad de comparar, medir y estimar magnitudes de formas de una, dos y tres dimensiones. Progresa desde el uso de unidades arbitrarias y estandarizadas para responder preguntas como: ¿cuál es más larga?, ¿cómo copiar esa longitud? o estimar cuántos pasos o cuartas mide una determinada longitud –en el nivel 1–, hasta la medición y determinación de perímetros, áreas y volúmenes de figuras tridimensionales en diversos contextos, en niveles superiores.

c. Descripción de posición y movimiento: Se refiere a la capacidad de describir la ubicación relativa y la variación de posición de figuras y cuerpos geométricos, así como la capacidad de utilizar coordenadas y vectores para representar posición y movimiento. Esta dimensión comienza en el nivel 4 del Mapa, y progresa desde la comprensión y aplicación del concepto de transformaciones isométricas hasta la comprensión de homotecias de figuras planas en nivel 6 del Mapa.

d. Razonamiento matemático: Se refiere a las habilidades relacionadas con la imaginación espacial, la formulación, verificación o refutación de conjeturas en casos particulares y la búsqueda de regularidades en las formas geométricas, así como la capacidad de resolver problemas geométricos, demostrar teoremas y argumentar sobre sus procedimientos y resultados.

Elementos Claves del Mapa de Progreso de Geometría

Este Mapa parte de la base de que a lo largo de la trayectoria escolar, los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades relacionados con diferentes enfoques para el tratamiento de la forma, el tamaño y la posición. El progreso considera, en los primeros niveles, aprendizajes relacionados con la geometría euclidiana, con énfasis en la comprensión de las figuras geométricas en el plano y el espacio, el descubrimiento de relaciones matemáticas entre sus elementos y la capacidad de medir diversos parámetros de estas figuras. Esto permite, posteriormente, comprender la noción de posición propia de la geometría cartesiana, la distancia entre puntos en el plano cartesiano y la ecuación de la recta. Por último, la noción de construcción geométrica y los aprendizajes relacionados con transformaciones isométricas en el plano permitirán, en los niveles superiores, comprender la noción de vector y la relación entre la ecuación de la recta y su representación vectorial. De este modo se distinguen tres momentos del desarrollo de la geometría, a saber: geometría euclidiana, geometría analítica y geometría vectorial.

La Medición es un componente central de la formación del pensamiento espacial, que permite relacionar lo aprendido en matemática con el entorno y con otras áreas del conocimiento como las ciencias naturales, la geografía o la tecnología. Además, tiene la propiedad de preparar la noción de distancia entre puntos, rectas u otros objetos geométricos que luego dan origen a modelos de la geometría de posición y vectorial. Esta dimensión incluye también el cálculo de longitudes, perímetros, áreas y volúmenes.

El Razonamiento Matemático, en este Mapa, incluye el reconocimiento de patrones y regularidades en la forma, el tamaño o el lugar; la formulación y verificación en casos particulares de conjeturas acerca de figuras, cuerpos y sus relaciones, en el plano y en tres dimensiones, la resolución de problemas, la formulación y análisis de estrategias, la deducción geométrica y la verificación de resultados, relaciones y conjeturas. La demostración se introduce, en los primeros niveles como verificación en casos particulares, luego como justificación de construcciones o de relaciones entre objetos geométricos, para luego avanzar en formalidad de acuerdo con la madurez de los estudiantes. Preguntas del tipo ¿cómo lo hiciste?, ¿se puede hacer de otro modo?, ¿se puede aplicar este procedimiento en otros casos?, ¿qué razones podemos dar para justificar lo hecho o el resultado?, ayudarán al docente a monitorear el aprendizaje de los estudiantes facilitando la metacognición y el progreso de estos a través del análisis de los procedimientos y resultados obtenidos.

Este Mapa se puede articular fácilmente con el Mapa de Tecnologías de la Información y Comunicación, que es transversal a todos los sectores de aprendizaje, ya que el uso de recursos digitales es especialmente interesante al trabajar con formas geométricas. En efecto, los procesadores geométricos constituyen verdaderos laboratorios que permiten explorar y representar distintas formas geométricas, permiten su modificación y, por lo tanto, el estudio de propiedades generales y la búsqueda de relaciones y regularidades.

En las páginas siguientes se encuentra el Mapa de Progreso de Geometría. Comienza con una presentación sintética de todos los niveles. Luego se detalla cada nivel, partiendo por su descripción, algunos ejemplos de desempeño que ilustran cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje, y uno o dos ejemplos de trabajos realizados por alumnos y alumnas de diversos establecimientos, con los comentarios que justifican por qué se juzga que el trabajo del estudiante se encuentra “en” el nivel. En un anexo, se incluye la versión completa de las tareas a partir de las cuales se recolectaron los trabajos de los alumnos y alumnas.

En la mayor parte de los casos estas tareas fueron diseñadas para ser desarrolladas por los estudiantes en el aula, durante una hora de clases, y considerando que pudieran ser reproducidas en un documento impreso. Varias tareas demandaron que los alumnos y alumnas desarrollaran diversos pasos, de ellos se ha incorporado en el documento aquel que ilustra un desempeño más expresivo del nivel.

Mapa de Progreso de Geometría

Nivel 7 Sobresaliente	Resuelve problemas geométricos estableciendo relaciones entre conceptos, técnicas y procedimientos de distintas áreas de la matemática. Selecciona entre varios procedimientos para resolver problemas en diferentes contextos geométricos, acorde a las características del problema. Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones geométricas mediante axiomas y demostraciones directas e indirectas.
Nivel 6	Relaciona la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen. Caracteriza puntos, rectas y planos en el espacio, describe cuerpos generados por traslaciones y rotaciones de figuras planas. Determina el módulo de un vector en dos o tres dimensiones y el área y volumen de cuerpos generados por traslaciones y rotaciones. Describe la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar. Formula conjeturas en relación a la forma de los cuerpos generados a partir de rotaciones y traslaciones de figuras planas en el espacio. Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando métodos analíticos y gráficos.
Nivel 5	Caracteriza ángulos entre elementos lineales asociados a la circunferencia, comprende los conceptos de congruencia y semejanza, conoce los teoremas respectivos y los aplica como criterios para determinar congruencia y semejanza de figuras planas. Calcula la medida de ángulos en la circunferencia y de segmentos de figuras planas. Comprende el concepto de transformación en el plano cartesiano, y utiliza la representación vectorial para describir traslaciones y homotecias de figuras geométricas en el plano. Formula y verifica conjeturas en relación a los efectos de la aplicación de una transformación a una figura en el plano cartesiano. Demuestra teoremas relativos a relaciones entre trazos en triángulos y en la circunferencia y a trazos y ángulos en ella, y los aplica en la resolución de problemas.
Nivel 4	Reconoce la circunferencia y el círculo como lugares geométricos identificando sus elementos, y caracteriza elementos secundarios de triángulos. Comprende el teorema de Pitágoras y el concepto de volumen. Calcula longitudes de figuras bi y tridimensionales, el área del círculo y obtiene el volumen de distintos cuerpos geométricos. Construye ángulos, triángulos y sus elementos secundarios, y polígonos regulares. Comprende el concepto de transformación isométrica y aplica estas transformaciones a figuras planas. Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar elementos lineales y resuelve problemas relacionados con estas variaciones.
Nivel 3	Caracteriza la relación entre ángulos que se forman en rectas coplanares que se cortan. Mide ángulos expresando sus resultados en unidades sexagesimales y determina áreas en triángulos y paralelogramos. Formula conjeturas relativas a medidas de ángulos en polígonos y a cambios en el área de paralelogramos al variar uno o más de sus elementos. Resuelve problemas que implican la elaboración de procedimientos para calcular ángulos en polígonos regulares y calcular áreas de triángulos, paralelogramos y formas que puedan descomponerse en estas figuras, y argumenta sobre la validez de sus procedimientos.
Nivel 2	Caracteriza cilindros, conos y pirámides en términos de las superficies y líneas que los delimitan e identifica las redes que permiten construirlos y las representaciones en el plano de sus vistas. Comprende los conceptos de perímetro y área, y emplea cuadrículas para estimar y medir áreas de superficies que se pueden descomponer en rectángulos. Formula y verifica conjeturas relativas a la posibilidad de construir cuerpos a partir de distintas redes. Resuelve problemas relacionados con el cálculo de áreas y perímetros de figuras que pueden ser descompuestas en rectángulos.
Nivel 1	Caracteriza figuras planas y prismas rectos en términos de sus elementos básicos y las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, utilizándolos para describir y representar formas presentes en el entorno. Comprende el concepto de medición, estima y mide longitudes, usando unidades de medidas informales y estandarizadas, e interpreta información referida a longitudes en diferentes contextos. Formula y verifica conjeturas, y resuelve problemas relacionados con formas que se generan a partir de transformaciones y yuxtaposiciones de figuras planas y prismas rectos, y con la determinación de longitudes.

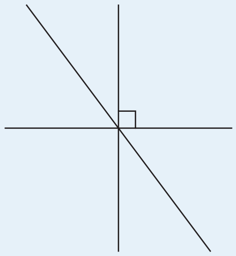
Nivel 1

Caracteriza figuras planas y prismas rectos en términos de sus elementos básicos y las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, utilizándolos para describir y representar formas presentes en el entorno. Comprende el concepto de medición, estima y mide longitudes, usando unidades de medidas informales y estandarizadas, e interpreta información referida a longitudes en diferentes contextos. Formula y verifica conjeturas, y resuelve problemas relacionados con formas que se generan a partir de transformaciones y yuxtaposiciones de figuras planas y prismas rectos, y con la determinación de longitudes.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Menciona similitudes y diferencias entre cuadriláteros dibujados en cuadrículas aludiendo, por ejemplo, a los lados que son paralelos, aquellos que son perpendiculares, la cantidad de lados, cantidad de vértices y el tipo de ángulos que se forman tanto al interior como en el exterior de ellos.
- Caracteriza prismas rectos de base triangular o rectangular en función del número y forma de las caras.
- Identifica formas en el entorno representables por líneas paralelas y perpendiculares. Por ejemplo: identifica en un plano las calles que son paralelas entre sí y aquellas que son perpendiculares entre sí.
- Identifica ángulos agudos y obtusos, tomando como referente el ángulo recto. Por ejemplo: identifica ángulos agudos y obtusos en líneas que se cortan tal como en la siguiente figura:



- Estima longitudes de objetos del entorno o dibujos y comprueba sus estimaciones.
- Utiliza unidades informales para medir diferentes longitudes. Por ejemplo: usa la cuarta de una mano para medir el largo de una mesa.
- Indica los cortes que se deben realizar en una figura tridimensional para obtener otra figura. Por ejemplo: indica el corte que se debe hacer en un cubo para obtener un prisma de base triangular.

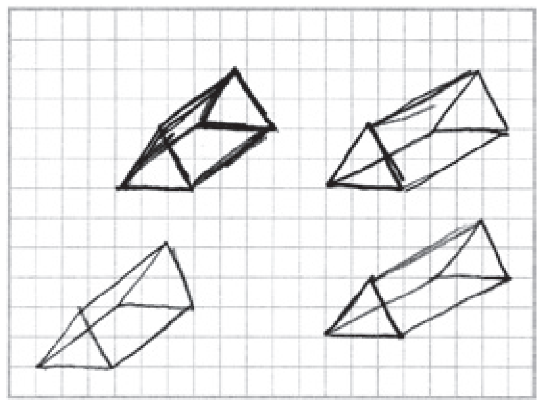
Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas:

- **La tarea:** A los alumnos y alumnas se les mostró la figura de un cubo con líneas segmentadas en su parte superior y se les solicitó imaginar y dibujar los cuerpos que se forman una vez cortado el cubo por esas líneas segmentadas. Luego, se les solicitó realizar la experiencia, utilizando plasticina y dibujar los trozos resultantes. Finalmente, compararon lo que imaginaron en la primera actividad con lo obtenido al trabajar con material concreto.

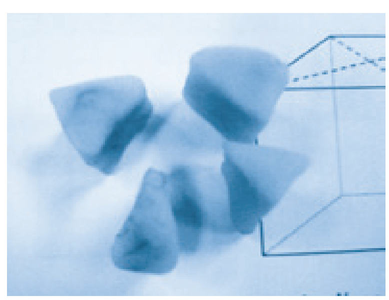
Comentario: *El alumno o alumna conjetura respecto a la forma que tendrán las figuras obtenidas al realizar en el cubo los cortes señalados. En su conjetura anticipa correctamente las formas que se obtendrán y las reconoce como prismas de base triangular, lo que se observa en la representación isométrica que hace de los prismas. Verifica que su conjetura es correcta al identificar que las figuras formadas con los cortes en la plasticina también representan prismas de base triangular.*

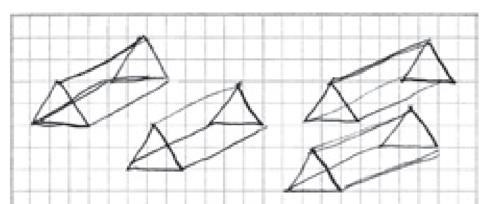
• Ejemplo de trabajo en el nivel »

Imagina que el cubo se corta por las líneas segmentadas y dibuja los cuerpos que piensas que se van a formar.



Haz un cubo con plasticina y córtalo por las líneas segmentadas, tal como se muestra en la figura. Dibuja cómo te quedaron los trozos.





Compara lo que dibujaste en la primera pregunta con los trozos que obtuviste al cortar la plasticina. Explica tu respuesta.

Se formo un prisma Triangular como yo lo imagine

Nivel 2

Caracteriza cilindros, conos y pirámides en términos de las superficies y líneas que los delimitan e identifica las redes que permiten construirlos y las representaciones en el plano de sus vistas. Comprende los conceptos de perímetro y área, y emplea cuadrículas para estimar y medir áreas de superficies que se pueden descomponer en rectángulos. Formula y verifica conjeturas relativas a la posibilidad de construir cuerpos a partir de distintas redes. Resuelve problemas relacionados con el cálculo de áreas y perímetros de figuras que pueden ser descompuestas en rectángulos.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Menciona características de conos, cilindros y pirámides. Por ejemplo: caracteriza pirámides en función de la forma y el número de caras, aristas y vértices.
- Asocia cuerpos geométricos con las redes que permiten construirlo. Por ejemplo: identifica de un grupo de redes planas, cuál o cuáles permite(n) armar un cubo.
- Dibuja objetos vistos desde distintas posiciones. Por ejemplo: dibuja una pirámide vista desde arriba y desde el frente.
- Dibuja cuerpos geométricos, considerando las diferentes vistas de estos.
- Resuelve problemas que implican cálculos de perímetros de rectángulos en situaciones cotidianas, utilizando las unidades de medida pertinentes. Por ejemplo: determina la cantidad de alambre necesaria para cercar un terreno rectangular de dimensiones conocidas, indicando la unidad de medida.
- Determina el área de figuras, que pueden descomponerse en rectángulos, por medio de una cuadrícula.
- Estima áreas de superficies, delimitadas por curvas, utilizando cuadrículas.

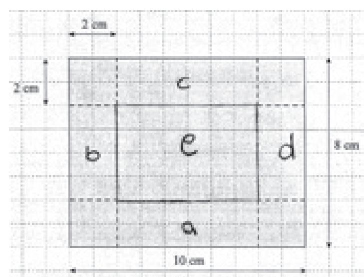
Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas:

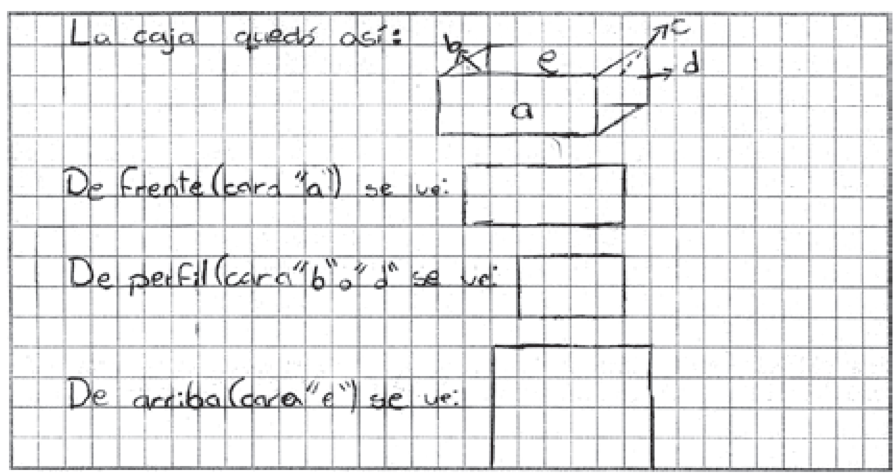
- **La tarea:**

A los estudiantes se les presentó una situación en que una niña debía construir una caja a partir de un cartón rectangular de 10 cm de largo y 8 cm de ancho. La tarea consistió en dibujar las vistas de la caja que confeccionaría la niña, calcular el área de cada cara de la caja y luego estimar las dimensiones de una posible tapa. Como apoyo, se presentó una imagen que ilustra el cartón utilizado por la niña en una cuadrícula formada por cuadrados de 1 cm de lado.

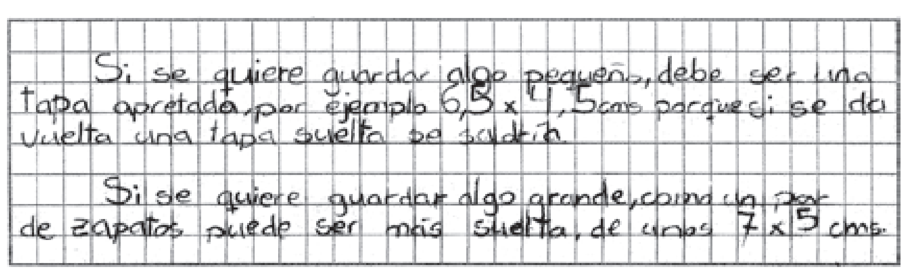
- Ejemplo de trabajo en el nivel »

Una vez confeccionada la caja, ¿cómo se ve de frente, de perfil y desde arriba? Dibuja cada una de esas vistas. Considera que cada uno de los siguientes cuadraditos mide 1 cm de lado.





¿Qué dimensiones podría tener una tapa para la caja?



Comentarios: El estudiante representa en un cuadriculado las distintas vistas del cuerpo que imaginó, e identifica correctamente aquellas caras que son iguales. Utiliza la cuadrícula de la hoja para representar las medidas de las vistas, respetando la información sobre las medidas de la caja. Resuelve la pregunta respecto a las dimensiones de la tapa, realizando una estimación a partir de la longitud de los lados de la caja.

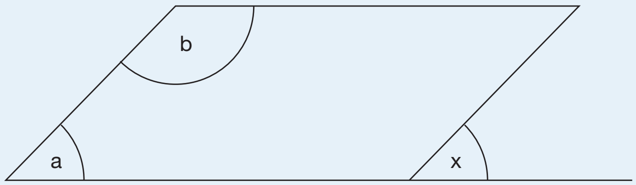
Nivel 3

Caracteriza la relación entre ángulos que se forman en rectas coplanares que se cortan. Mide ángulos expresando sus resultados en unidades sexagesimales y determina áreas en triángulos y paralelogramos. Formula conjeturas relativas a medidas de ángulos en polígonos y a cambios en el área de paralelogramos al variar uno o más de sus elementos. Resuelve problemas que implican la elaboración de procedimientos para calcular ángulos en polígonos regulares y calcular áreas de triángulos, paralelogramos y formas que puedan descomponerse en estas figuras, y argumenta sobre la validez de sus procedimientos.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Utiliza relaciones entre ángulos en un sistema de rectas paralelas cortadas por una transversal para identificar pares de ángulos congruentes o suplementarios. Por ejemplo: identifica ángulos de igual medida que determina una diagonal trazada en un rectángulo.
- Verifica o refuta proposiciones en casos particulares, relativas a relaciones entre ángulos interiores y exteriores en cuadriláteros. Por ejemplo: Verifica que la proposición “En el siguiente cuadrilátero $x = a + b$”, es falsa.

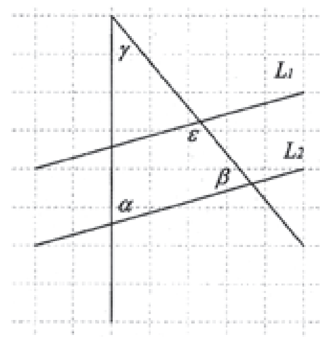


- Verifica conjeturas formuladas acerca de la suma de ángulos interiores y exteriores en pentágonos, utilizando resultados ya conocidos relativos a sumas de ángulos interiores en triángulos y cuadriláteros.
- Calcula ángulos interiores en polígonos regulares a partir de información ya conocida relativa a ángulos exteriores de esos polígonos. Por ejemplo: calcula la medida del ángulo interior de un hexágono regular, utilizando información relativa al ángulo exterior de ese polígono.
- Elabora estrategias para calcular áreas de superficies que pueden ser descompuestas en rectángulos. Por ejemplo: al pintar su pieza elabora estrategias para calcular el área de la superficie que se pinta en la pared, considerando que tiene una ventana.
- Calcula áreas de superficies de polígonos en contextos diversos. Por ejemplo: calcula el área de un terreno con forma de trapecio.
- Verifica proposiciones relativas a cambios en el área de paralelogramos al variar uno o más de sus elementos. Por ejemplo: verifica que en un cuadrado de lado “*a*” el área no se mantiene si el largo aumenta en un tercio y el ancho disminuye en un tercio.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas:

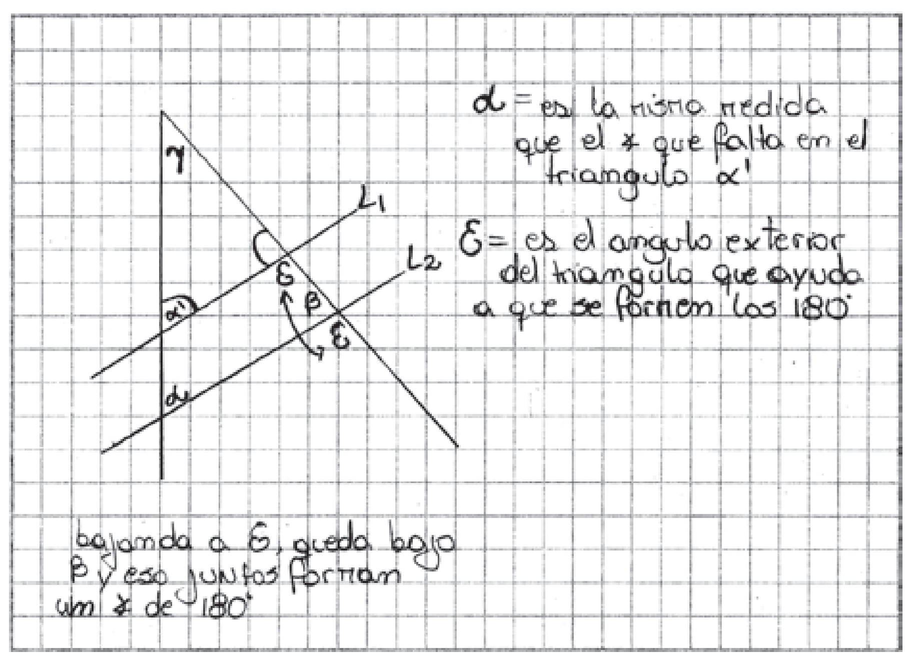
- **La tarea**

A los estudiantes se les mostró la siguiente figura, indicando que las rectas L_1 y L_2 son paralelas. Se les pidió establecer las relaciones que puedan encontrar entre los ángulos α, β, γ y ε.



- Ejemplo de trabajo en el nivel »

__Comentario:__ El estudiante identifica relaciones entre los ángulos que se forman en rectas paralelas cortadas por transversales, lo que se observa cuando agrega el ángulo α' y explicita que este tiene la misma medida que α, y cuando traslada el ángulo ε junto al ángulo β, señalando que ambos suman 180º.

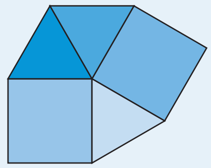


Nivel 4	Reconoce la circunferencia y el círculo como lugares geométricos identificando sus elementos, y caracteriza elementos secundarios de triángulos. Comprende el teorema de Pitágoras y el concepto de volumen. Calcula longitudes de figuras bi y tridimensionales, el área del círculo y obtiene el volumen de distintos cuerpos geométricos. Construye ángulos, triángulos y sus elementos secundarios, y polígonos regulares. Comprende el concepto de transformación isométrica y aplica estas transformaciones a figuras planas. Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar elementos lineales y resuelve problemas relacionados con estas variaciones.

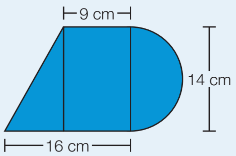
¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Utiliza herramientas tecnológicas para trazar elementos secundarios en triángulos. Por ejemplo: usa un software geométrico para trazar las transversales de gravedad y bisectrices en un triángulo equilátero.
- Aplica transformaciones isométricas a figuras geométricas planas en forma manual o utilizando herramientas tecnológicas. Por ejemplo: rota un cuadrado respecto a uno de sus vértices en 70°, usando regla, compás y transportador.
- Identifica transformaciones isométricas asociadas a teselaciones. Por ejemplo: en la teselación en que participan dos cuadrados y tres triángulos equiláteros con la disposición geométrica 3, 3, 4, 3, 4, identifica las reflexiones que se aplican a la configuración base formada por los tres triángulos y los dos cuadrados.



- Verifica mediante un procesador geométrico el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco de Pitágoras.
- Calcula el área de figuras que pueden ser descompuestas en rectángulos, triángulos y círculos, expresando el resultado en las unidades de medida correspondientes. Por ejemplo, calcula el área de la siguiente figura:



- Formula y verifica conjeturas acerca de cambios en el volumen de cuerpos al variar las medidas de sus elementos lineales. Por ejemplo: conjetura respecto al cambio de volumen de un cilindro al variar su altura y el radio de su base, verifica la conjetura formulada, empleando un procesador geométrico.
- Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular longitudes en figuras bi y tridimensionales. Por ejemplo: calcula el volumen de un cono, utilizando el teorema de Pitágoras para determinar su altura.

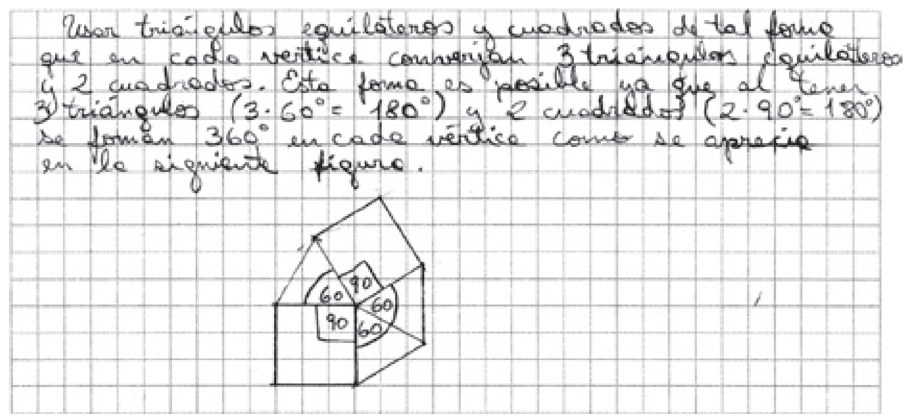
Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- **La tarea:** Se presentó a los estudiantes el siguiente problema: una persona desea embaldosar el patio de su casa con cerámicas, tanto cuadradas como de otras formas. Se les pidió sugerir qué formas se podían utilizar para teselar (cubrir) el plano y realizar un dibujo de la teselación propuesta.

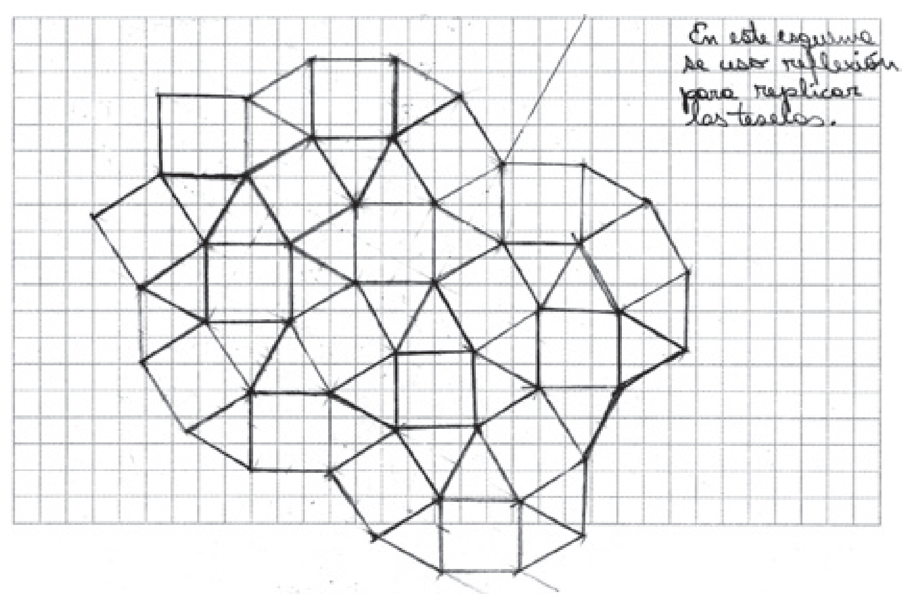
- Ejemplo de trabajo en el nivel »

Comentario: *El estudiante sugiere una configuración compuesta por tres triángulos equiláteros y dos cuadrados con lo que evidencia comprender que para realizar la teselación es necesario seleccionar figuras que al compartir un vértice común no se superpongan ni queden espacios entre ellas. Luego justifica su elección, aludiendo a la suma de los ángulos que convergen en cada vértice. Reconoce que en una teselación se puede identificar una reflexión y la utiliza como estrategia para reflejar la configuración sugerida para teselar el plano. Vale destacar que usa regla y compás para construir los polígonos regulares necesarios para realizar la teselación, logrando con esto una representación más exacta del embaldosado.*

¿Qué formas le sugerirías tú utilizar al papá de Oscar? Justifica tu respuesta.



Haz un dibujo o esquema de cómo quedaría el patio de acuerdo a tu embaldosamiento o teselación.



Nivel 5

Caracteriza ángulos entre elementos lineales asociados a la circunferencia, comprende los conceptos de congruencia y semejanza, conoce los teoremas respectivos y los aplica como criterios para determinar congruencia y semejanza de figuras planas. Calcula la medida de ángulos en la circunferencia y de segmentos de figuras planas. Comprende el concepto de transformación en el plano cartesiano, y utiliza la representación vectorial para describir traslaciones y homotecias de figuras geométricas en el plano. Formula y verifica conjeturas en relación a los efectos de la aplicación de una transformación a una figura en el plano cartesiano. Demuestra teoremas relativos a relaciones entre trazos en triángulos y en la circunferencia y a trazos y ángulos en ella, y los aplica en la resolución de problemas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

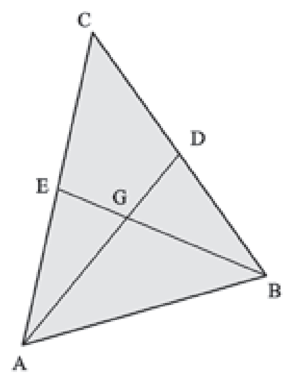
Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Verifica la congruencia entre una figura plana y la resultante de la aplicación en ella de una transformación isométrica. Por ejemplo: rota un triángulo en el plano cartesiano y comprueba que el triángulo inicial y el rotado son congruentes.
- Comprueba que la resultante de la composición de traslaciones respecto a vectores es equivalente a la traslación respecto a la resultante de la suma de esos vectores.
- Aplica transformaciones isométricas para construir teselaciones en el plano cartesiano. Por ejemplo: construye una teselación mediante la aplicación sucesiva de transformaciones isométricas a un triángulo equilátero en el plano cartesiano.
- Establece relaciones que se dan entre segmentos en la circunferencia, utilizando criterios de semejanza. Por ejemplo: establece la relación que se da entre los segmentos resultantes de la intersección entre dos cuerdas en una circunferencia.
- Demuestra teoremas relativos a segmentos en triángulos, usando criterios de semejanza. Por ejemplo: demuestra el teorema del segmento medio de un triángulo.
- Aplica teoremas relativos a segmentos en triángulos en la resolución de problemas en contextos geométricos. Por ejemplo: aplica el teorema del segmento medio de un triángulo para identificar el cuadrilátero que resulta al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera.
- Describe la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector por un escalar. Por ejemplo: describe la homotecia de razón dada que lleva un punto en otro punto del plano de coordenadas conocidas.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas:

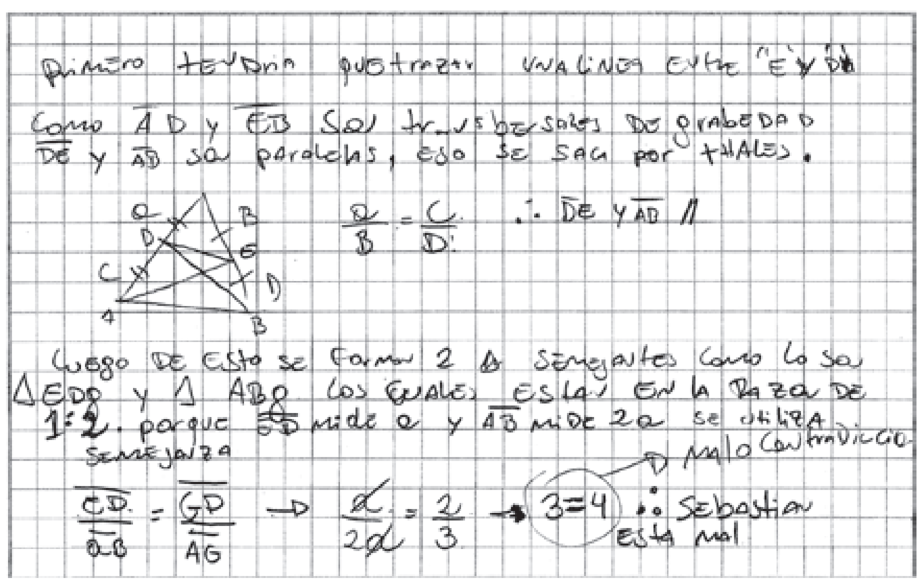
- **La tarea:**

Se presentó a los estudiantes una situación en la que dos amigos, Sebastián y Paula, discuten acerca de un problema de geometría. Sebastián sostiene que las transversales de gravedad *BE* y *AD* del triángulo *ABC* de la figura siguiente se cortan de manera que los segmentos *AG* y *GD* puedan medir 3 y 2 centímetros respectivamente. Se les pide a los alumnos y alumnas explicar qué argumento podría dar Paula a Sebastián para convencerlo de su error.



- Ejemplo de trabajo en el nivel »

¿Qué argumento podría dar Paula a Sebastián para convencerlo de su error?


Primero tendria que trazar una linea entre "E" y "D"
Como AD y EB son transversales de gravedad DE y AB son paralelas, eso se saca por thales.
a/b = c/d ∴ DE y AB //
Luego de esto se forman 2 Δ semejantes como lo son ΔEDC y Δ ABC los cuales estan en la razon de 1:2. porque ED mide a y AB mide 2a se utiliza semejanza
malo contradiccion
CD/CB = GD/AG → a/2a = 2/3 → 3=4 ∴ Sebastian esta mal

Comentario: *El estudiante reconoce el segmento* ***DE*** *como segmento medio paralelo al lado* ***AB****. Reconoce que al trazar dicho segmento se forman dos triángulos,* ***ABC*** *y* ***EDC****, que son semejantes lo que argumenta, utilizando el teorema de Thales. Aplica el Teorema del segmento medio como criterio para plantear una proporcionalidad entre lados de los triángulos semejantes* ***ABC*** *y* ***EDC*** *que le permita comprobar si es posible que la transversal esté dividida en segmentos de 2 y 3 cm. Finalmente, demuestra en base al concepto de semejanza que el supuesto de Sebastián es erróneo al llegar a la contradicción, 3 = 4.*

Nivel 6

Relaciona la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen. Caracteriza puntos, rectas y planos en el espacio, describe cuerpos generados por traslaciones y rotaciones de figuras planas. Determina el módulo de un vector en dos o tres dimensiones y el área y volumen de cuerpos generados por traslaciones y rotaciones. Describe la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar. Formula conjeturas en relación a la forma de los cuerpos generados a partir de rotaciones y traslaciones de figuras planas en el espacio. Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando métodos analíticos y gráficos.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Determina las coordenadas de los vértices de figuras tridimensionales sujetas a restricciones. Por ejemplo: determina las coordenadas de los vértices de un cubo de arista dada que tiene el origen de coordenadas como uno de sus vértices y que una de sus aristas está contenida en uno de los ejes coordenados.
- Verifica conjeturas formuladas acerca de figuras tridimensionales que se generan al rotar figuras planas. Por ejemplo: verifica conjeturas formuladas acerca de la figura que se genera al rotar un triángulo rectángulo con vértices en el plano YZ respecto al eje $X = k$, con $k = constante$.
- Determina las coordenadas de puntos que pertenecen a figuras tridimensionales generadas por rotación de figuras planas. Por ejemplo: determina las coordenadas (x, y, z) de ciertos puntos de la figura tridimensional obtenida al rotar un triángulo equilátero de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, a, c)$ con $c > 0$, $a > 0$, respecto al eje z.
- Determina la distancia entre dos puntos en dos y tres dimensiones en contextos geométricos. Por ejemplo: determina el perímetro de una figura dadas las coordenadas de sus vértices.
- Resuelve problemas relativos a rectas y sistemas de ecuaciones. Por ejemplo: determina los vértices del triángulo que delimitan tres rectas en el plano cartesiano.
- Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos dados y a partir de ella la ecuación cartesiana.
- Resuelve problemas relativos a volúmenes de cuerpos generados por rotación de figuras planas. Por ejemplo: calcula el lado del triángulo equilátero dado el volumen del cono que se genera al girar el triángulo en torno a su altura.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas:

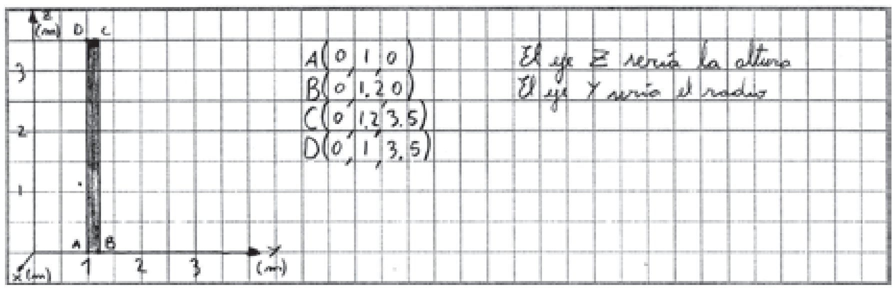
- **La tarea:**

Se presentó a los estudiantes un problema con la siguiente situación: un joven observa un pozo formado por dos circunferencias concéntricas de radio 1 metro y 1,2 metros, respectivamente y profundidad 3,5 metros. Con esta información el joven realiza un modelo del pozo, dibujando un rectángulo *ABCD* en un sistema de coordenadas *XYZ*. Se les pidió determinar las coordenadas de los vértices *ABCD* del rectángulo, luego justificar respecto a qué eje y en qué ángulo se debe girar esta figura para obtener una representación tridimensional del pozo y, finalmente, determinar la capacidad del pozo (en litros) para albergar agua.

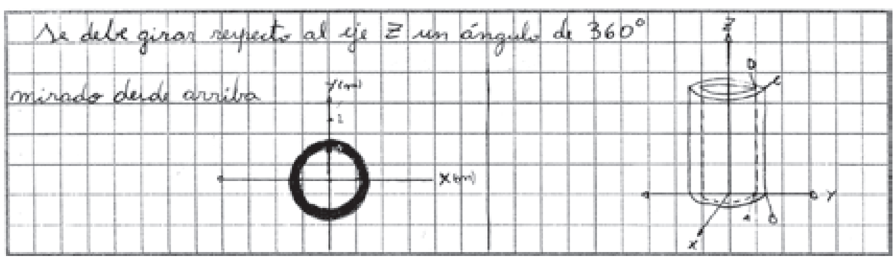
• Ejemplo de trabajo en el nivel »

Comentario: *El estudiante reconoce que el rectángulo representado en el sistema de coordenadas* ***XYZ*** *está situado solo en el plano* ***YZ*** *y lo caracteriza a través de sus coordenadas. Mediante la conjetura que realiza, anticipa correctamente el eje de rotación, el ángulo y la forma del cuerpo que se generará. Reconoce que el volumen del cilindro de radio interior 1 m representa la capacidad del pozo, y determina correctamente su capacidad, utilizando la unidad de medida correspondiente.*

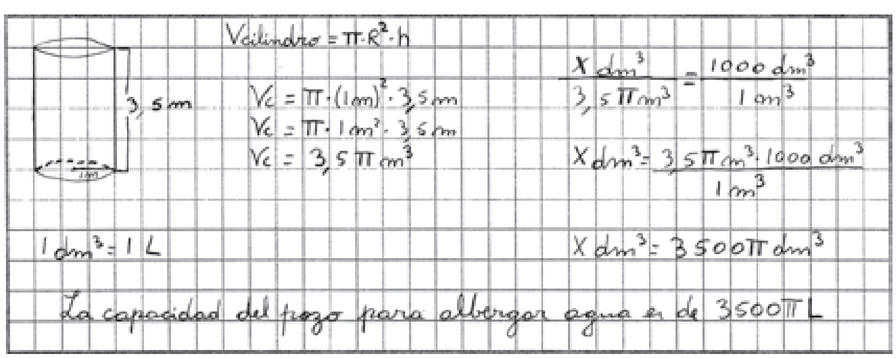
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A*, *B*, *C* y *D*?



¿Respecto a qué eje *y* en qué ángulo debe girar la figura *ABCD* para obtener una representación tridimensional del pozo? Justifica tu respuesta.



Determina la capacidad del pozo (en litros) para albergar agua.



Nivel 7
Sobresaliente

Resuelve problemas geométricos estableciendo relaciones entre conceptos, técnicas y procedimientos de distintas áreas de la matemática. Selecciona entre varios procedimientos para resolver problemas en diferentes contextos geométricos, acorde a las características del problema. Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones geométricas mediante axiomas y demostraciones directas e indirectas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Calcula el área de la superficie que está contenida entre cuatro circunferencias de radio “*a*” y cuyos centros son los vértices de un cuadrado de lado $2a$, usando métodos geométricos y métodos analíticos.
- Determina el número de diagonales que admite un polígono de n lados, usando técnicas combinatorias.
- Demuestra que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio en el punto de contacto, suponiendo la no perpendicularidad y demostrando que esta negación lleva a una contradicción.
- Utiliza el axioma de congruencia para demostrar que cada ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
- Construye el pentágono regular conocido el lado mediante regla y compás o un procesador geométrico y justifica la construcción realizada.
- Deduce la ecuación vectorial de una recta y a partir de ella sus ecuaciones en forma paramétrica y cartesiana.
- Formula y verifica conjeturas acerca de qué figuras construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo satisfacen que: la suma de las áreas de estas figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.

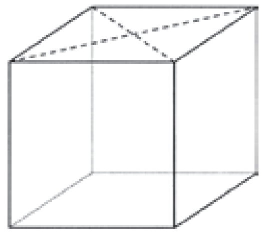
Anexos

Tareas Aplicadas por Nivel

Anexo

Nivel 1 / Tareas Aplicadas

La siguiente figura representa un cubo con líneas segmentadas en su cara superior.



1. Imagina que el cubo se corta por las líneas segmentadas y dibuja los cuerpos que piensas que se van a formar.

Anexo

Nivel 1 / Tareas Aplicadas

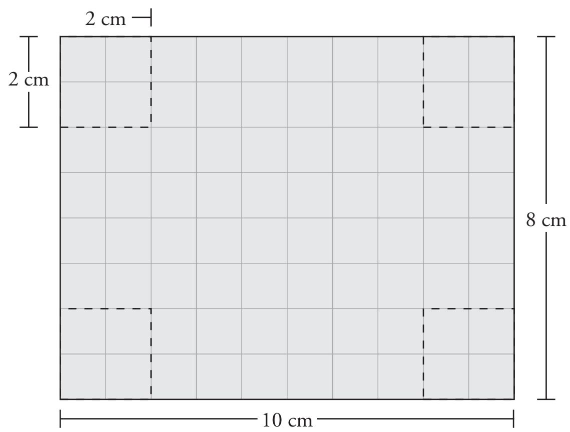
2. Haz un cubo con plasticina y córtalo por las líneas segmentadas, tal como se muestra en la figura. Dibuja cómo te quedaron los trozos.

3. Compara lo que dibujaste en la primera pregunta con los trozos que obtuviste al cortar la plasticina. Explica tu respuesta.

Anexo

Nivel 2 / Tareas Aplicadas

Fabiola desea construir una caja a partir de un cartón rectangular de 10 cm de largo y 8 cm de ancho, cortándole las puntas tal como se muestra en la figura.



1. Una vez confeccionada la caja, ¿cómo se verá de frente, de perfil y desde arriba? Dibuja cada una de esas vistas. Considera que cada uno de los siguientes cuadraditos mide 1 cm de lado.

Anexo

Nivel 2 / Tareas Aplicadas

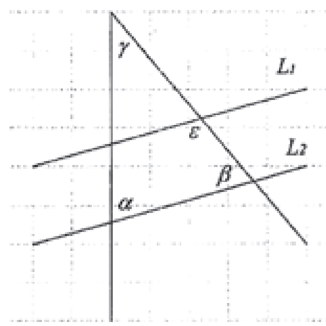
2. ¿Cuál es el área de cada una de las caras de la caja?

3. ¿Qué dimensiones podría tener una tapa para la caja?

Anexo

Nivel 3 / Tareas Aplicadas

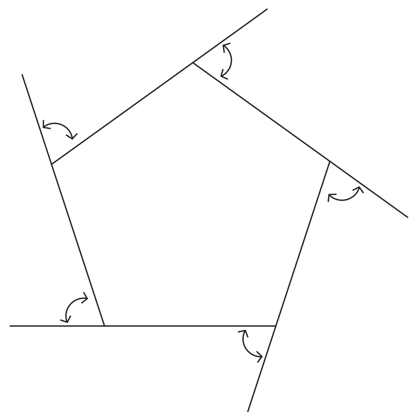
1. Sabiendo que las rectas L_1 y L_2 son paralelas, establece todas las relaciones que puedas encontrar entre los ángulos α, β, γ y ε, de acuerdo a la figura mostrada.



Anexo

Nivel 3 / Tareas Aplicadas

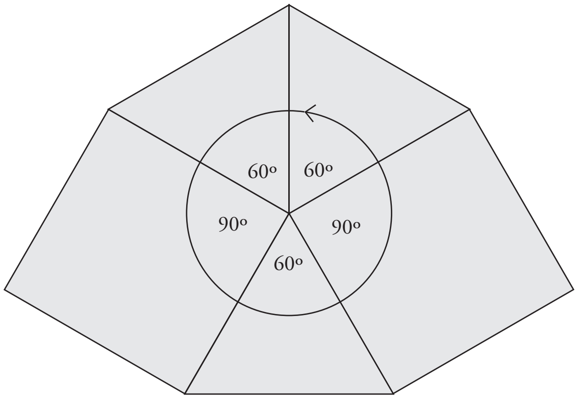
2. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos exteriores de un pentágono regular? Explica de qué manera resolviste el problema.



Anexo

Nivel 3 / Tareas Aplicadas

3. Observa la siguiente configuración, que está formada por tres triángulos equiláteros y dos cuadrados. Al unir dichas figuras, sin que se superpongan ni hayan espacios entre ellas, puedes verificar que forman un ángulo de 360º.



4. Utilizando polígonos regulares, encuentra otra configuración que cumpla la misma condición. Asegúrate de que al menos debe contener dos tipos diferentes de polígonos regulares.

Anexo

Nivel 4 / Tareas Aplicadas

El papá de Oscar desea colocar cerámicas en el patio de su casa. Desea, además, que en el embaldosamiento no solo se ocupen cerámicas de forma cuadrada, sino que también de otras formas.

1. ¿Qué formas le sugerirías tú utilizar al papá de Oscar? Justifica tu respuesta.

2. Haz un dibujo o esquema de cómo quedaría el patio de acuerdo a tu embaldosamiento o teselación.

Anexo

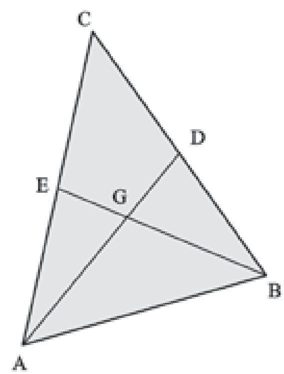
Nivel 4 / Tareas Aplicadas

3. Al observar el dibujo del embaldosamiento propuesto, ¿puedes visualizar las transformaciones isométricas, aplicadas a dichas figuras, que permiten generar el embaldosamiento completo? Muéstralas y justifica tu respuesta.

Anexo

Nivel 5 / Tareas Aplicadas

Sebastián y Paula son dos compañeros de curso que discuten acerca de un problema de geometría. Sebastián sostiene que las transversales de gravedad *BE* y *AD* del triángulo *ABC* de la figura se cortan de manera que los segmentos *AG* y *GD* puedan medir 3 y 2 centímetros respectivamente.



¿Qué argumento podría dar Paula a Sebastián para convencerlo de su error?

Anexo

Nivel 6 / Tareas Aplicadas

Javier observa un pozo similar al que aparece en la figura (1). Al mirarlo desde arriba observa que está formado por dos circunferencias concéntricas de radio 1 metro y 1,2 metros respectivamente, además verifica que la estructura es de cemento y su profundidad es de 3,5 metros.

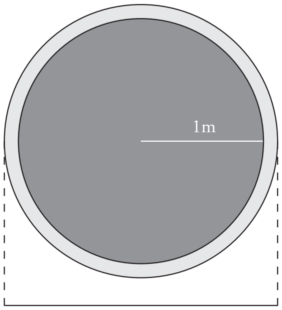


Figura (1)

Javier hace un modelo del pozo. Para eso dibuja el rectángulo *ABCD* en un sistema de coordenadas *XYZ*, tal como se muestra en la figura (2).

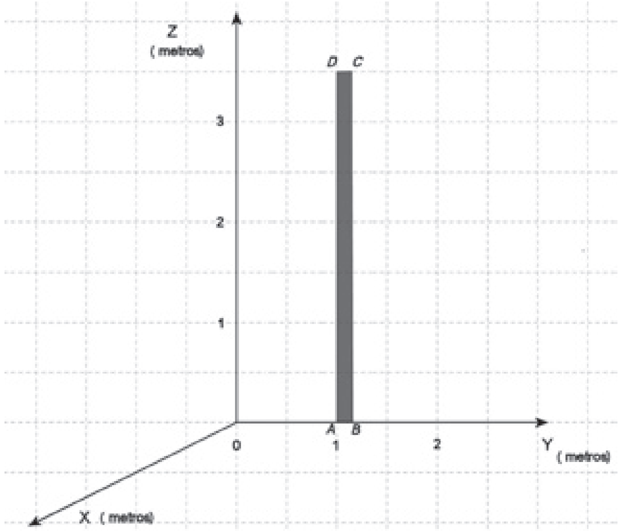


Figura (2)

Anexo

Nivel 6 / Tareas Aplicadas

1. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A, B, C y D?

2. ¿Respecto a qué eje y en qué ángulo debe girar la figura ABCD para obtener una representación tridimensional del pozo? Justifica tu respuesta.

Anexo

Nivel 6 / Tareas Aplicadas

3. Determina la capacidad del pozo (en litros) para albergar agua.

Mapas de Progreso
del Aprendizaje

GOBIERNO DE
CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN