UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA RESIGNIFICAR LA NOCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES A TRAVÉS DEL USO DE POLEAS DESDE UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA.

TESINA PARA OPTAR AL GRADO Y/O TÍTULO DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN ESTADÍSTICA EDUCATIVA.

AUTORES:

CHRISTOPHER SIMON CABAÑAS LABRA

SEBASTIAN IGNACIO CARVACHO LLANOS

PROFESORA GUÍA:

TAMARA CECILIA DEL VALLE CONTRERAS.

SANTIAGO DE CHILE, JULIO 2021.

Dedicatoria

Sebastián Carvacho:

Dedicado a mis padres,
Luz Llanos Gutiérrez y Luis Carvacho Martínez,
quienes me permitieron salir adelante
y buscar un futuro mejor.

Christopher Cabañas:

Con cariño a mis padres:
Mauricio Cabañas y Verónica Labra,
que nunca dejaron de creer en mí
y me motivaron a lograr todo lo que me propusiese.
A mis abuelos Simón Cabañas y Gladis Silva,
por su cariño y apoyo incondicional.
Y a mi amada Natalia Serrano,
que me brindó su apoyo incondicional
y siempre creyó en mí.

Κάλλιο αργά, παρά ποτέ·

Agradecimientos

Agradecemos profundamente a nuestras familias por todo el apoyo y la paciencia que tuvieron con nosotros a lo largo de esta carrera universitaria, realmente no lo habríamos logrado sin su apoyo; en especial a nuestros padres, quienes con sus consejos y sabiduría lograron guiarnos y motivarnos para alcanzar nuestras metas, son nuestro ejemplo a seguir y esperamos haber cumplido con sus expectativas.

Agradecemos a nuestros amigos y compañeros, quienes nos acompañaron desde el primer momento en el que ingresamos a esta carrera y permanecieron a nuestro lado; todos esos buenos momentos, risas, trabajos realizados, momentos de estudio y ocio, son un tesoro que llevaremos por siempre en nuestros corazones. Gracias por su apoyo incondicional, consejos y palabras de aliento que nos motivaron a seguir adelante y superar todas las dificultades que se nos presentaron.

Por último, agradecemos a nuestra profesora guía Tamara del Valle, quien fue un pilar fundamental en el desarrollo de esta investigación; toda su sabiduría y experiencia permitió que resolviéramos nuestras dudas. Admiramos su dedicación y valoramos todo el tiempo utilizado en nuestras reuniones, siempre buscando mejorar y perfeccionar una tesina de la que como equipo nos sintiéramos conformes.

Esperamos que este sea el inicio de nuestro camino abocado a la pedagogía y siempre contemos con el apoyo de todas las personas mencionadas en esta dedicatoria.

Contenido

Índice de Figuras

Resumen

La forma en la que se enseña la matemática no permite que los estudiantes relacionen el contenido con su cotidiano, bajo esta premisa buscamos generar una situación de aprendizaje que permita resignificar la noción de sistemas de ecuaciones a través del uso de poleas.

Debido a la estrecha relación entre la física y matemática, sumado a los elementos pertenecientes a la teoría socioepistemológica que permiten rediseñar el discurso matemático escolar, se plantea una situación de aprendizaje que involucre el uso de un sistema de polea en el que tres grupos de estudiantes de cuarto medio de tres colegios distintos, busquen explicar a través de ecuaciones el movimiento del sistema planteado.

Para llevar a cabo esta investigación se utilizará la ingeniería didáctica basada en sus cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori; con la que se pretende sistematizar la información obtenida de las tres implementaciones.

Los resultados de investigación permiten evidenciar cómo los estudiantes resignifican la noción de sistemas de ecuaciones a través del uso de poleas, problematizando la formulación de una o más ecuaciones que describan su movimiento.

Palabras clave: Resignificar, Discurso matemático escolar, Teoría Socioepistemológica, Sistema de ecuaciones, sistema de poleas.

Abstract

The way mathematics is taught does not allow students to relate the content to their daily lives. In particular, under this premise, we seek to generate a learning situation that allows the notion of *systems of equations* to be redefined through the use of pulleys.

Due to the close relationship between physics and mathematics, added to the elements belonging to the *Socio-Epistemological Theo*ry that proposes to redesign the *school mathematics discourse*, a learning situation is proposed that involves the use of a *pulley system* in which three groups of fourth-year students from three different schools, seek to explain the movement of the proposed system through equations.

To carry out this research, didactic engineering based on its four phases will be used: preliminary analysis, conception and a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis; with which it is intended to systematize the information obtained from the three implementations.

The research results allow showing how the students *resignify* the notion of systems of equations through the use of pulleys, problematizing the formulation of one or more equations that describe their movement.

Key words: Resignify, school mathematics discourse, Socio-Epistemological Theory, systems of equations, pulley system.

INTRODUCCIÓN

Si observamos los registros históricos, la matemática siempre ha estado presente en el desarrollo de la humanidad, desde tiempos antiguos ha sido funcional y con base en los problemas que enfrentaban las personas en esa época, sin embargo, con el transcurso del tiempo cambió la forma de ver y hacer matemática, paso a ser enseñada en centros educativos en los que se enseñó el fundamento matemático de las cosas, perdiendo su relación con el contexto en el que fue desarrollado el conocimiento.

Creemos que esta desconexión entre la matemática y lo que lo rodea, sumado a la forma en la que se presentan los contenidos en documentos curriculares entregados por el MINEDUC, es lo que dificulta el aprendizaje y la comprensión de los contenidos, provocando una creciente desmotivación y mecanización de los conceptos matemáticos; como consecuencia directa, los estudiantes aprenden lo que el profesor les enseña sin cuestionarlo y lo replican de la misma forma en la que el profesor lo hace, basando la enseñanza en un proceso de repetición en donde el error guarda relación con la omisión de un paso del procedimiento enseñado.

Bajo este contexto es que se desarrolla esta tesis, al comprender que los estudiantes creen que la matemática no tiene relación con la vida cotidiana y que no es ni será útil dentro de su vida laboral.

Con base en elementos pertenecientes a la teoría socioepistemológica se buscará recuperar esta relación, proponiendo el diseño de una situación de aprendizaje que rediseñe el discurso matemático escolar dominante y otorgue nuevos significados al contenido matemático. Esto permite encontrar otros escenarios fuera del aula en donde habita la matemática y recuperar esta relación con el cotidiano.

La física es la ciencia más cercana a la matemática que nos permite describir el movimiento de objetos mediante el uso de fórmulas, en particular, la segunda ley de Newton nos permite observar y comprender que el movimiento de un cuerpo está relacionado con las fuerzas que se ejercen sobre éste; por lo que en esta investigación se buscará generar una situación de aprendizaje que permita resignificar la noción de sistemas de ecuaciones a través del uso de poleas.

Así, se buscará llevar a cabo la implementación de esta situación de aprendizaje que nos permita observar cómo los estudiantes comprenden los sistemas de ecuaciones y ofrecerles otros escenarios fuera de los ejercicios algebraicos clásicos u otros con contextos irreales que resignificar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Para llevar a cabo esta investigación se desarrollaron 5 capítulos, el primero de ellos está relacionado con el planteamiento del problema, en donde se ahonda en el problema de que la matemática sea enseñada sin ser relacionada con elementos del cotidiano de los estudiantes y los antecedentes de la investigación, centrada en documentos curriculares y otras investigaciones relacionadas. En el segundo capítulo se presentan los elementos teóricos que sustentan esta investigación, la teoría socioepistemológica considerando sus dimensiones, el rediseño del discurso matemático escolar y la forma en la que se relaciona con la construcción social del conocimiento matemático. En el tercer capítulo se realiza un análisis histórico-epistemológico de los sistemas de ecuaciones y el sistema de poleas, comprendiendo la forma en la que fueron desarrollados en sus orígenes y la forma en la que se relacionan estos dos elementos que nos permiten elaborar nuestra situación de aprendizaje. En el cuarto capítulo se encuentra la ingeniería didáctica, metodología que utilizaremos para llevar a cabo la implementación de la situación de aprendizaje generada. En el quinto capítulo se evidencia lo ocurrido al momento de llevar a cabo la implementación y se contrastan las respuestas obtenidas por los estudiantes con lo propuesto por los investigadores, analizando las dificultades presentadas y la forma en la que los estudiantes resignifican la noción de sistemas de ecuaciones. Finalmente, en las conclusiones se evidencian las reflexiones que se obtuvieron luego de realizar la investigación, con base en los capítulos desarrollados y la implementación de la situación de aprendizaje.

CAPITULO 1: PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

1.1. Planteamiento del Problema.

Los problemas desarrollados en la antigüedad son muy diferentes a los de la actualidad, desde un punto de vista objetivo, la matemática antigua estaba centrada en dar respuesta a las problemáticas que se desarrollaban en el *cotidiano*[1] de las personas, mientras que la matemática actual está centrada en el contenido por sí mismo olvidando su relación con la realidad (Cordero, 2016).

Actualmente, los contenidos matemáticos son enseñados mediante la escuela en los diferentes niveles de esta. El artículo 4 de la ley N° 20.370 General de Educación (2009), establece que:

> La educación básica y la educación media son obligatorias, debiendo el Estado financiar un sistema gratuito destinado a asegurar el acceso a ellas de toda la población, así como generar las condiciones para la permanencia en el mismo de conformidad a la ley (p. 3).

Esto con el objetivo de "enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en los estudiantes" (Ministerio de Educación, 2018, p. 214).

De lo anterior se desprende una inevitable comparación entre la matemática desarrollada por matemáticos antiguos y la matemática desarrollada en la escuela; esta diferencia principal está relacionada con la forma en la que se hacía matemática y en el *uso*[2] del conocimiento matemático, pues actualmente, la entrega de este conocimiento es "obligatoria" y estructurada bajo las bases curriculares planteadas por el Ministerio de educación (MINEDUC), la cual tiene como foco situar "lo que los estudiantes deben aprender, en términos de habilidades, actitudes y conocimientos"(Ministerio de Educación, 2016, p. 28).

---

[1] El concepto de cotidiano lo entendemos desde la mirada de autores como Cantoral y Cordero, los cuales se refieren a este como los escenarios transversales en donde habita el saber matemático: historia de las ciencias, artes, etc. Y al contexto en el que se desarrolla un objeto matemático desde diferentes realidades.

[2] Entendemos el uso desde la mirada de la Teoría Socioepistemológica en donde se refiere al significado que adquiere un objeto matemático según el contexto en el que se desarrolla, pudiendo adquirir nuevos significados (resignificado) dependiendo de ciertas condiciones, como su funcionamiento y forma.

La matemática ya se entrega estructurada, y no se construye ni reflexiona, abandonando por completo su origen, y como consecuencia directa:

> Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la Enseñanza Secundaria, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas. (Nolla, 2001, citado en González, 2004, p. 18).

Para cada uno de los niveles escolares se proponen actividades y objetivos de aprendizaje por cada eje temático, todos con un orden cronológico de cómo se deberían enseñar los contenidos, además, para cumplir con los objetivos establecidos, se emplean otros instrumentos como lo son el texto del estudiante y cuadernillos didácticos entregados al docente, donde se plantean fórmulas, definiciones, estrategias y se establece un procedimiento específico para la resolución de ejercicios; ejemplo de esto es lo que señala Cordero (2016) en donde explica que el imponer una definición propia de un concepto matemático, e ignorar lo que los estudiantes entienden del concepto, cultura e historia, deriva en "un discurso unilateral de lo que es correcto y lo que no lo es " (p. 64).

De esta forma, la matemática enseñada en la escuela es dictada y establecida como una secuencia lógica, donde no hay cabida a la historia ni relación con el contexto, haciendo que el contenido se vuelva abstracto e inentendible para el estudiante, pues se presenta ajeno a su realidad. Ejemplo de esto es la resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas en donde el estudiante busca un punto de intersección a través del despeje y posterior reemplazo de una de las incógnitas dentro de la otra ecuación, lo que desde un punto de vista matemático es correcto, pero desde un punto de vista práctico no tiene ningún sentido.

Si nos centramos netamente en el contenido y los conocimientos enseñados, el docente tiene un rol fundamental y puede ser el punto de inflexión al momento de enseñar los contenidos. Sin embargo, en la matemática, esto dista mucho de la realidad, pues es considerada única y absoluta, por lo que ni el docente ni el estudiante se cuestionan la matemática escolar, la asumen como cierta y son fiel a lo señalado y estructurado dentro del currículum, lo que niega el uso del conocimiento matemático fuera de la sala de clases, lo que en la *teoría socioepistemológica*[3] es denominado *adherencia*[4] (Cordero, 2016).

La matemática escolar impone a los miembros de la comunidad educativa una mirada particular de los objetos matemáticos, por lo cual, el estudiante se debe "someter" a las repeticiones y procedimientos que promueve el currículum, aceptándose como ciertas y dejando de lado las vivencias y el contexto en el que está inmerso el estudiante, es decir, donde existe una pluralidad epistemológica (Gómez, 2015, citado en Opazo, Cordero y Silva-Crocci, 2017, p. 868)

Lo anterior fractura la relación que tiene el estudiante con la matemática, pues, al no ser partícipe de la construcción del conocimiento y encontrarse obligado a replicar las explicaciones impartidas por el profesor, se pierde el interés por el contenido y la construcción del conocimiento. Esto lo podemos evidenciar en la investigación realizada por Orrantia (2006), donde se señala que los estudiantes:

> Ven las matemáticas como algo arbitrario, como un juego con símbolos separados de la vida real y (…) a medida que avanzan en niveles educativos, hace que la visión de las matemáticas que tienen los alumnos cambie gradualmente desde el entusiasmo a la aprehensión, desde la confianza al miedo (p. 173).

Las consecuencias de este desinterés por la matemática educativa, se presentan de manera explícita en la sala de clase y se traducen en problemas evidentes de los estudiantes; uno de ellos es la falta de concentración y rigurosidad al resolver problemas que contemplen elementos abstractos y frustración al no poder comprender dichos problemas, ya que la matemática es vista como "una asignatura aburrida, repleta de técnicas y "trucos" difíciles de aprender y basadas en procedimientos adquiridos por repetición memorística (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 104)".

[3] Es la teoría en la cual se basa nuestra investigación, se desarrollará en el Capítulo II.

[4] Concepto generado dentro de la TS que se refiere a la fidelidad parcial o total al discurso matemático escolar, el cual se desarrollará en profundidad en el Capítulo II.

La imposición del conocimiento utilizando una estructura como ésta, ha convertido el aprendizaje de las matemáticas en un ejercicio de memorización que no produce motivación a los estudiantes, pues se encuentra descontextualizada y alejada del contexto en el que se desenvuelve, es por ello que Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014) recalcan la importancia de comunicar una actividad en sí misma, sin recurrir a enseñar los resultados. De esta forma los estudiantes aprenderán matematizando, organizado y reorganizando su realidad, la cual no se encuentra restringida a una rama científica o social, sino a todas las realidades en las que el estudiante pueda aplicar el problema.

Se tiene la creencia de que el estudiante logrará comprender definiciones y demostraciones complejas solo mostrándoles el desarrollo o el concepto y que esta comprensión le permitirá aplicar la matemática a diversas situaciones de la vida cotidiana, lo cual está sumamente alejado de la realidad, por lo que solo se inclinará a realizar actividades siguiendo un estricto paso a paso, sin cuestionar el método ni el contenido empleado para tal fin (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014).

Esto inevitablemente llevará al estudiante por el camino de la *mecanización matemática*[5], consecuencia directa de la poca o nula relación del discurso matemático escolar con los conocimientos del cotidiano del estudiante, y en otros casos, como señala Baroody (2000), el planteamiento de problemas extraídos de libros de matemática de forma descontextualizada e irrelevantes para los estudiantes, no permitirán la comprensión del mismo, pues no se asemejarán a la realidad en la que se encuentran inmersos.

Este tipo de problemas se presentan con mayor o menor frecuencia dependiendo de la rama de la matemática en la que se esté trabajando. Por ejemplo, en geometría se cuenta con una representación de la matemática que presenta un mayor grado de flexibilidad al resolver ejercicios por el estudiante; en estadística es necesario ser riguroso con el procedimiento y con la comprensión de los contenidos, ya que responder mecánicamente puede llevar a una respuesta errónea.

[5] En esta investigación, nos referimos al término "mecanización matemática", como los conocimientos matemáticos que pueden ser desarrollados de manera mecánica -sin razonar- y que no tienen un significado para el estudiante.

En el momento que nos referimos al algebra, es posible notar que estos problemas se evidencian con mayor frecuencia, pues tiene una gran cantidad de definiciones y elementos que se presentan como absolutos y el estudiante los asume de esta forma, los mecaniza y desarrolla ejercicios sin comprender lo que hace, pues como señalan Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014) la matemática educativa es irrelevante para él, ya que no considera la existencia de una relación con su vida laboral.

Existen múltiples elementos que pueden acrecentar la desmotivación, falta de rigurosidad y mecanización del álgebra. Sánchez y Del Valle (2016) afirmaron que:

> El álgebra por su naturaleza simbólica es un área que reporta diversidad de dificultades provocando errores desde que los estudiantes inician la interacción con ésta. Las causas son múltiples, tratamiento inadecuado de los símbolos, generalización aritmético-algebraica, el álgebra como proceso de operacionalización, falta de comprensión por quien la enseña, uso inadecuado del lenguaje, ausencia en el desarrollo abstracto de estudiantes, etc. (p. 60).

Acrecentando los problemas que se vienen arrastrando durante los años de escolaridad, por lo que el estudiante no podrá discernir si el contenido estudiado es efectivamente cierto, pues no posee los conocimientos ni las herramientas para dar cuenta de aquello, por lo que no identificará su conexión con la realidad (si es que la hubiera) ni tampoco cuestionará su validez, replicando y mecanizando los métodos entregados por el profesor.

Esta mecanización se basa en replicar procedimientos, conceptos, aplicar teoremas, definiciones, realizar cálculos similares a un recetario, sin razonar sobre la matemática ni su relación con el *cotidiano*. Es así que existe un sin número de contenidos en el álgebra que pueden llegar a ser mecanizados sin comprender el fondo, ejemplo de ello es el trabajo con la proporcionalidad (Reyes-Gasperini, 2013) e investigaciones relacionadas con la aplicación de derivadas (Pinto, 2018).

Esto significa que aun cuando los estudiantes tengan una amplia gama de alternativas para resolver ejercicios, todos se puedan solucionar sin razonar, aplicando un paso a paso y haciendo que el uso de cualquier método sea irrelevante e insignificante.

Las actividades planteadas por el MINEDUC en el texto del estudiante están orientadas a desarrollar el álgebra sin un contexto ni relacionando el contenido propiamente tal, con los conocimientos del cotidiano de los estudiantes, por lo que consideramos que el *uso* de objetos concretos para el desarrollo de un contenido matemático particular, permite enriquecer la visión que el estudiante tiene de este, otorgarle un nuevo significado y acercarlo a la realidad en la que se desenvuelve el estudiante. Así la presentación de problemáticas desafiantes permitirá desarrollar situaciones de aprendizaje que tengan relación con el contexto de los estudiantes, permitiendo que la mirada se centre en los usos del conocimiento y cómo se desarrollan dependiendo de la situación en la que se desenvuelve. De esta manera se permitirá resignificar un concepto o contenido a través de su funcionamiento y forma (Rosas, 2013).

Para el MINEDUC es importante desarrollar habilidades de nivel superior como lo son: argumentar y comunicar, modelar, representar y, por último, resolver problemas. Para desarrollar estas habilidades presenta actividades que no representan un desafío (véase Anexo A. Ejercicios planteados en documentos Curriculares.), ni un significado para el estudiante, por lo que el contenido es visto de manera aislada respecto del contexto de realidad que lo compone. Por esto destacamos la importancia de la modelación de situaciones reales en donde "los estudiantes deben interpretar la situación que se les da y determinar las variables que pueden considerarse importantes para describir de manera certera el problema de interés" (Trigueros, 2009, p. 76). Así el estudiante se interesará en una situación que puede considerar cercana a su cotidiano por el simple hecho de ser real y aplicable a su contexto.

En la física podemos encontrar ejemplos claros y específicos que contemplen sistemas de ecuaciones con los que se puedan plantear situaciones que se acercan al cotidiano de los estudiantes, ejemplo claro de ello son las poleas y fuerzas involucradas; circuitos eléctricos y la circulación de la corriente eléctrica, entre otras investigaciones realizadas por Piña (2017) relacionadas a problemáticas de cinemática unidimensional, y en particular, al punto de encuentro entre dos o más móviles.

Es debido a lo anterior que, en esta investigación, buscaremos responder a la siguiente interrogante:

¿Cómo se resignifica la noción de sistemas de ecuaciones a través del uso de poleas desde una mirada socioepistemológica?

1.2. Antecedentes.

1.2.1. Estado del Arte

Son múltiples las investigaciones que se han realizado acerca de los sistemas de ecuaciones, algunas centradas en el estudiante y otras centradas en la situación de aprendizaje, entre ellas podemos encontrar, por ejemplo Ochoviet (2009) en su tesis sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se planteó la forma en la que estudiantes uruguayos entre 14 y 15 años construían, al desarrollar sistemas de ecuaciones 2x2 y el diseño de una secuencia de enseñanza, además de actividades sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Para llevar a cabo esta investigación se utilizó una metodología propia donde el profesor encargado de la asignatura, trabaja de manera coordinada con otros docentes para lograr el objetivo. Podemos destacar entre sus conclusiones el planteamiento de tareas que involucren diferentes modos de pensamiento que contribuyan al desarrollo conceptual y exploratorio para responder a las situaciones planteadas y el desarrollo de actividades que permitan la construcción del concepto matemático e interpretación del punto solución en sistemas de ecuaciones 2x2, para luego expandirlo a sistemas de ecuaciones con más de dos incógnitas.

Por otra parte, Trejo y Camarena (2011), investigan el análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia, centrada en el proceso cognitivo y la forma que dos estudiantes del primer cuatrimestre de la carrera de Técnico Superior en Tecnología de Alimentos, abordan los sistemas de ecuaciones lineales en un contexto de balance de materia en situaciones químicas. Para llevar a cabo el análisis, basan su metodología en tres bloques: primero, contextualizar sistemas de ecuaciones algebraicos lineales en el balance de materia, utilizando las etapas de contextualización de la matemática en contexto; en segundo lugar, determinar situaciones problemáticas que se van a aplicar al grupo de enfoque y, finalmente, analizar el actuar de los estudiantes a través de sus representaciones de las invariantes de los esquemas de entendimiento y solución. Se destaca entre sus conclusiones la definición de tipos de representaciones de manera espontánea y natural por parte de los estudiantes, y destaca que en situaciones contextualizadas poseen las herramientas para la resolución de sistemas de ecuaciones, pero en contextos diferentes deben ser observados.

Guerra (2012) plantea una serie de actividades didácticas como balanceo de ecuaciones químicas, polinomio interpolador, modelo económico lineal, flujo de redes, donde se apliquen sistemas de ecuaciones lineales, de dos o más variables, utilizando métodos de resolución como Gauss-Jordán, eliminación Gaussiana, método por la inversa. Con esta propuesta el autor espera contribuir en la proyección profesional de los estudiantes, ofreciéndoles situaciones alternativas a las comunes sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Sumado a lo anterior, Figueroa (2013) desarrolla en su tesis de grado una secuencia didáctica, elaborada, analizada y aplicada a estudiantes de cuarto año de secundaria de Perú, orientada en el desarrollo de la capacidad de resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y superar las dificultades que estos presenten. La investigación se realizó con 12 alumnos, los cuales fueron sometidos a cuatro actividades que reformularon la concepción que estos tenían de sistemas de ecuaciones con dos variables. Entre los aspectos relevantes que se destacan de su investigación podemos mencionar que las situaciones didácticas diseñadas contribuyeron a la consolidación de los aprendizajes de los estudiantes, estimularon su habilidad para generar y resolver problemas de manera algebraica mediante software educativo como GeoGebra.

Regalado, Delgado, Martínez y Peralta el año 2014, diseñan una estrategia de aprendizaje para estudiantes de ingeniería en Acuicultura en donde se desarrolle un programa en MATLAB que permita balancear ecuaciones químicas utilizando los métodos de resolución algebraicos. Entre las conclusiones a destacar de esta estrategia de aprendizaje encontramos el aumento del grado de aprendizaje de los estudiantes relacionado con conceptos básicos de balanceo de ecuaciones químicas de medio a alto, el desarrollo de la creatividad para resolver problemas complejos y la adquisición de conocimientos relacionados al álgebra lineal.

Por otra parte, Borges (2016) se destaca por proponer un sistema de tareas que considere la incorporación de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales en el 9° grado (estudiantes entre 14 y 15 años) del centro mixto Jesús Gilberto Durán Gómez, con el objetivo de contribuir al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje a partir del planteamiento y resolución de problemas, para lo que plantea la implementación de un diseño de investigación-acción (desde un enfoque cualitativo), elaborando un plan de acción de carácter interdisciplinario, el cual tuvo resultados positivos en el trabajo de grupo focal.

Campos (2017), en su tesis plantea la construcción de un modelo epistemológico que permita analizar cómo se comprenden los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y utilizarlos como instrumento de modelación algebraica en el contexto que se encuentran los estudiantes de secundaria de Perú. Entre sus conclusiones destaca la capacidad que tienen los sistemas de ecuaciones lineales como modelo epistemológico de referencia, de permitir modelar diferentes tareas relacionadas a otros temas de interés que en su desarrollo presentan sistemas de ecuaciones lineales.

Bajo la misma línea, Maturana (2017), en su trabajo de grado, implementa una situación didáctica enfocada en fortalecer los procesos relacionados con la representación, modelación y comunicación de los estudiantes en post del objeto matemático y la resolución de problemas cotidianos con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. En la investigación se concluyó que la Teoría de las Situaciones Didácticas contribuyó a la construcción de un ambiente de aprendizaje que promueve el desarrollo del objeto matemático en un 67%, aumentó la participación, liderazgo y trabajo en equipo, además de permitir el desarrollo de competencias de planificación en tres fases: el antes, el durante y el después.

En cuanto a investigaciones realizadas por otros autores, podemos encontrar una serie de tesis que se basan tanto en la didáctica, como en la teoría de lo antropológico, todas ellas centradas en cómo abordar los sistemas de ecuaciones desde una mirada constructivista y centrada en una situación de aprendizaje. Sin embargo, se centran en plantear soluciones y formas de abordar los sistemas de ecuaciones desde otra perspectiva para que así el estudiante tenga un aprendizaje significativo.

Por otra parte, nosotros nos enfocamos en plantear un escenario donde los estudiantes relacionen conceptos que les permitan aterrizar la matemática escolar, planteando la implementación de situaciones relacionadas al uso de poleas. De esta manera, buscaremos resignificar o trastocar los conocimientos que los estudiantes tienen acerca de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

1.2.2. Documentos Curriculares

En los planes y programas de primero medio se presentan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas dentro de la unidad 2: Álgebra y funciones, específicamente el objetivo de aprendizaje 4 (véase Anexo B. Documentos Curriculares) hace referencia a esto con sus respectivos indicadores de evaluación.

En el objetivo de aprendizaje se plantea la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y el desarrollo de ejercicios a través de diferentes métodos de resolución (gráfico, sustitución, igualación, reducción). Lo cual se buscará contrastar con lo expuesto en el texto del estudiante y las actividades planteadas por el MINEDUC.

En el texto del estudiante de primero medio, encontramos el planteamiento de sistemas de ecuaciones a través del juego de batalla naval donde se da énfasis en el punto en común que tiene la trayectoria de dos barcos que es seguida por dos rectas

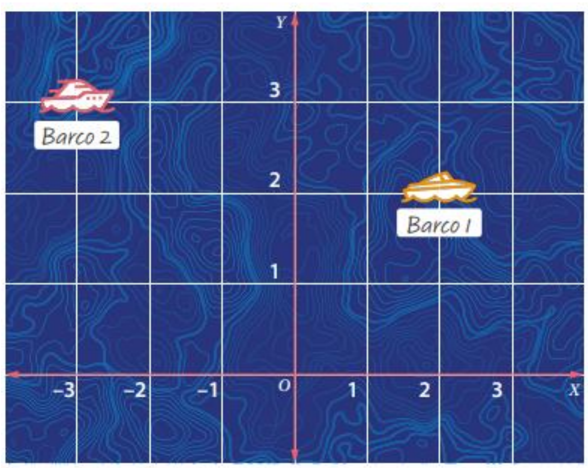


Figura 1: Representación gráfica de la Batalla Naval.
Fuente: Texto del estudiante primero medio, MINEDUC, 2021, p. 70

Este primer acercamiento al planteamiento de sistemas de ecuaciones es interesante y didáctico, permite al estudiante pensar que los dos barcos se mueven de manera simultánea y en algún momento llegarán a encontrarse.

Posteriormente se definen los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera matemática y se presentan los métodos de resolución (véase Anexo C. Métodos de resolución planteados en documentos curriculares) que se muestran a continuación:

Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** tiene la forma:

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$$

Donde a, b, c, d, e y f son números racionales, y x e y son las incógnitas.

La **solución del sistema** es la solución común en ambas ecuaciones y corresponde al punto de corte de las rectas asociadas a las ecuaciones.

Para **resolver un sistema de ecuaciones**, puedes utilizar diferentes métodos. A continuación, se presentan los métodos **gráfico**, por **igualación**, por **sustitución** y por **reducción**.

Figura 2: Definición de Sistema de Ecuación Línea con dos Incógnitas.
Fuente: Texto del estudiante primero medio, MINEDUC, 2021, p. 70

El primer método que se muestra para resolver sistemas de ecuaciones es el método gráfico, se explica que este método consiste en graficar ambas ecuaciones en un plano cartesiano y buscar los puntos de intersección en caso de existir, y estos serán la solución del sistema.

En el ejemplo de los barcos, se utiliza este método y se muestra el punto en el que se intersecan estas dos rectas, lo cual corresponde a la solución del sistema con base en la gráfica, donde se muestra la trayectoria de los barcos.

En el método por sustitución se propone un ejemplo en donde se deben plantear ecuaciones que permitan determinar la edad desconocida de dos personas. Se plantea el sistema de ecuaciones relacionado al ejemplo y este se desarrolla paso a paso usando el método por sustitución, despejando una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituyendo en la otra, obteniendo el valor de una de las incógnitas.

Se plantea que para encontrar la otra edad se debe reemplazar este valor en una de las ecuaciones y con los valores de x e y, se debe verificar que efectivamente son solución y cumplen con la igualdad.

Similar al caso anterior, para el método de reducción se propone un sistema de ecuaciones que se resolverá por medio de un paso a paso. Se plantea que para resolver este sistema se debe multiplicar una o ambas ecuaciones de tal manera que los coeficientes de una de las incógnitas sea el mismo para ambas ecuaciones, pero con signo contrario, posteriormente ambas ecuaciones se suman y resolviendo ésta, se obtendrá el valor de una de las incógnitas.

Finalmente, como en el caso anterior, se reemplaza la incógnita conocida en la otra ecuación para obtener la faltante y luego se reemplazan ambos valores en una de las ecuaciones para comprobar que efectivamente son solución y se cumpla la igualdad.

Por último, el método por igualación se explica paso a paso desarrollando un sistema de ecuaciones similar a los casos anteriores, para esto se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan para obtener el valor de la incógnita no despejada y poder reemplazar el valor obtenido en alguna de las ecuaciones. Luego, se verifica que los valores de x e y encontrados sean la solución reemplazándolos en las ecuaciones y verificando que la igualdad se cumpla.

En cada uno de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se muestra un paso a paso de que es lo que el estudiante debe hacer para poder resolver el sistema y llegar al par (x, y), dando énfasis a la técnica por la cual se resuelven y no a la contextualización o interpretación del sistema propiamente tal.

Las actividades presentadas a los estudiantes consisten en desarrollar ejercicios utilizando alguno de los métodos presentados anteriormente, sin dar un significado profundo a la solución obtenida, el mayor acercamiento se presenta en la actividad 2 (véase Anexo A. Ejercicios planteados en documentos curriculares.), donde se puede desarrollar el pensamiento lógico y presentar alguna dificultad en el planteamiento de ecuaciones y posteriormente la resolución del sistema.

Por otra parte, en los planes y programas de primero medio, se proponen actividades orientadas a desarrollar tres habilidades: resolver problemas, representar y modelar. Las actividades orientadas a desarrollar la habilidad de resolver problemas, buscan que los estudiantes logren plantear sistemas de ecuaciones y puedan resolverlo por medio de los métodos planteados, además, buscan que reflexionen en torno al planteamiento de una situación que contemple diferentes opiniones acerca de las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

En cambio, las actividades orientadas a desarrollar la habilidad de representar, busca que los estudiantes comprendan el proceso por el cual se resuelve un sistema de ecuaciones, y por último, la habilidad de modelar es desarrollada por medio de actividades que permiten plantear sistemas de ecuaciones en diferentes contextos.

Al realizar una comparativa entre lo que se muestra en el texto del estudiante y planes y programas, podemos decir que existe una contradicción acerca de lo que se quiere lograr y lo que se está haciendo para lograr tal objetivo, pues en el libro del estudiante no se plantean situaciones como las descritas en los planes y programas, centrándose en la resolución de los sistemas de ecuaciones a través de alguno de los métodos ya conocidos.

1.3. Objetivos de Investigación.

Con base en lo expuesto en el planteamiento del problema y el estado del arte es que se buscará responder la pregunta ¿Cómo se resignifica la noción de sistemas de ecuaciones a través del uso de poleas desde una mirada socioepistemológica? A través de los siguientes objetivos:

1.3.1. Objetivo General:

- ➢ Resignificar la noción de sistemas de ecuaciones en estudiantes de cuarto medio, por medio del diseño de una situación de aprendizaje que considere el uso de poleas desde una mirada socioepistemológica.

1.3.2. Objetivos Específicos:

- ➢ Identificar el tratamiento de sistemas de ecuaciones en documentos curriculares.
- ➢ Evidenciar el uso de los sistemas de ecuaciones y el uso de poleas a través de la historia.
- ➢ Diseñar una situación de aprendizaje para la resignificación de la noción de sistemas de ecuaciones a través del trabajo con poleas.
- ➢ Analizar los significados otorgados por estudiantes de cuarto medio a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas al resolver la situación de aprendizaje.

1.4. Limitaciones.

Al momento de realizar esta investigación encontramos una serie de limitantes relacionadas al contexto actual de pandemia en el que nos encontramos; en primer lugar, fue sumamente difícil poder encontrar bibliografía que sustentara nuestra investigación, puesto que no teníamos acceso a bibliotecas, además de que los permisos de desplazamiento eran limitados, impidiendo que pudiéramos realizar una búsqueda de fuentes y libros en formato físico.

Bajo esta misma línea, la comunicación y búsqueda de centros educativos en los que pudiéramos implementar la situación de aprendizaje fue un problema recurrente, puesto que la comunicación a través de correos era engorrosa y lenta, por lo que generalmente nos dejaban de responder, junto con lo anterior, el formato de las clases online es realizado a través de plataformas virtuales como ZOOM, MEET u otros y no todos los estudiantes cuentan con los recursos para poder tener una conexión estable que permita desarrollar una clase sin inconvenientes.

Debido a esta modalidad online y a los inconvenientes anteriormente mencionados, la asistencia a las clases en la mayoría de los colegios se vio considerablemente reducida, por lo que los grupos obtenidos para desarrollar la actividad son numéricamente bajos, es por ello que la aplicación de nuestra situación de aprendizaje estuvo condicionada por los recursos tecnológicos con los que contaban los estudiantes y el horario de clases establecido para la implementación.

Otro punto sumamente importante es la obtención de resultados y participación de los estudiantes dentro de esta investigación, ya que la situación de aprendizaje no fue pensada para desarrollarse de manera online. Esto ha provocado que, además de lo ya mencionado, la obtención de resultados o respuestas de los estudiantes también se convirtió en un desafío, ya que existía la posibilidad que no enviaran sus respuestas, no las compartieran aun después de terminarla, o no completaran la actividad, dejando muchas preguntas sin respuestas.

Estas problemáticas expuestas enmarcan la elaboración e implementación de nuestra situación de aprendizaje, enfrentando contratiempos y las dificultades de desarrollar una investigación de este estilo en un contexto de pandemia.

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. Discurso Matemático Escolar (dME).

Para precisar lo que en la teoría Socioepistemológica entendemos por discurso matemático escolar (dME) es necesario realizar una diferenciación entre la matemática, la matemática escolar y la matemática educativa. De esta forma, se define la matemática, como los conocimientos matemáticos de la época en la que se desarrollaba y daba respuesta a una problemática específica y contextualizada (Cantoral, 1995); la matemática escolar, como "un cuerpo autónomo de conocimiento que toma la matemática como su saber de referencia" (Cantoral, 1995, p. 5) y finalmente la matemática educativa como el "estudio de los fenómenos que se producen en la apropiación del saber matemático en la escuela" (Lezama, 2005, p. 340).

Se destaca la diferencia entre la matemática y la matemática escolar en base a la finalidad por la que se origina cada una, existiendo entre la primera y la segunda una línea epistemológica y una transformación didáctica del saber, dejando en claro que "la matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática" (Cantoral, 1995, p. 2).

De esta forma, la matemática escolar se encuentra regida por un sistema de razón, denominado discurso Matemático Escolar (dME), el que se encuentra centrado en "el valor mismo de los conceptos puros: conceptos como el de función, razón, fracción, número, sucesión, espacio, etc." (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 7).

Bajo este punto de vista, el discurso matemático escolar es elaborado *por* y *para* la matemática; por lo que el profesor y el estudiante se encuentran en un sistema didáctico que no contempla otras realidades, además del ejercicio recursivo de la matemática sobre sí misma, sin considerar las diferentes epistemologías de las que es partícipe el conocimiento, donde una de ellas es la hegemónica que delimita el dME. Lo anterior refleja una ideología y postura social marcada por las concepciones sociales y culturales de la sociedad, de esta forma, Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) afirman que:

> El dME subyace a lo inmediatamente visible, lo ostensible, explícito u objetivo, los contenidos y sus concepciones: Planes y Programas de Estudio, libros de texto,

exposición de aula, pero también a las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general (p. 14).

Bajo la misma línea, Cordero y Flores (2007), citados en Soto y Cantoral (2010) se refieren al dME como “manifestaciones del conocimiento normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la matemática” (p. 839). Por lo que la teoría socioepistemológica busca dar un vuelco a la visión tradicionalista; como señala Soto y Cantoral (2014), “el estudio de la CSCM se da en los usos del conocimiento matemático por construir situaciones de aprendizaje centradas en elementos provenientes de las prácticas de la comunidad estudiada, y no sólo de las características de los propios objetos matemáticos” (p. 1529).

Este discurso permite validar y evidenciar la forma en la que la sociedad influye en la introducción de saberes matemáticos dentro del sistema educativo, legitimando un nuevo sistema de razón (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015) que centre la matemática como una construcción social del conocimiento. A partir de lo señalado anteriormente, y contrastando estas dos visiones, el discurso matemático escolar presenta una serie de características descritas por Soto y Cantoral (2014), las cuales se presentan a continuación:

- *La atomización en los conceptos:* no se consideran los contextos sociales ni culturales del mismo conocimiento, que permite su construcción.
- *El carácter hegemónico:* existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimiento, por sobre otros.
- *La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo:* se presentan los objetos matemáticos como si hubiesen existido siempre y con un orden determinado.
- *El carácter utilitario y no funcional del conocimiento:* la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.
- *La falta de marcos de referencia:* se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras disciplinas.

Lo que permite caracterizar al dME como impositivo y autoritario (véase figura 1), donde el conocimiento no se construye ni significa, sino más bien se presenta de forma acabada sin dar espacio a la transformación ni significación de los objetos matemáticos y/o contenidos, (Soto y Cantoral, 2014).

Figura 3: Mapa del Discurso Matemático Escolar.
Fuente: Soto, 2009, citado por Reyes D. (2011), "Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas"

Es por ello que, dentro de la teoría socioepistemológica, la existencia de un discurso matemático escolar dominante que no considere la construcción social del conocimiento y se centre en ella misma produce tres fenómenos conocidos como: adherencia, opacidad y exclusión, los cuales no actúan de manera secuencial, sino más bien en conjunto y de manera sistemática.

En un primer momento, a través de los currículos, programas y modelos educativos, la matemática educativa genera un discurso matemático escolar (dME), la cual es una epistemología del conocimiento matemático que se presenta como dominante en el contexto escolar. Este discurso no considera para su elaboración el conocimiento de las personas o su contexto y, por ende, tampoco considera estos aspectos en el alumnado. De esta forma se genera el fenómeno de *exclusión* de la construcción social del conocimiento matemático (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Esto es contraproducente, ya que el hecho de que exista una epistemología dominante quiere decir que se niega la pluralidad epistemológica del conocimiento, entre los cuales, está el trato de los contenidos en el cotidiano, que le da sentido a lo que se le está enseñando al estudiante. El conocimiento en el discurso matemático educativo no tiene parecido alguno a lo que podemos encontrar en la realidad, lo cual es mencionado por Pinto (2018):

> Se supone que enseñamos para que los niños, niñas y jóvenes mejores su cotidiano, pero lo que se enseña en la escuela no responde a las situaciones de lo cotidiano, y peor aún, el conocimiento de lo cotidiano no se parece nada al de la escuela (p. 45)

Estos conocimientos del cotidiano y la escuela se relacionan con dos tipos de epistemologías que no se relacionan entre ellas, por un lado, encontramos la matemática educativa, y por otro lado la del cotidiano; sin embargo, una prevalece por sobre la otra siendo legitimada como la única válida, generando un fenómeno llamado *opacidad* de la vida, el cual se centra en la opacidad del dME por sobre otras epistemologías.

Ahora bien, los docentes (y por consecuencia los estudiantes) se *adhieren* al discurso matemático escolar evitando a toda costa cuestionarlo o trastocarlo (Cordero, 2016), condición necesaria para poder lograr la didáctica entre este conocimiento escolar y el cotidiano de los estudiantes, ocurriendo así el fenómeno de *adherencia*.

Por lo que el dME presenta una única epistemología del conocimiento matemático como válida e incuestionable, lo que produce una *violencia simbólica* descrita como "todo poder que logra imponer significaciones e imponerlas como legítimas disimulando las relaciones de fuerza en que se funda su propia fuerza" (Bourdieu y Passeron, 2005, citado en Soto y Cantoral, 2014, p. 1530).

El dME excluye a través de la imposición y reproducción de las relaciones de poder existentes en nuestra sociedad e inculcando a los estudiantes "la superioridad o justicia de la cultura o conocimiento dominante y la inferioridad de la cultura o conocimiento de los grupos y categorías sociales dominadas" (Soto y Cantoral, 2014, p. 1532). Por lo que, asumir una epistemología como válida producirá una exclusión en la que los estudiantes y profesores sean cómplices de manera inconsciente de replicar este sistema (Soto y Cantoral, 2014).

Bajo la mirada de la matemática educativa, podemos afirmar correctamente que, debido a los tres fenómenos mencionados anteriormente (exclusión, opacidad, y adherencia) la matemática del dME al imponer esta epistemología como única produce esta violencia simbólica.

En consideración de los tres fenómenos explicados anteriormente y la violencia simbólica que estos provocan, es que la teoría socioepistemológica reconoce que el problema de la enseñanza no es responsabilidad total del docente, ni de los conocimientos que posee sobre un objeto matemático, así como tampoco del estudiante y de la forma en la que razona la matemática; sino más bien del "objeto cultural" el cual se está comunicando a través de un acto de enseñanza, que no corresponde a la *matemática* propiamente tal, sino de la *matemática escolar* (Cantoral, Reyes-Gasperini, y Montiel, 2014), la cual puede ser *rediseñada* (RdME) y problematizada dentro de un paradigma epistemológico, donde se conciba el conocimiento matemático como aquel que se genera a raíz de las prácticas socialmente situadas (Soto y Cantoral, 2014), convirtiéndose en un objeto de estudio que considere las construcciones sociales del conocimiento matemático.

De esta forma, la teoría socioepistemológica plantea el RdME que esté centrado en el individuo y el estudio de la CSCM que se da en los usos del conocimiento matemático para la construcción de situaciones de aprendizaje centradas en elementos que provengan de las prácticas de las comunidades de estudio, teniendo un carácter funcional que permita la adquisición de nuevos significados por los miembros de la comunidad (Soto y Cantoral, 2014).

2.2. Teoría Socioepistemológica.

La teoría socioepistemológica se origina en la escuela mexicana de Matemática Educativa a fines de la década de los ochenta, como su nombre lo indica, está centrada en lo social y epistemológico, centrando su mirada en el estudio de los fenómenos ligados al saber matemático. De esta forma, su objetivo está centrado en estudiar cómo el saber matemático es construido en un ámbito social que no fue pensado para ser enseñado en la escuela, donde es transformado e introducido en el *sistema didáctico*, alterando su estructura y funcionalidad. Esto tiene como consecuencia una descontextualización del saber que termina afectando la relación entre estudiante y profesor (Cantoral y Farfán, 2003). Bajo esta línea se han realizado diferentes investigaciones empíricas en donde destacan diferentes autores (Cantoral y Farfán, 2008).

Así, la teoría socioepistemológica da énfasis al estudio de las aproximaciones epistemológicas tradicionales, las cuales han asumido que el conocimiento resulta de adaptar las explicaciones teóricas con otras evidencias empíricas, en las que se olvida la importancia del origen histórico, los escenarios culturales e institucionales que permitían contextualizar el conocimiento matemático (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Soto y Cantoral (2014) comparten lo señalado y destacan que el objetivo de la teoría socioepistemológica:

> Propone dar un vuelco a la visión tradicionalista de la matemática escolar. En términos concretos, propone el cambio − a nivel institucional y cotidiano − de la visión que ubica a los objetos matemáticos, metafóricamente, en un altar y que conduce nuestra atención hacia cómo estos son aprendidos por el estudiante, para convocarnos al estudio de la actividad humana y las prácticas sociales, pues estas están en la base de la CSCM (p. 1529).

Dentro de la evolución de la Matemática Educativa, podemos reconocer fenómenos didácticos que están ligados al saber matemático, los cuales están ligados a problemáticas relacionadas con la evolución de los fenómenos didácticos, descritos por Cantoral y Farfán (2003). El primero de ellos reconoce una *didáctica sin alumnos*, que atiende al diseño de estrategias y formas de presentar el contenido matemático escolar de manera más accesible para estudiantes y profesores, pero sin considerar aspectos cognitivos o afectivos, ni la realidad sociocultural del estudiante. El segundo una *didáctica sin escuela,* donde, a través de estudios cognitivos, dar explicación de cómo se aprende matemáticas, o simplemente dar pautas propias del diseño curricular. Luego, el tercero plantea una didáctica en la escuela, pero sin escenarios, en el que se estudian los vínculos entre alumno, maestro y saber; inmersos en un contexto institucional. Finalmente, se plantea una *didáctica en escenarios socioculturales*, la cual considera la matemática como una actividad construida socialmente, atendiendo a diferentes contextos socioculturales de los cuales surgen los contenidos matemáticos, dando énfasis en la construcción y difusión del conocimiento. (Correa, Molfino, y Schaffel, 2018)

Por ello, teoría socioepistemológica realizaba estudios de fenómenos didácticos de manera sistémica, tomando en consideración los tres polos básicos del triángulo didáctico (véase figura 4) que contempla el contenido de la enseñanza (saber), el sujeto que aprende (alumno) y quien enseña (profesor), los que se encontraban regulados por un medio didáctico controlado (Cantoral, 2016).

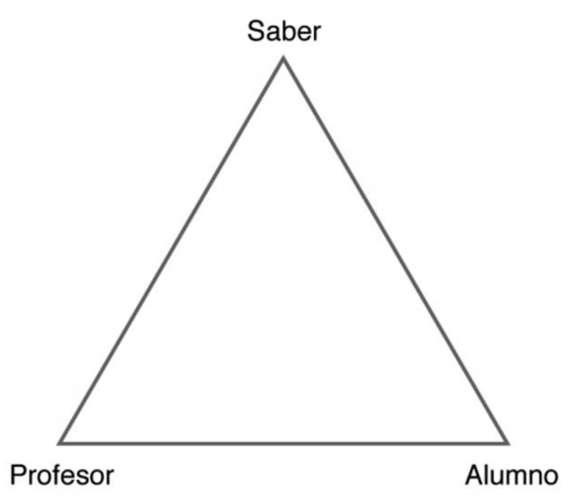


Figura 4: Triángulo Pedagógico.
Fuente: Jean Houssaye (1988), citado por Ibáñez, 2007

Luego se comenzó a cuestionar el qué, a quién, cuándo y por qué enseñar un conocimiento matemático (Cantoral, Cordero, Farfán e Ímaz, 1990 citado en Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Esto permitió cambiar el foco sobre las prácticas y dejar de analizar única y exclusivamente los conceptos matemáticos, lo que dio paso a la "descentración del objeto matemático" (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015), incorporando una "dimensiones de corte social y cultural que significasen aquello que originó al conocimiento matemático" (Cantoral, 2016) ampliando así la concepción de aula, saber y sociedad (figura 3). Integrando así las cuatro componentes, de manera de obtener una mirada sistémica de las dimensiones a abordar: *dimensión epistemológica, dimensión didáctica, dimensión cognitiva y dimensión social* (Cantoral y Farfán, 2003).

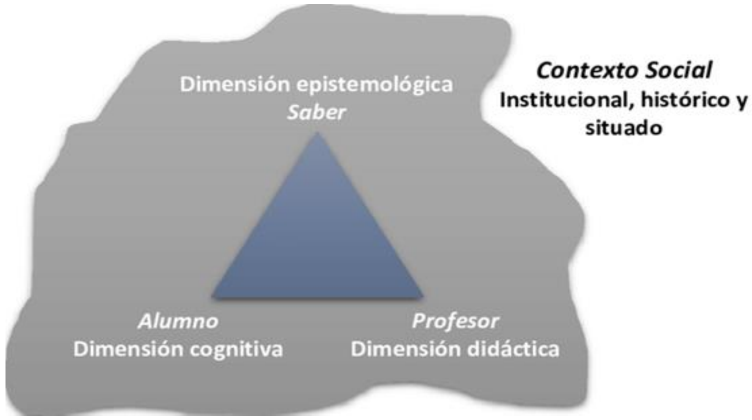


Figura 5: Triángulo Didáctico Extendido
Fuente: Cantoral R. (2013), citado por López L. (2016), Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional

Con la finalidad de desarrollar el pensamiento matemático, la teoría socioepistemológica incorpora cuatro dimensiones del saber (véase figura 4), las cuales son: la dimensión cognitiva (propias del funcionamiento mental), la dimensión didáctica (propias de la conformación de sistemas didácticos), la dimensión epistemológica (propias de la naturaleza y significados del pensamiento matemático) y finalmente la dimensión social (la síntesis de los objetos y herramientas de una sociedad); las que se entrelazan de manera sistémica y permiten problematizar el saber matemático (Cantoral y Farfán, 2003).

Figura 6: Dimensiones de la Teoría Socioepistemológica.
Fuente: Cantoral y Farfán, 2003 Citado por Del Valle T. (2015), Los usos de la optimización: un marco de referencia y la teoría socioepistemológica.

Como señala Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, (2015) "la Teoría Socioepistemológica descansa en estos cuatro principios fundamentales que se explican de manera articulada y sustentan la idea fundamental de la Socioepistemología" (p. 16).

Estos cuatro principios se encuentran íntimamente relacionados con la problematización del saber matemático, la que permitirá al docente comprender que, en las prácticas sociales, podemos encontrar las bases para la construcción del conocimiento (normatividad de las prácticas sociales), el contexto determinará la forma en la que el estudiante o sujeto en estudio construya su propio conocimiento de manera significativa y lo ponga en uso (racionalidad contextualizada). De esta forma, cuando el conocimiento se consolide como un saber y sea puesto en uso, será válido para el estudiante, pues a partir de sus propias interpretaciones y conclusiones se logró su construcción con una línea argumentativa detrás, lo que dota a este saber de un relativismo epistemológico. Finalmente, debido a la evolución que tenga el saber y su interacción con nuevos contextos, se lograrán resignificar y enriquecer los aprendizajes construidos hasta el momento (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016).

Esta postura que considera la resignificación progresiva y la construcción del conocimiento, difiere del enfoque dominante que predomina en el dME, pues no se encuentra centrado en objetos matemáticos ni la elaboración de explicaciones paso a paso, sino que promueve el uso desde la matemática desde el cotidiano, otorgando nuevos significados a las construcciones matemáticas que hagan los estudiantes en una situación específica. Esto implica que el foco de atención se centre en las prácticas sociales y se recupere el carácter social que norman la CSCM (Gómez y Cordero, 2010).

Esta transición permite dar énfasis en los aspectos funcionales de la matemática y comprender la naturaleza dual que presenta (Cordero, 2013 citado en Del Valle 2015); pues una misma matemática tendrá diferente significado para diferentes grupos sociales, dependiendo de sus necesidades, usos y explicaciones (Gómez y Cordero, 2010), por lo que la matemática puede ser un objeto de estudio y a su vez puede tener un carácter funcional al ser empleada en otras áreas transversales en donde se justifique su uso.

2.3. Resignificación.

Como hemos mencionado anteriormente, el discurso matemático escolar se posiciona a sí misma como la epistemología dominante para estudiantes y docentes, discurso cuya estructura no considera los conocimientos personales o los contextos para el aprendizaje de contenidos, y siendo poco significativos al estar tan lejos del cotidiano.

La teoría socioepistemológica propone un rediseño de este discurso matemático, que permita acercar la matemática escolar con el cotidiano, y considere una pluralidad de epistemologías del conocimiento matemático que formen parte de los *Marcos de Referencia* (MR) para su posterior enseñanza y aprendizaje (Gómez, Silva, Cordero y Soto, 2014). Siendo la *resignificación* de objetos matemáticos, lo que nos permita llevar a cabo este objetivo.

Para comprender a lo que se refiere este concepto, debemos entender el concepto de significación, el que Espinoza y Cantoral (2011) definen como “el proceso de adquisición progresiva de significado en contextos específicos” (p. 890). Esto quiere decir que un sujeto estará significando a medida que los objetos, situaciones o conceptos adquieren significados dependiendo del ambiente, las experiencias y conocimientos del sujeto en cuestión, es decir, según su contexto.

Cordero y Flores (2007), citado por Mendoza y Cordero (2018), señalan que “las resignificaciones expresan la transversalidad de usos del conocimiento matemático; es decir, cada escenario compone funcionamientos y formas que debaten con otros funcionamientos y formas generando nuevas resignificaciones” (p. 38-39).

De modo que el entendimiento que tengamos de un concepto matemático, es decir, de su significado “dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción, del empleo de símbolos se personaliza y despersonaliza la apropiación, se significa al objeto”(Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 102), cuestión que no puede ocurrir en la matemática escolar, pues el dME no valida el uso de otras epistemologías para comprender la matemática, ni tampoco el entendimiento del contexto del estudiante.

Considerando los elementos anteriores, la resignificancia se basa en la búsqueda de otorgar nuevos significados a elementos matemáticos, en donde se ponga el foco en el diseño de situaciones de enseñanza que consideren las raíces de la matemática, de la misma forma Camacho-Ríos (2011) se refiere a la resignificación como:

> La acción de dar un nuevo sentido a los conceptos complicados de la matemática escolar, a través de una enseñanza dinámica más organizada en la que se involucren las coyunturas procedimentales que dieron origen y definición a los propios conceptos (p. 159).

Bajo esta misma línea, Mendoza, Cordero, Solís y Gómez (2018), nos entregan otra forma de definir el concepto de resignificación como “la movilidad de los usos y significados del conocimiento matemático en las diferentes situaciones específicas, propias de otros dominios de conocimiento y del cotidiano de la vida” (p. 1229). Estas dos definiciones evidencian algo en común: la resignificación busca dar un nuevo sentido a los conceptos matemáticos por medio del rediseño del discurso matemático escolar, a través de procesos en los que se tengan en cuenta distintas epistemologías donde se considere el cotidiano de los estudiantes.

De la forma en la que la teoría socioepistemológica plantea el concepto de resignificación, se genera una contradicción respecto de lo que plantea el dME, pues se oponen a la matemática educativa establecida en el currículum y a lo que está socialmente establecido como conocimiento matemático. Por este motivo, autores como Gómez, Silva, Cordero y Soto, en el año 2014, plantean la necesidad de “construir un programa académico permanente que permita, tanto a estudiantes como a docentes, generar una variedad epistemológica del dME para afrontar los fenómenos mencionados y así puedan, en el mejor de los casos, *trastocar*[6] el dME” (p. 1457).

Es por ello que el diseño de situaciones de aprendizaje que logren resignificar la noción que se tenga sobre algún objeto matemático, permitirá obtener otra perspectiva epistemológica que pueda ser significativa dentro del cotidiano del estudiante y de paso al desarrollo de un aprendizaje significativo.

2.4. Modelación Matemática

El MINEDUC (2016) plantea la modelación como una habilidad a desarrollar por el estudiante, definido como la construcción de un modelo físico o abstracto que capture características de la realidad para poder ser estudiado. Por ello ha sido tratada como una habilidad que permite la comprensión de los conceptos y conocimientos de cierta disciplina, mediante la inmersión de los contenidos en diversas situaciones reales y conocidas, facilitando su comprensión e integración.

Debido a lo anterior; es vista como una herramienta didáctica que por medio del modelamiento de situaciones reales que contemplen el uso de herramientas matemáticas, permiten comprender su uso dentro de un contexto determinado (Villa, 2007), en donde se involucre a los estudiantes en situaciones reales que permitan emplear múltiples herramientas, con el objetivo de visualizar las diferentes formas de desarrollar una problemática dada. Es por ello que se plantea que “las ecuaciones, las funciones y la geometría cobran un sentido significativo para ellas y ellos” (Ministerio de Educación, 2015, p. 98), limitando la comprensión y significación que pueden desarrollar los estudiantes del objeto matemático; es

[6] Los autores se refieren al concepto de trastocar el dME como un sinónimo de resignificar y rediseñar el dME.

por ello que Huincahue, Borromeo-Ferri y Mena-Lorca (2018) destacan que la modelación es aún más amplia:

> Desde una herramienta didáctica centrada en un objeto matemático, hasta el motor de una construcción social de conocimiento matemático, pero, sin duda, es utilizada para que el aprendizaje se realice a partir de la realidad del estudiante y sea dirigido hacia el conocimiento matemático. (p. 100)

Lo que destaca la importancia de modelar situaciones reales que puedan ser aplicados a contextos diversos de los estudiantes en donde el conocimiento matemático llegue a ser funcional (Morales, Mena-Lorca y González, 2016), pues “en la actualidad solo se muestra el producto, el modelo matemático, y las ideas que sustentan este modelo han desaparecido, sólo quedan expresiones matemáticas sin significado” (Morales, Mena-Lorca y González, 2016, p. 195).

Debido a lo anterior, esta concepción de la modelación utilizada en el currículum, considera a la matemática como predecesora del modelo planteado, esto quiere decir, que la matemática fue desarrollada por sí misma y posteriormente aplicada dentro de un modelo, lo que está totalmente alejado de la realidad, pues el desarrollo de un modelo está íntimamente ligado al desarrollo de la matemática que lo sustenta, visto de otra forma, existe una relación de dependencia entre estas, donde el modelo y la matemática se desarrollan en conjunto y una le da sentido a la otra o viceversa (Morales, Mena-Lorca y González, 2016).

Es aquí donde la Socioepistemología propone una nueva perspectiva, como señalan Morales, Mena-Lorca y González (2016), “la Socioepistemología considera que la matemática no preexiste y que el ser humano la construye en cuanto le es funcional” (p. 195). Pues en ella, la modelación no es vista como un contenido o habilidad a desarrollar (como se señala en el currículum), sino más bien como una práctica social que se “comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares y que al ser ejercida por estudiantes y profesores permite no sólo la resignificación de saberes matemáticos sino también la construcción de conocimiento matemático” (Pezoa y Morales, 2016, p. 57).

La Socioepistemología “considera que la matemática no preexiste y que el ser humano la construye en cuanto le es funcional” (Morales, Mena-Lorca y González, 2016, p. 195). Por lo que se plantea el rediseño del dME en base a los usos del conocimiento matemático, centrando su óptica en el individuo y ver la matemática como una construcción social de conocimiento (Soto y Cantoral, 2014).

Como señala Cordero (2006) citado en Pezoa y Morales (2016), la modelación debe ser considerada como una construcción social del conocimiento que argumente y sustente el modelo matemático en cuestión. Así, Suarez y Cordero (2010) se refieren a esta característica que presenta la modelación en donde se observa que:

> Posee su propia estructura, que está constituida por un sistema dinámico, la simulación puede llevar a cabo realizaciones múltiples y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que propicia el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones. (p. 320).

Bajo la misma línea, (Álvarez, 2013) señala que el discurso matemático escolar no contempla los significados primarios -primitivos- por los que transita el conocimiento para ser comprendido de la forma en que hace en la actualidad. Indicios de esto es lo señalado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) por Chevallard (1991), en donde se pone de manifiesto que no es posible interpretar la matemática escolar sin tener en cuenta la génesis de los conocimientos *saber sabio* y su transformación en un objeto de enseñanza *saber enseñado* por medio de la *transposición didáctica.*

Por lo que podemos concluir que la modelación, desde un punto de vista socioepistemológico, tiene estrecha relación con el entorno sociocultural en el que se desarrolla, ejemplo de ello es el modelo matemático de Fourier, donde se evidencia un fenómeno físico a estudiar que generaba preguntas difícil de responder en la época, que tuvo como consecuencia el desarrollo del constructo teórico que permitiera desarrollar un modelo matemático, considerando el contexto histórico y cultural (Álvarez, 2013). O también la investigación realizada por Suarez y Cordero (2008), en donde se modela una situación de movimiento basada en la teoría socioepistemológica de Modelación-Graficación en donde se resignifica el concepto de variación.

CAPITULO 3: ANÁLISIS HISTORICO-EPISTEMOLOGICO

3.1. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

El origen de los sistemas de ecuaciones lineales es tan extenso como antiguo, las civilizaciones antiguas los utilizaron para resolver problemas que se consideraban como cotidianos como lo son: Distribución de cosechas, cálculo de la órbita de planetas, distribución de riquezas, etc.

En las tablillas de arcilla de la civilización babilónica (2000 a.C.) se encontraron textos matemáticos estrechamente relacionados con problemas cotidianos tales como la agricultura, los repartos de terrenos, trueques, etc. y estos eran resueltos utilizando sistemas de ecuaciones, expresados y resueltos usando lenguaje natural.

Los babilonios denominaban las incógnitas con palabras como “longitud”, “anchura”,” volumen”,” área”, etc. Aun si estos no eran problemas que involucran estas medidas.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica (Colette, J (1986) citado Salazar C., Fuentes N. (2015)) plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\frac{1}{4}\, anchura + longitud = 7\, manos$$

$$anchura + longitud = 10\, manos$$

Para resolverlo comenzaban asignando el valor 5 a una mano y observaban los posibles resultados. Para este caso, observaban que la solución puede ser, anchura = 20 y longitud = 30, y para comprobar si esto era cierto, utilizaban el método que actualmente conocemos como método de eliminación o reducción.

Visto de manera actual, este sistema de ecuaciones se denotaría de la siguiente manera:

$$y + 4x = 28$$

$$y + x = 10$$

Donde efectivamente: $x = 6$ e $y = 4$

El aporte de los babilonios va más allá de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, ya que también fueron los primeros en trabajar en estos de manera formal y los primeros en resolver ecuaciones de segundo grado, tercer y cuarto grado.

En Egipto se comienza desarrollando la aritmética y el álgebra, un ejemplo claro de esto es el Papiro de Rhind, escrito por el escriba Ahmés hacia el 1650 A.C. donde se evidencia el uso de multiplicaciones, números y sus inversos, cuadrados y cubos, y también algunas relaciones numéricas en términos de exponentes y ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones los cuales no necesariamente son lineales como se muestra a continuación:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y = 34x$$

También se presentan múltiples ejercicios que utilizan sistemas de ecuaciones (citado en Alcaraz B. (2006)).

Alrededor del 200 AC los matemáticos chinos realizan importantes avances en la resolución de sistemas de ecuaciones, en particular, sistemas de ecuaciones 3x3 en donde se utilizaban los coeficientes numéricos de las ecuaciones. Se tiene registro de lo anterior en el libro chino Jiu Zhang Suan-shu (Nueve Capítulos sobre las artes matemáticas), el cual fue escrito por Chuan Tsanom (citado en Posada J. (2017)) cerca del año 152 AC.

Al comienzo del capítulo, aparece un problema de la siguiente forma:

"Tres gavillas de buen cereal, dos gavillas de cereal mediocre y una gavilla de cereal malo se venden por 39 dou. Dos gavillas de bueno, tres mediocres y una mala se venden por 34 dou. Y una buena, dos mediocres y tres malas se venden por 26 dou. ¿Cuál es el precio recibido por cada gavilla de buen cereal, cada gavilla de cereal mediocre, y cada gavilla de cereal malo? "

Lo que se representaba de la siguiente manera:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

En donde las ecuaciones y sus respectivos coeficientes están escritos de manera vertical y de derecha a izquierda, diferente a la notación utilizada normalmente en matrices, aquí la primera fila representa los coeficientes de la variable x (de derecha a izquierda), la segunda los coeficientes de la variable y, la tercera los coeficientes de la variable z y en la última se ubican las constantes.

Los griegos por su parte (600 A.C. - 600 D.C.) desarrollaron procedimientos geométricos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, debido a que el sistema numérico que estos tenían era demasiado complejo. Esta también es la razón por la cual también desarrollaron cálculos en lenguaje natural.

Thymaridas (400 A.C.) encontró una fórmula para desarrollar sistemas de ecuaciones llamada “la flor de Thymaridas”. Esta permite resolver sistemas de n ecuaciones con hasta n incógnitas.

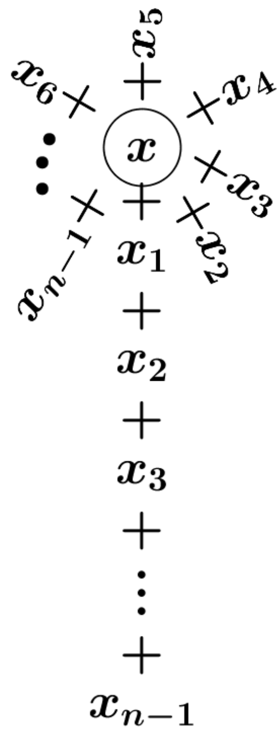


Figura 7: La flor de Thymaridas.
Fuente: Thymaridas de Paros.

Posteriormente, en el siglo III D.C. Diofanto de Alejandría realiza importantes aportes a la evolución de la teoría matemática; pese a que no se tiene mucha información acerca de este personaje, desarrolla La Aritmética, compuesta por una colección de trece libros, de los cuales se conoce el contenido de los primeros seis.

Diofanto reducía ecuaciones de diversos tipos a ecuaciones lineales con las que pudiera trabajar, junto con lo anterior, resolvió sistemas de ecuaciones pese a disponer de sólo un símbolo que representa la cantidad desconocida (incógnita) ya que era la única letra dentro del abecedario a la que no le asignaba un valor.

Ejemplo de esto es el cálculo realizado para hallar dos números x e y cuya suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208.

Diofanto	**Mediante sistemas**
$x \approx 10 + x$	$x + y = 20$

$y \approx 10 - x$ $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$ $100 + 20x + x^2 - 100 - 20x + x^2 = 208$ $200 + 2x^2 = 208$ $2x^2 = 8$ $x^2 = 4$ $x = 2$	$x^2 + y^2 = 208$ Sustituyendo $x = 20 - y$ en la segunda ecuación, $(20 - y)^2 + y^2 = 208$ Nos aparece una ecuación de segundo grado

Hawking presenta algunos problemas seleccionados de la Arithmética con un análisis de la solución desde la mirada de Diofanto. Por ejemplo, el problema 11 del libro 2 enuncia: “Sumar el mismo número (buscado) a dos números dados de modo que cada uno de ellos sea un cuadrado. Números dados 2,3; número buscado x”

Gauss desarrolló un método en el marco del método de mínimos cuadrados, resultando de gran utilidad para resolver múltiples problemas prácticos, como la determinación de las órbitas astronómicas. El procedimiento utilizado para realizar lo anterior es a través de operaciones elementales realizadas a la matriz ampliada hasta lograr reducir la matriz hasta una equivalente por renglones (en la cual bajo la diagonal solo encontramos ceros). Así, se realiza una sustitución hacia atrás para encontrar el conjunto de soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + -1x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ \qquad x_2 + -2x_3 + 2x_4 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 + -1x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 2 \end{cases}$$

En el sistema se conoce el valor de x_4 , el cual se sustituye en la ecuación anterior para conocer el valor de x_3, el cual nuevamente se sustituye en la ecuación anterior, determinando la solución general del sistema planteado.

Como se puede apreciar, históricamente las ecuaciones y posteriormente sistemas de ecuación formados, fueron originados a partir de problemas cotidianos de la época, lo que posteriormente se fue deformando hasta llegar a ser lo que conocemos hoy en día.

Actualmente estos sistemas están representados como lo señala Arce (2003) en su libro “Algebra Lineal”, donde se expresa de forma general cualquier sistema de ecuaciones a partir de un conjunto de ecuaciones, cada una de las cuales restringe los valores que pueden asumir m

variables o incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_m$ representan un sistema de ecuaciones, cuando nos interesamos por los *n-étuplos* $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones, entendiéndose como ecuación lineal si es de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b$$

En donde se define un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

Donde los números a_{ij} y b_i son conocidos. El símbolo a_{ij} denota el coeficiente en la ecuación i asociado a la variable j.

Además, las soluciones del presente sistema de *n* ecuaciones lineales con m incógnitas, posee una solución *m-étuplo* $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, sí satisface cada una de las *m* ecuaciones, de tal forma que el conjunto de soluciones posibles del sistema es denominado S.

3.2. Poleas.

El origen de las poleas no se atribuye a una persona en particular y se conocen diversas historias acerca de su aplicación en la antigüedad, una de ellas es señalada por Plutarco quien relata que el rey Herón construyó un lujoso barco que pesaba varias toneladas y desafió a Arquímedes para que lo llevara al agua, cuenta la historia que para ello utilizó un sistema de poleas y logró su cometido sin la ayuda de un solo hombre (Strathem, 1999).

Existen diferentes tipos de poleas, en primer lugar, podemos encontrar la polea fija, la cual es una máquina simple que está constituida por una rueda que gira alrededor de un eje fijo, la cual posee una hendidura por la que pasa una cuerda que permite elevar un objeto. En segundo lugar, encontramos la polea móvil en la que se multiplica la fuerza realizada (debido a la posición de la polea), permitiendo elevar objetos de mayor masa. Por último, podemos encontrar una mezcla entre las poleas móviles y fijas llamadas aparejos, los cuales permiten elevar objetos más pesados, dependiendo de la cantidad de poleas fijas y móviles que compongan el sistema (Cristi, 2003).

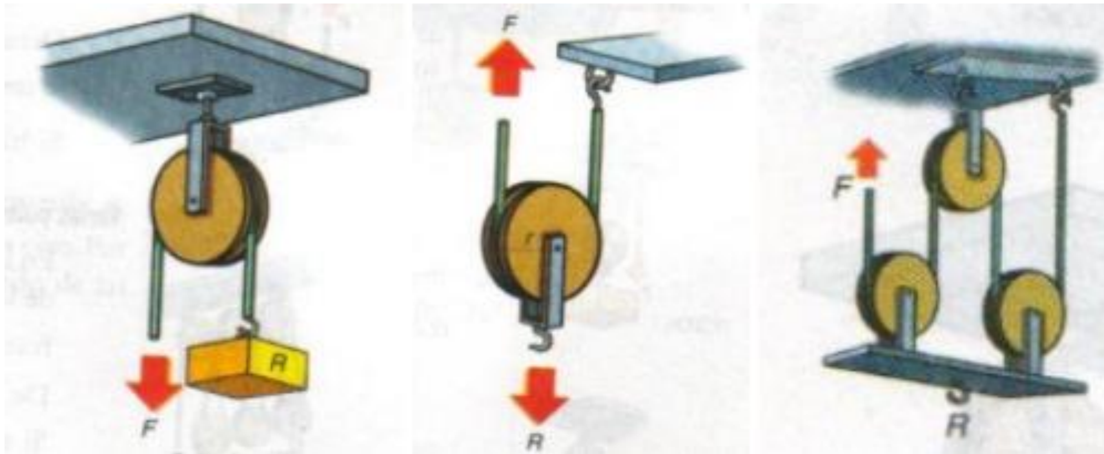


Figura 8: Ejemplos de Poleas.
Fuente: Cristi I. (2003), Sobre palancas, poleas y garrucha.

De esta forma, Cristi (2003) señala que la polea simple permite aplicar la misma fuerza necesaria para levantar una resistencia $F = R$, pero desde una posición más cómoda: por ejemplo, cuando se utiliza como una roldana para subir el agua desde un pozo o un balde con mezcla en un edificio en construcción. En caso de las poleas móviles, la fuerza aplicada es la mitad de la realizada para levantar un objeto de igual masa que en la polea simple ($F = \frac{R}{2}$). Por último, los aparejos permiten reducir la fuerza aplicada en levantar un objeto de manera proporcional a la cantidad de poleas utilizadas dentro del sistema, expresándose mediante la fórmula $F = \frac{R}{n}$

Así, podemos encontrar poleas simples y compuestas en diferentes situaciones de nuestra vida cotidiana como lo son ascensores, construcción, alzar un balde de agua de un pozo, grúas, máquinas de ejercicio, etc. Las cuales están relacionadas a objetos matemáticos, en el caso de las poleas podemos encontrar ecuaciones, las cuales son descritas y formadas por medio de las leyes de Newton que lograron describir el movimiento de los cuerpos.

En particular, una de las leyes que logra determinar la aceleración de los cuerpos en los que se aplica una fuerza neta distinta de cero es la segunda ley de Newton enunciada como: "**El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime**".

En palabras simples, esto quiere decir que la aceleración que experimenta un cuerpo es proporcional a la fuerza que se imprime sobre él, independiente de si sea constante o variable.

Esto se traduce en un cambio en el movimiento de un cuerpo, adquiriendo velocidad y por ende aceleración.

En el trabajo desarrollado por George Atwood (1745-1807) denominado A Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies (publicado por Cambridge University Press en 1784), se detalla una máquina conocida actualmente como "máquina de Atwood" que es utilizada para demostrar las leyes del movimiento uniformemente acelerado debido a la gravedad. Esta máquina cuenta con dos bloques de masas $M_1 \; y \; M_2$, los cuales están conectados mediante una cuerda y una polea.

Figura 9: Máquina de Atwood.
Fuente: Recuperado el 15 del 07 del 2021 de:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Diagrams/Atwood_machine/

Como se menciona en el libro desarrollado por George Atwood, el objetivo de este aparato es obtener un movimiento que tenga una aceleración constante que puede ser manipulado dependiendo de la masa de los cuerpos $M_1 \; y \; M_2$, el cual fue utilizado para demostrar las leyes de Newton relacionadas al movimiento uniformemente acelerado debido a la gravedad.

A continuación, se desarrolla el diagrama de cuerpo libre y las fuerzas involucradas en la máquina de Atwood tomando como referencia el libro Mecánica Clásica elaborado por los autores Fabián Cádiz, Samuel A. Hevia, Sebastián A. Reyes, de la Pontífice Universidad Católica de Chile.

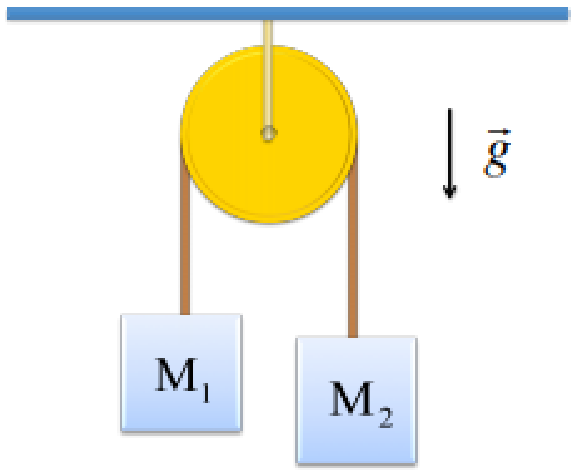


Figura 10: Diagrama de la Maquina de Atwood.
Fuente: Cádiz F., Hevia S., Reyes S. (2013), "Mecánica Clásica".

Actualmente, esta demostración es desarrollada a partir de DCLs para ambas masas que cuelgan de cada uno de los extremos de la cuerda que atraviesa la polea, elementos que tienen algunas características que permiten mantener la aceleración constante: la polea es una *polea ideal,* por lo que no tiene roce y su masa es despreciable, así como también el cable es inextensible.

A partir de los diagramas de cuerpo libre para cada masa (véase figura 11) y aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento de ambos bloques, se tiene:

$$T - M_1 g = M_1 a \qquad\qquad M_2 g - T = M_2 a$$

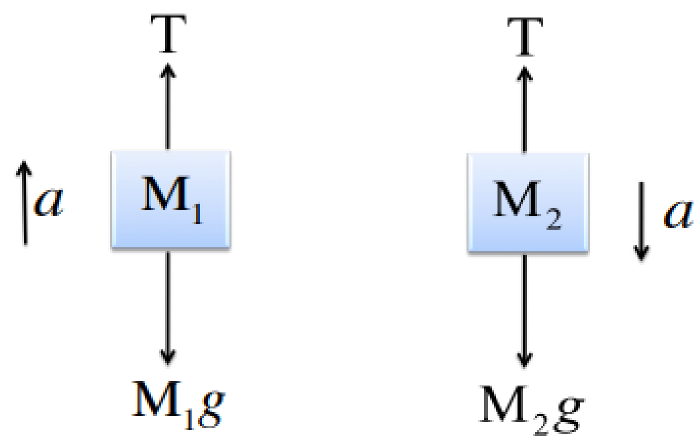


Figura 11: Diagrama de los cuerpos en una Maquina de Atwood.
Fuente: Cádiz F., Hevia S., Reyes S. (2013), "Mecánica Clásica".

Formándose dos ecuaciones que se pueden resolver a través del planteamiento de un sistema de ecuaciones y reduciendo la tensión generada en la cuerda, obteniendo así una expresión para la aceleración del sistema y la tensión provocada.

$$a = \frac{(M_1 - M_2)g}{M_1 + M_2}$$

De esta forma, tras mostrar los diagramas de cuerpo libre y utilizar la segunda ley de Newton se puede evidenciar la existencia de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que nos permite calcular la aceleración que experimenta un cuerpo en el seno de un fluido; por lo que para lograr plantear nuestra situación de aprendizaje consideramos la profunda relación que existe entre la segunda ley de Newton y el planteamiento de ecuaciones que describen el movimiento de uno o varios cuerpos, de la cual se deriva un sistema de ecuaciones -de manera natural- que permita otorgar un significado a este objeto matemático desarrollado fuera de contexto en la sala de clases.

A partir de este sistema de poleas y los elementos presentes en la teoría socioepistemológica que permiten rediseñar el discurso matemático escolar, se buscará mantener los elementos físicos y matemáticos descritos anteriormente y plantearlos como una situación de aprendizaje que pueda ser llevada a la sala de clases, permitiendo así construir un sistema de ecuaciones que resignifique la noción que tengan los estudiantes acerca de los sistemas de ecuaciones lineales desde una situación física.

CAPITULO 4: MARCO METODOLÓGICO

En esta sección se desarrolla y detalla la metodología que utilizaremos para la implementación de nuestra situación de aprendizaje, la cual presenta un enfoque cualitativo, centrada en resignificar la noción de sistemas de ecuaciones. Se describirán el procedimiento para el análisis de datos y justificar nuestra investigación.

4.1. Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica nace como una metodología en educación matemática desarrollada en los años ochenta en la escuela francesa. Originalmente estaba enfocada en sistematizar la información obtenida por medio de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) y la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991, citado por Faria, 2008), la cual es utilizada hoy en día para sustentar de manera metodológica el desarrollo de investigaciones basadas en diferentes marcos teóricos que contemplen el desarrollo, elaboración e implementación de situaciones de aprendizaje.

Chevallard (1982) citado en Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) se refiere al problema que atiende la ingeniería didáctica, relacionando "el desarrollo actual y el porvenir de la didáctica de las matemáticas, el problema de la acción y de los medios para la acción, sobre el sistema de enseñanza" (p. 28). Asimismo, como señala Douady (1996) citado en De Faria (2008), la ingeniería didáctica "designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos" (p. 241).

De esta forma, la Ingeniería didáctica tiene una función como metodología de investigación y también como producciones de enseñanza aprendizaje (De Faria, 2008), de las cuales nos centraremos en ella como metodología de investigación, la que se encuentra constituida por las cuatro fases señaladas a continuación:

- Análisis preliminar
- Concepción y análisis a priori
- Experimentación
- A posteriori y evaluación

Las cuales permiten sistematizar la información recopilada y “la confrontación entre los análisis a priori sobre los diseños de actividades de aula y los análisis a posteriori sobre los corpus que se producen en la implementación de las tareas” (Calderón y León, 2012, p. 74).

4.1.1 Análisis Preliminar:

En esta fase, se realiza el análisis de diversos aspectos teóricos didácticos generales y específicos del campo de estudio que puedan ser influyentes en la elaboración de la situación (Ríos, 2007), entre los que destacan:

- El *análisis epistemológico de los contenidos involucrados*, es decir, el estudio de las raíces del saber, su historia, propiedades, etc.
- El *análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos*, el cómo se enseñan los contenidos según los libros entregados por el ministerio.
- El *análisis al grupo de estudio* que relaciona el contexto en el que están inmerso el grupo de estudio, las habilidades que estos manejan y las que deberían manejar, las experiencias vividas, etc.
- El *análisis del campo de restricciones*, es decir, las condiciones bajo las cuales se realizará la implementación de la situación didáctica.

Estos análisis mantienen su carácter de “preliminares” en un primer nivel de elaboración, siendo fundamentales para la realización y posterior análisis de resultados, los cuales no siempre se visualizan en el resultado final de la situación (Artigue, et al. 1995).

4.1.2. Concepción y análisis a priori

Es el análisis realizado antes de la clase, donde el diseñador de la situación didáctica explica los supuestos relacionados con los procesos de enseñanza aprendizaje que podría generar la situación planteada y los resultados deseables en base a su implementación (Ríos, 2007).

Artigue, et al (1995) se refiere a este como un *“análisis de control de significado”* (p. 44), relacionado con el actuar frente a un número de variables del sistema didáctico denominadas como variables macro-didácticas (globales) y micro-didácticas (locales), las cuales pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico, pero a nivel micro-didáctico, se observan las variables relacionadas con la organización y la gestión de la secuencia de clase.

En nuestro caso particular, podemos definir las siguientes variables:

- A nivel macro-variable: Se consideran los elementos presentes en los documentos curriculares de primero medio, sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y poleas.
- A nivel micro-variable: Se consideran los elementos relacionados con las macro-variables como lo son las incógnitas, leyes de Newton, fuerzas, ecuaciones, etc.

Posteriormente se presentarán las variables para realizar un análisis descriptivo y predictivo, centrado en “las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los alumnos” (Artigue, et al. 1995), la que se realizará mediante la siguiente tabla:

Tabla 4-I: Análisis de las preguntas de la propuesta.

Pregunta	Estrategia Esperada	Respuesta Esperada	Dificultades

Se muestran las preguntas elaboradas dentro de nuestra propuesta, las posibles estrategias que pueden utilizar los estudiantes para dar respuesta a la pregunta, posteriormente las respuestas a las que deberían llegar los estudiantes durante la implementación y las dificultades que podrían enfrentar en algún momento del desarrollo de la situación.

4.1.3. Experimentación

Se refiere al momento en el cual se llevará a cabo la implementación de la situación de aprendizaje en un grupo de estudiantes. De Faria (2008) identifica los siguientes pasos:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

4.1.4. A posteriori y evaluación

La última fase corresponde al análisis a posteriori y a la evaluación que se realizará en base a la recolección de datos de la experimentación, las observaciones respecto a las secuencias de enseñanza y las respuestas entregadas por los estudiantes durante el experimento.

Para ello se ilustrarán las respuestas entregadas por los estudiantes durante la experimentación, separándolas por los momentos desarrollados y comparándolas con las respuestas esperadas hechas en el análisis a priori, clasificándolas como las respuestas que coincidan con las esperadas y las que no, mencionando las posibles dificultades, mediante la siguiente tabla:

Tabla 4-II: Resumen de respuestas entregadas por los estudiantes.

Pregunta	Respuesta esperada	Respuesta no esperada	Dificultad

Finalmente, se realizará un análisis de la pregunta que permite cerrar la situación de aprendizaje, orientada a identificar como se resignifica la noción de sistemas de ecuaciones y si es posible encontrar estos en otros objetos concretos, de esta forma se podrá dar respuesta a la pregunta de investigación planteada en el capítulo 1.

CAPITULO 5: DISEÑO Y ANÁLISIS

En este apartado se busca explicar y justificar cada una de las preguntas introducidas en la situación de aprendizaje (véase Anexo D. Situación de aprendizaje.), las cuales se encuentran relacionadas con las micro y macro variables definidas en el capítulo anterior, por lo que se busca a partir de un contenido físico relacionado con un objeto concreto, se pueda robustecer un conocimiento matemático desarrollado de manera mecánica dentro de la sala de clases.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de la implementación de la situación de aprendizaje es resignificar la noción de sistemas de ecuaciones por medio de poleas, para ello se organizó la actividad con base en un video y dos momentos. En una primera instancia el video permitirá introducir la actividad, realizando una breve explicación acerca de algunos elementos físicos involucrados como lo son: diagrama de cuerpo libre, leyes de Newton y fuerzas (tensión y peso), permitiendo formular ecuaciones que expliquen el movimiento de los cuerpos.

Luego de lo anterior, se desarrolla la actividad con base en dos momentos, el primero relacionado al video, que permite determinar el grado de comprensión de los estudiantes acerca de estos elementos, permitiendo reflexionar y extraer conclusiones del diagrama de cuerpo libre y ecuaciones planteadas.

En el segundo momento se presenta una situación relacionada con poleas, donde los estudiantes deben lograr identificar ecuaciones para cada uno de los objetos suspendidos, el movimiento del sistema y posteriormente la formulación de un sistema de ecuaciones que les permita obtener la aceleración del sistema.

5.1. Análisis preliminar

Este análisis preliminar considera los aspectos señalados dentro de la ingeniería didáctica tratada en el capítulo anterior que en nuestro caso contempla tres de los cuatro aspectos: análisis epistemológico, análisis de la enseñanza tradicional y análisis del campo de restricciones.

El análisis epistemológico contempla el análisis de los sistemas de ecuaciones y las poleas, observando el origen de estos saberes y su evolución a lo largo de la historia, desarrollado en el capítulo 3 de esta investigación.

El análisis de la enseñanza tradicional es desarrollado en el capítulo 1 dentro del apartado de antecedentes sección 2, donde se muestra y analiza el contenido de sistemas de ecuaciones y como este es tratado en documentos curriculares como lo son los planes y programas y el texto del estudiante entregado por el ministerio de educación chileno.

Por último, en el capítulo 1, dentro del apartado de limitaciones, se evidencia el análisis del campo de restricciones en donde se mencionan las limitaciones y dificultades que presentes en el desarrollo de esta investigación, aludiendo al contexto en el que nos vemos inmersos al momento de realizar la implementación de la situación de aprendizaje.

La elaboración de la situación de aprendizaje toma en cuenta los elementos descritos anteriormente y considera la presentación de un video relacionado con los elementos involucrados en el planteamiento de ecuaciones como lo son las fuerzas, diagramas de cuerpo libre y leyes de Newton (en particular, la primera y segunda ley de Newton).

Luego de la presentación del video se pretende dar un espacio para responder dudas y dar énfasis a algunas cosas importantes como lo es la relación que existe entre la fuerza neta igual a la masa multiplicada por la aceleración.

Para poder guiar un poco esta situación, se planeó desarrollar los siguientes temas:

Reflexionado en torno al video:

- ¿Cuáles son las Magnitudes mencionadas en el video?
- ¿Cuáles son las Fuerzas mencionadas en el video?
- ¿Cómo podemos escribir la suma de todas las fuerzas?
- ¿Dónde podemos representar las fuerzas que interactúan en un cuerpo?

Luego de que los estudiantes tengan claro cada uno de los elementos anteriores, es pertinente continuar con la siguiente etapa de la actividad.

Primer Momento:

En este primer momento se busca robustecer las reflexiones realizadas en torno al video y comprender las fuerzas involucradas en un cuerpo en equilibrio, la dirección y el sentido de las fuerzas y las posibles ecuaciones que se pueden formular considerando la segunda ley de Newton.

Planteamiento:

Actividad

1. A través del diagrama de cuerpo libre planteado en el video, responda las siguientes preguntas:

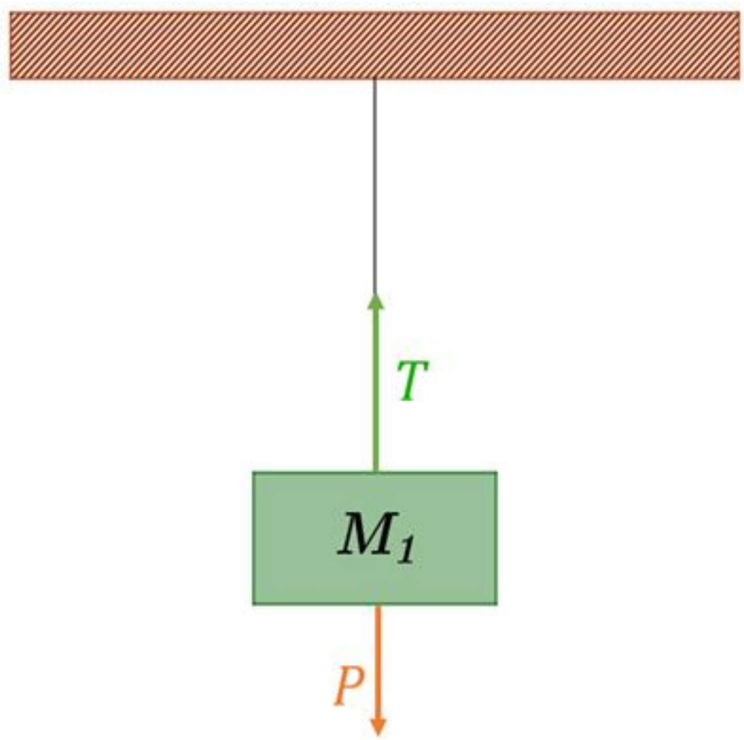


Figura 12: D.C.L. de un cuerpo suspendido de masa M_1.
Fuente: Elaboración Propia, Situación de Aprendizaje 2021

Pregunta	Objetivo

Utilizando la segunda ley de Newton ¿Qué ecuación podemos formular?	Formular una ecuación que describa el movimiento del cuerpo.
¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?	Identificar los elementos presentados en la ecuación e interpretarlos para lograr describir el movimiento del cuerpo, es por este motivo que se debe dar énfasis al significado que adquiere la ecuación cuando la aceleración es cero o distinta de cero.

Segundo Momento:

En este segundo momento se observan dos cuerpos de masas $m \; y \; M$, los cuales se encuentran colgando a través de una polea ideal y un cable inextensible; el objetivo de esta actividad es que los estudiantes poco a poco puedan comprender el sistema físico planteado y a partir de los conocimientos previos y las nuevas relaciones presentadas, se logren formar ecuaciones (por medio de la segunda ley de Newton) y posteriormente sistemas de ecuaciones.

Planteamiento:

Contexto: Ariel está realizando un experimento para medir la aceleración de las masas $m \; y \; M$ tal como se muestra en el siguiente diagrama. Considere que la polea es una polea ideal (sin roce y masa despreciable) y el cable es inextensible.

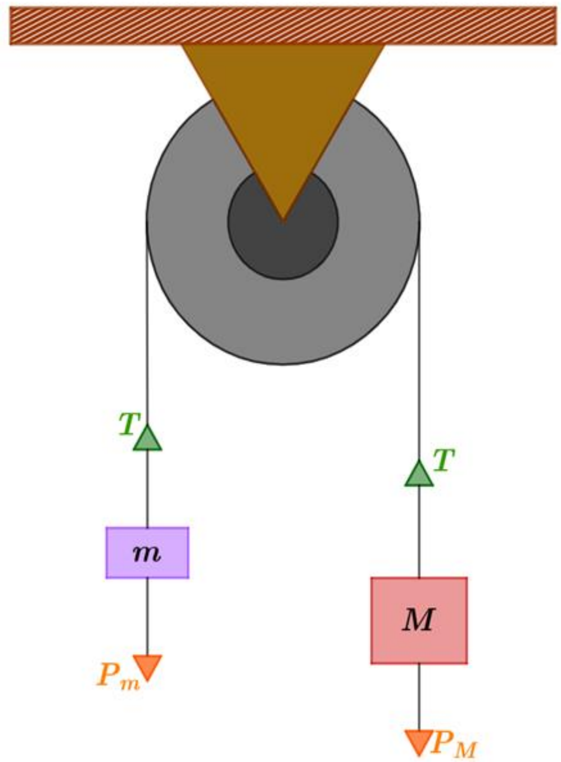


Figura 13: D.C.L. de una polea.
Fuente: Elaboración Propia, Situación de Aprendizaje 2021

Pregunta	Objetivo
Si M tiene mayor masa que m, ¿Qué ocurre con el sistema?	Comprender que, si las masas tienen diferente magnitud, entonces no existirá equilibrio entre los cuerpos, por lo que se concluirá que existe movimiento hacia el lado que tenga una mayor masa.
Con base en la respuesta obtenida en (b), ¿Cuál objeto tira del otro?	Identificar el objeto que "tira" de los demás y permita el movimiento de los cuerpos, en primera instancia descienda el más pesado y se pueda caracterizar este movimiento, además, que logren identificar la mayor fuerza (peso de M), permitirá

	comprender con mayor facilidad la fuerza neta aplicada a cada cuerpo.
Observando el diagrama, plantee ecuaciones que permitan encontrar la aceleración del sistema. Utilice la segunda ley de Newton ($F_n = m \cdot a$).	Describir el movimiento del sistema a partir de la segunda ley de Newton, para ello los estudiantes necesitan reconocer las fuerzas involucradas (vistas en el video) y tener en cuenta el movimiento y sentido en el que se desliza el sistema. De esta forma los estudiantes serán capaces de advertir el movimiento y lograr plantear ecuaciones que describan el movimiento de cada cuerpo de manera individual.
¿Es posible plantear las ecuaciones como un sistema? Argumente.	Reflexionar acerca de las ecuaciones planteadas, relacionar las variables e identificar los elementos comunes entre ellas, además de los motivos por los cuales son comunes.
¿El sistema tiene solución desde el punto de vista físico?	Relacionar la matemática existente con la física y el contexto en el que se desarrolla la situación, de tal forma de dar un sentido a las variables e identificar un rango entre los posibles valores que podrían tomar cada una de las variables.
¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente.	Relacionar la reducción de la tensión con el movimiento del sistema a partir de la segunda ley de Newton. Además, la reducción se explica debido a que en el sistema ambos cuerpos comparten una misma cuerda, por lo que la tensión en cualquier extremo de esta es la misma. a) Juego de tirar la cuerda b) Autos tirando uno del otro

	c) Diagrama sin la polea mostrando el sistema de forma vertical.
Desde un punto de vista físico, ¿Qué significa que la tensión tenga signos distintos?	Identificar el movimiento que existe y comprender que la diferencia en los signos de ambas ecuaciones se debe al movimiento del sistema y que este movimiento tenga sentidos distintos en cada uno de los objetos, pues mientras uno sube el otro baja.

Supongamos:

En este apartado se realizan preguntas enfocadas en comprender qué es lo que ocurriría en una situación alternativa y consolidar los conocimientos desarrollados en la actividad 2.

Pregunta	Objetivo
¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.	Comprender la caída libre de los objetos y modificar las ecuaciones planteadas para formular conclusiones al respecto.
¿Qué ocurre sí $M = m$? Fundamente.	Identificar el estado de equilibrio de ambos cuerpos, además de modificar las ecuaciones y realizar conclusiones al respecto.

El presente instrumento fue validado por **N**icolás Piña Vergara, Licenciado en ciencias exactas, Profesor de Matemática y física y Magister en didáctica de la Matemática. Profesor instructor de Lic. En astronomía, Universidad Central de Chile. El cual cuenta con conocimientos tanto del área física como matemática para su posterior implementación (véase Anexo E. Carta enviada a expertos, Experto 1)

5.2. Análisis a priori

En el siguiente apartado se presenta la Tabla I en donde se muestra el análisis a priori de la situación de aprendizaje, presentando un análisis de las preguntas de la propuesta, considerando elementos como: estrategia esperada, respuesta esperada y dificultades que pueda tener el estudiante al momento de desarrollar las preguntas de la propuesta.

5.2.1. Primer Momento

Pregunta	Estrategia Esperada	Respuesta Esperada	Dificultad
Utilizando la segunda ley de Newton ¿Qué ecuación podemos formular?	Con base en el desarrollo y comentarios acerca del video, se espera que los estudiantes utilicen la segunda ley de Newton y logren plantear ecuaciones que describan el movimiento del sistema.	Aplicando la segunda ley de Newton: $$F_n = m \cdot a$$ Los estudiantes deberán observar el diagrama y observar que las fuerzas que influyen son la tensión (T) y el peso (P), luego, al reemplazar dentro de la F_n tendrán: $$T - P = m \cdot a$$ Luego, deberán recordar lo mencionado en el video, pues el candelabro se encuentra en equilibrio, por lo que no habrá aceleración, es decir:	La dificultad de esta pregunta radica en que los estudiantes no identifiquen el equilibrio del sistema, además pueden confundir las fuerzas con las magnitudes y plantear una ecuación errónea.

		$$T - P = m \cdot 0$$ $$T - P = 0$$ Por lo que los estudiantes pueden plantear: $$F_n = 0$$ $$T - P = 0$$	
¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?	Los estudiantes observarán la ecuación obtenida en la pregunta anterior y con ella lograrán relacionar la fuerza neta del sistema con el movimiento del cuerpo, comprendiendo que una fuerza neta nula implica equilibrio.	Considerando las ecuaciones planteadas: $$F_n = 0$$ $$T - P = 0$$ Los estudiantes podrán despejar el peso y concluir que: $$T = P$$ De lo anterior se concluye y justifica el estado de equilibrio del cuerpo, por lo que la aceleración es nula.	En esta pregunta puede existir dificultad al momento de analizar la ecuación planteada y confundan las fuerzas con magnitudes y concluyan que cada fuerza es igual a cero.

5.2.2. Segundo Momento

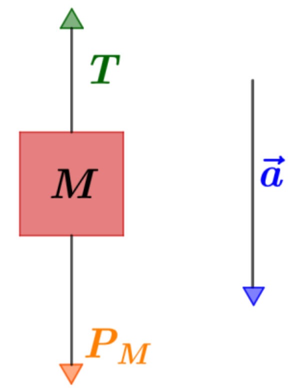
Pregunta	Estrategia Esperada	Respuesta Esperada	Dificultad

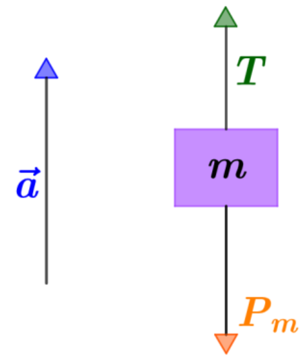
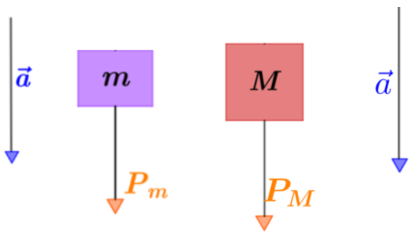
Si M tiene mayor masa que m, ¿Qué ocurre con el sistema?	Se espera que los estudiantes observen el diagrama presentado en la actividad y logren identificar ambos cuerpos, el de masa $m\ y\ M$. Con base en esto, determinarán si el sistema se mantiene en equilibrio o si tiene movimiento.	Haciendo uso del DCL y la información de la pregunta: $$M > m$$ Los estudiantes podrán concluir que no existe un estado de equilibrio, pues las masas tienen magnitudes distintas, por lo que la aceleración del sistema será un número distinto de cero.	La dificultad de esta pregunta radica en identificar las masas en el diagrama y que comprendan que, si una masa tiene mayor magnitud, existirá movimiento.
Con base a la respuesta obtenida en (a), ¿Cuál objeto tira del otro?, ¿Cuál tira con mayor fuerza?	Esta pregunta está ligada a la anterior, los estudiantes observarán el diagrama y su respuesta en la pregunta anterior, con lo que podrán identificar qué objeto tira de cual.	Considerando lo expuesto en la pregunta anterior, los estudiantes podrán concluir que como $M > m$, el objeto de mayor masa (M) tira del de menor masa (m), y además que el de menor masa (m) tira del objeto de mayor masa (M). De esta forma podrán asegurar que al considerar el sentido en el que se desliza el sistema, el objeto de masa M tira con mayor fuerza del objeto de masa m.	En un principio pueden confundir las magnitudes de los cuerpos y confundir el sentido en el que se desliza el sistema. Por otra parte, pueden creer que solo un objeto tira del otro, cuando cada uno tira del otro de manera simultánea.
Observando el diagrama, plantee ecuaciones que permitan encontrar la aceleración del sistema. Utilice la	Esta pregunta está ligada a las dos anteriores, observando la situación de los cuerpos en las preguntas	Con base en las respuestas entregadas en las preguntas anteriores, y aplicando la segunda ley de Newton, los estudiantes	En esta pregunta pueden existir múltiples dificultades, existiendo la posibilidad de que los estudiantes:

segunda ley de Newton ($F_n = m \cdot a$).	anteriores y planteando un DCL, aplicarán la segunda ley de Newton para formar ecuaciones que describan el movimiento.	deberán plantear dos diagramas de cuerpo libre, uno para cada cuerpo. En cada diagrama se deben evidenciar las fuerzas y el movimiento de cada uno de los cuerpos, luego, tomando en consideración la actividad desarrollada en el primer momento, se podrán plantear dos ecuaciones que describan este movimiento. Por una parte, en el objeto de masa M: $$T - P = M \cdot a$$ Y en el objeto de masa m: $$P - T = m \cdot a$$	• Intenten formular una sola ecuación que describa el movimiento de todo el sistema. • Elaboren dos ecuaciones que sean iguales pensando en que ambos cuerpos bajan. • No identifiquen la fuerza de mayor magnitud que provoque el movimiento de cada cuerpo. • Mezclen fuerzas y magnitudes (masa y aceleración) en dos ecuaciones. • No identifiquen todas las fuerzas presentes en cada cuerpo y de qué forma se comportan para elaborar cada ecuación. • Confundan el estado de movimiento del cuerpo. • Utilicen otra ecuación que permita encontrar la aceleración de un cuerpo (a=velocidad/tiempo).

			• Escriban la tensión con el mismo signo ya que apuntan en la misma dirección.
¿Es posible plantear las ecuaciones como un sistema? ¿Cuáles serían sus incógnitas? Argumente.	El estudiante deberá encontrar la justificación para relacionar las dos ecuaciones anteriores en un sistema, las variables y de esta forma concluir si es posible plantear un sistema de ecuaciones.	Para poder plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es necesario tener dos ecuaciones con dos incógnitas cada una. Teniendo en consideración esto, los estudiantes deberán identificar las incógnitas que existen en el sistema y los valores conocidos (coeficientes). En el DCL se evidencia la masa de los cuerpos, por lo que se conocen las masas $M\ y\ m$ de ambas ecuaciones y por ende el peso de cada cuerpo P_M y P_m. De esta forma, las incógnitas del sistema planteado serían la tensión y la aceleración, de donde se desprende un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.	Dentro de esta pregunta pueden existir múltiples dificultades, existiendo la posibilidad de que los estudiantes: • No identifiquen las variables y constantes. • Crean que todos los elementos son constantes. • Crean que todos los elementos mostrados en las ecuaciones son incógnitas. • No identifiquen la relación que existe entre las dos ecuaciones. • No relacionan la masa con el peso que ejerce el cuerpo.

¿El sistema tiene solución desde el punto de vista físico?	El estudiante debe hacer uso de los conocimientos físicos involucrados en la situación para reflexionar acerca del movimiento y concluir si es posible determinar el resultado.	Tomando en consideración el sistema planteado y teniendo en cuenta cuales son las incógnitas y constantes, es posible determinar la aceleración que describa el movimiento del sistema, con lo que se podrá determinar la tensión. De esta forma, al determinar la aceleración y tensión del sistema, podemos concluir que tiene solución desde un punto de vista físico.	Esta pregunta puede presentar variedad de problemas: Los estudiantes pueden concluir que el sistema no tiene solución. Pueden responder esta pregunta haciendo uso de una explicación matemática, como lo son los tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones (reducción, igualación y sustitución). Los estudiantes pueden creer que a través de la fórmula de a=v/t, se puede determinar la aceleración del sistema. Los estudiantes pueden creer que como en el momento 1, la tensión de la cuerda es igual a la fuerza peso de los cuerpos.
¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente	Con base a las respuestas anteriores, se espera que los estudiantes observen el diagrama, analicen las ecuaciones y comprendan que en el sistema hay solo una cuerda que sostiene a los dos cuerpos, pero describe	En cada ecuación podemos evidenciar un comportamiento distinto de la tensión, lo que se evidencia con signos distintos en cada una de ellas. Además, como es un elemento común en ambas, es posible realizar la reducción.	Es posible que los estudiantes confundan el sentido en el que se desliza el sistema y por ello no identifiquen el movimiento del cuerpo haciendo que se crea erróneamente que la tensión tiene signo distinto en cada ecuación.

	movimientos distintos para cada cuerpo.		También es posible que los estudiantes piensen que la tensión es distinta para cada uno de los cuerpos y que no sea posible reducir la tensión.
Desde un punto de vista físico, ¿Qué significa que la tensión tenga signos distintos?	Se encuentra ligada a la pregunta anterior y los estudiantes deberán observar el DCL y el movimiento de cada cuerpo para comprender que el signo de la tensión está asociado al movimiento de cada cuerpo.	Utilizando el DCL planteado en la pregunta c, es posible evidenciar el movimiento de cada cuerpo, lo que está asociado al signo que posee la tensión en cada una de las ecuaciones. En el DCL del cuerpo de masa M:  La tensión se opone a la caída del cuerpo, por lo que esta tiene signo negativo.	La dificultad de esta pregunta radica en la formulación de las ecuaciones y cómo se relaciona la tensión dentro del sistema. De esta forma, los estudiantes pueden identificar el movimiento, pero creer que tiene el mismo signo ya que apunta hacia arriba o también creer que el sentido en el que se mueve el sistema no influye en el signo de la tensión. Por otra parte, se puede creer que el signo de la tensión depende del peso de los cuerpos.

		En el DCL del cuerpo de masa m:  La tensión tira del cuerpo hacia arriba debido a que su magnitud es mayor, por lo que en esta ecuación tiene signo positivo.	
¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.	Los estudiantes utilizarán la lógica y lo justificarán a través de la segunda ley de Newton para comprender qué fuerza se elimina al cortar la cuerda.	Al cortar la cuerda se elimina la fuerza de tensión presente en el sistema.  	En esta pregunta los estudiantes pueden creer que se mantienen todas las fuerzas y que la misma ecuación describe el movimiento de cada cuerpo. Por otra parte, es posible que los estudiantes no asocien la caída del cuerpo con una caída libre y olviden la relación existente con la aceleración de gravedad.

		Por lo que al representar esto a través de las ecuaciones se tendría: $$P = M \cdot g$$ $$P = m \cdot g$$ Por lo que se puede concluir que al cortar la cuerda los cuerpos caen con la aceleración de gravedad.	Además, es posible que los estudiantes crean que cada cuerpo cae con una aceleración diferente a la del otro.
¿Qué ocurre si $M = m$? Fundamente.	Similar a la pregunta anterior, los estudiantes deberán reflexionar de acuerdo a la situación planteada, recordando los conceptos tratados en el momento uno.	Dado que ambos cuerpos tendrán la misma masa, se tendría un caso similar al evidenciado en el primer momento, pero con dos ecuaciones. $$T - P_m = 0$$ $$P_M - T = 0$$ De donde se puede concluir que para ambas ecuaciones el peso es igual a la tensión, por lo que existe un estado de equilibrio.	La dificultad de esta pregunta radica en identificar el equilibrio del sistema, es por ello que los estudiantes pueden creer que al existir dos ecuaciones (independiente de las masas), aún describan el movimiento de los cuerpos con una aceleración distinta de cero.

5.3. Experimentación

A continuación, se presentarán las tres implementaciones realizadas de nuestra situación de aprendizaje, la forma en la que se llevaron a cabo y las dificultades que surgieron antes y durante la implementación. Además, se describen cada uno de los grupos de estudiantes que participaron en nuestra actividad y el grado de conocimiento de los elementos físicos y matemáticos relacionados.

Cada una de las implementaciones nos permitió pulir más la forma en la que se llevaba a cabo la situación de aprendizaje, logrando que nos acercáramos cada vez más a nuestro objetivo.

5.3.1. Primera Implementación

La primera implementación de la situación de aprendizaje se desarrolló en un colegio particular subvencionado ubicado en la comuna de Pudahuel. El nivel en el que se desarrolló esta actividad fue el cuarto medio A, a cargo de la profesora HCM, encargada de validar nuestra situación de aprendizaje (véase Anexo E. Carta enviada a expertos, Experto 2).

Cabe mencionar que los profesores de este colegio deben asistir presencialmente al establecimiento y desde éste realizar la conexión a sus clases online, lo que también fue exigido a nosotros, por lo que la implementación se realizó desde el establecimiento educacional, en donde se nos facilitó el correo institucional del jefe de unidad técnico-pedagógica, resultando en una dificultad, ya que no contábamos con todos los insumos necesarios para la implementación.

Para llevar a cabo la implementación se utilizó la plataforma Nearpod, en donde los estudiantes podían responder y nosotros podíamos ver en tiempo real las respuestas, y realizar la retroalimentación correspondiente, a lo que los estudiantes se adaptaron de manera formidable, participando activamente durante toda la actividad. Sin embargo, debido al escaso conocimiento de la física y la matemática, el tiempo utilizado fue el doble del pronosticado.

Participaron 7 estudiantes en la implementación, a los cuales se les realizó un diagnóstico con el objetivo de saber si conocían o tenían nociones de sistemas de ecuaciones lineales (véase Anexo F. Diagnóstico, Implementación 1), de donde se obtuvo información que permitía aseverar que no los habían estudiado de manera formal en ninguno de los niveles anteriores. Es por ello que los primeros minutos de la clase fueron utilizados para explicar brevemente en qué consistían los sistemas de ecuaciones (sin llegar a explicar la resolución de estos), donde posteriormente se mostró el video introductorio, con el cual se desarrolló un diálogo para dar respuesta a las preguntas del primer momento.

Esta introducción ayudó a los estudiantes a comprender mejor la situación de aprendizaje, logrando que estos pudieran responder las preguntas aun siendo un tema nuevo para ellos, sin embargo, se presentaron complicaciones interpretando el concepto de fuerza y su significado, dificultando el desarrollo de la pregunta (c) y el planteamiento de cada una de las ecuaciones y, por consiguiente, se intentó generar una única ecuación que explicara la aceleración de la polea.

Esto provocó que el cierre de nuestra actividad se desarrollará de forma apresurada, impidiendo que pudiéramos recopilar las respuestas a la pregunta planteada, que posteriormente fue enviada en un formulario de Google (véase anexo G. Respuestas de los estudiantes a la situación de aprendizaje).

Es debido a lo anterior que se buscó adecuar la situación de aprendizaje al contexto online para hacer un mejor uso de los tiempos eliminando y agregando otras preguntas que nos permitiera focalizar de mejor forma la actividad. De esta forma, se complementó la pregunta (a) del primer momento y se eliminó una pregunta del segundo momento la cual preguntaba a los estudiantes que podían comentar acerca del sistema de ecuaciones. Estos cambios nos dieron como resultado un primer momento compuesto de dos preguntas y un segundo momento compuesto de nueve preguntas, el cual se puede apreciar en el anexo H. PowerPoint complementario a la situación de aprendizaje.

5.3.2. Segunda Implementación

Esta segunda implementación se llevó a cabo en un colegio adscrito a la gratuidad, ubicado en la comuna de La Granja. La implementación se realizó en un preuniversitario interno del colegio que tenía estudiantes de dos niveles, tercero y cuarto medio, a cargo de la profesora IBC, encargada de validar la situación de aprendizaje a implementar (véase Anexo F. Carta enviada a expertos, Experto 3).

En esta ocasión participaron 9 estudiantes, a los cuales se les envió una evaluación diagnóstica (como en la implementación N° 1) que no fue respondida, por lo que nos vimos en la necesidad de desarrollar este diagnóstico minutos antes de la realización de la actividad (véase Anexo F. Diagnóstico, Implementación 2), donde se evidencia que solo uno de ellos tenía una noción correcta de sistemas de ecuaciones relacionadas en particular, con física y el movimiento de dos o más cuerpos; mientras que los demás estudiantes no contestaron o sus respuestas estaban lejos de comprender lo que era un sistema de ecuaciones lineales (véase Anexo G: Respuestas de los estudiantes a la situación de aprendizaje, Implementación 2)

Desde el momento en el que se comenzó a desarrollar la actividad, los estudiantes se mostraron reacios a participar, se presume que fue debido a la forma en la que se llevó a cabo la actividad a través de la plataforma digital Nearpod, puesto que el formato de nuestra clase involucraba su participación en todo momento, pues de otra forma no se lograría continuar. Además, como en el caso anterior, los estudiantes intentaron describir el movimiento del sistema utilizando una ecuación, lo cual llevó a generar una discusión en donde se logró comprender que cada ecuación estaba asociada a un objeto y que al tener dos objetos se tenían dos ecuaciones.

Debido a lo anterior, no se pudo desarrollar la situación de aprendizaje completa, pues las últimas preguntas (como en la primera implementación) no alcanzaron a ser abordadas, sin embargo, se logró generar el espacio para dar un cierre a la actividad y evidenciar si los estudiantes habían comprendido el propósito de nuestra situación de aprendizaje.

5.3.3. Tercera Implementación

La tercera y última implementación realizada, fue en un colegio particular subvencionado, ubicado en la comuna de San Bernardo. Desarrollado a 9 estudiantes de cuarto medio de la especialidad de Geología, ya que la profesora SR (profesora de matemáticas) consideró que sería más enriquecedor debido a su cercanía con la física. Es importante señalar que la situación de aprendizaje fue enviada y validada por la profesora (véase Anexo F. Carta enviada a expertos, Experto 4).

Como en la implementación 2, los estudiantes no lograron responder la evaluación diagnóstica enviada con antelación, por lo que se realizaron dos preguntas a través de la plataforma digital Nearpod (véase Anexo F. Diagnóstico, Implementación 3) y posteriormente se desarrolló la actividad. En estas preguntas se observó que los estudiantes habían estudiado formalmente sistemas de ecuaciones, pero no los recordaban a cabalidad y además no lograban recordar ningún contexto u objeto en el que se pudieran encontrar sistemas de ecuaciones.

Para llevar a cabo la situación de aprendizaje, se comenzó mostrando el video, donde se generó una discusión previa a la resolución del primer momento, logrando el desarrollo de ambos momentos de manera óptima, dando énfasis a los elementos que fueron conflictivos en las implementaciones anteriores como lo fueron las fuerzas y la fuerza neta. De esta forma la actividad fue mucho más dinámica con mayor participación; sumado a lo anterior, se logró comprender la relación entre las ecuaciones y los objetos en la polea. Sin embargo, como en los casos anteriores, se alcanzaron a responder las preguntas del momento 1 y las primeras tres del segundo momento, por lo que faltó desarrollar aproximadamente un 50% de la actividad, dando mayor énfasis a la discusión de la pregunta (c) del momento dos, la cual era el eje fundamental de nuestra situación.

Finalmente, se logró dar un cierre a la situación de aprendizaje donde pudimos observar que los estudiantes comprendieron el significado que se le estaba dando a los sistemas de ecuaciones a través de un objeto concreto como lo son las poleas, por lo que pudieron mencionar diferentes objetos en los que se pudieran encontrar (véase Anexo: Respuestas de los estudiantes a la situación de aprendizaje, Implementación 3)

5.4. Análisis a posteriori

En la siguiente sección se evidencian las respuestas entregadas por los estudiantes con base en la situación de aprendizaje implementada, junto con ello se presenta un análisis de las respuestas, el porcentaje de logro en cada una de las preguntas y una síntesis de las dificultades existentes en cada una de ellas.

En cada una de las siguientes tablas se muestran las respuestas textuales de los estudiantes a través de la plataforma digital Nearpod.

Pregunta (a): Utilizando la segunda ley de Newton ¿Qué ecuación podemos formular?

Implementación	Estudiante	Respuesta

1	E1	*“La tension menos el peso, lo cual esto nos dara igual a la masa por la aceleracion.. esto sera 0”*
	E10	*“M*a= 0”*
2	E1, E2, E3	*“T-P=0”*
3	E1, E8	*“T-P=mx0 los valores son T=tencion P=peso”*
	E4	*T-p T-p=0*

Como se puede observar, los estudiantes lograron comprender la segunda ley de Newton vista en el video, es por este motivo que ellos logran interpretar la fuerza neta como la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, en particular, las fuerzas que actúan en el DCL del candelabro son la tensión y el peso con sentidos opuestos, por lo que se realiza una resta entra ambas fuerzas, aún más, el estudiante 8 de la implementación 3, se refiere a la aceleración del sistema como 0, y el resto de estudiantes igualan la ecuación a cero pues no existe aceleración, reflejando el estado de equilibrio del candelabro colgando.

El error más común de los estudiantes de la implementación 1 (E4, E9 y E11), fue referirse a la $T - P = M$, en donde se argumentaba que no había aceleración y simplemente suprimían esta letra. Por otra parte, los estudiantes E3 y E6 de la implementación 1 y E9 de la implementación 2, no lograron interpretar la fuerza neta ni el estado en el que se encontraba el cuerpo, expresando o despejando la fórmula de la segunda ley de Newton.

En la implementación 2, los estudiantes E7 y E8, tuvieron problemas interpretando la fuerza neta, pues se refirieron a ella como la multiplicación de la tensión y el peso del cuerpo, sin embargo, comprendían que, al no haber aceleración, la ecuación debía estar igualada a cero.

En la implementación 3, los estudiantes E3 y E6 plantean la ecuación como “t-p” sin igualarlo a ningún valor, lo que demuestra que lograron comprender la fuerza neta y que no había aceleración, pero no lograron plantearlo a través de una ecuación.

A modo general se puede observar el siguiente gráfico:

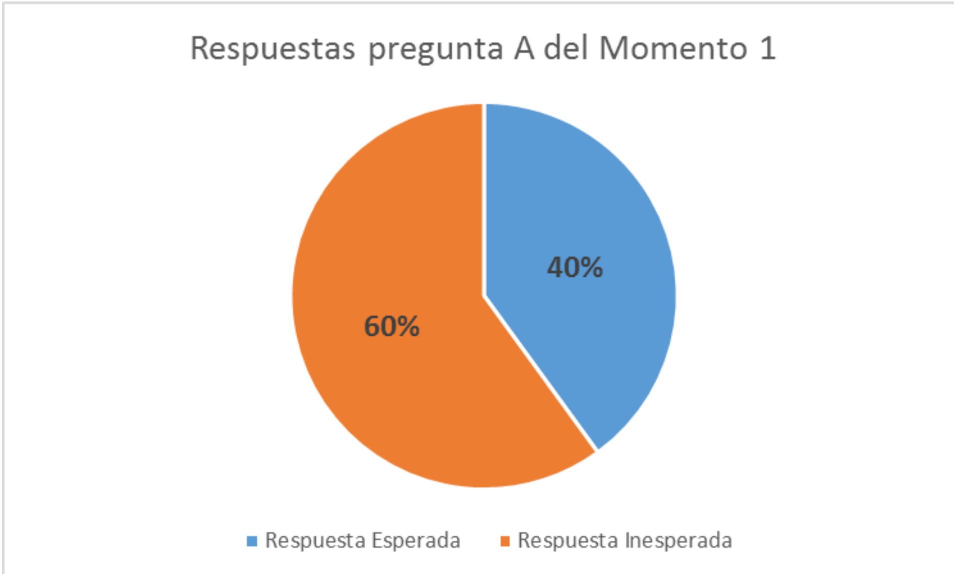


Figura 14: Gráfico de respuestas pregunta A momento 1.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

Del total de estudiantes que respondieron a la primera pregunta del primer momento, el 40% de ellos respondieron de manera correcta a la pregunta planteada, teniendo como principal dificultad la interpretación de la fuerza neta y la comprensión del estado de equilibrio dentro de la segunda ley de Newton.

Pregunta (b): ¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?

Implementación	Estudiante	Respuesta Esperada
1	E5, E6, E9	*Cuerpo es igual a la masa y según la ecuación es tensión menos peso y como no hay movimiento da resultado 0*
2	E1, E2, E3, E4, E6, E8, E9, E10, E11	*"El cuerpo está en equilibrio y que la magnitud está en cero"*
3	E1, E3, E4, E5, E8, E9.	*"Que tensión - peso es igual a cero ya que el cuerpo está en equilibrio por lo tanto no tiene aceleración"*
	E6	*"La fuerzas son iguales"*

A partir de las respuestas entregadas por los estudiantes, logran comprender que no hay movimiento en el sistema, lo que refuerza las conclusiones obtenidas en la pregunta anterior, además, se refieren a la aceleración del sistema como cero, lo que se traduce en un estado de equilibrio (como señalan los estudiantes de la implementación 2 y 3). Es importante destacar la respuesta dada por E6 de la implementación 3, pues se refiere a las fuerzas iguales, por lo que comprende que esto involucra un estado de equilibrio en donde no hay aceleración ni movimiento.

El error más común en la primera implementación (E1, E2 y E10) es al referirse al movimiento del cuerpo como "nulo", sin embargo, se puede evidenciar que comprenden que el cuerpo se encuentra en equilibrio (pese a no utilizar el lenguaje correcto). Además, dentro de la implementación 3, el estudiante E7 dice que el sistema no tiene aceleración, lo que es correcto, sin embargo, en ningún momento se refiere al estado del cuerpo (de si está en movimiento o reposo) y la ecuación planteada.

De las respuestas dadas por los estudiantes se desprende el siguiente gráfico:

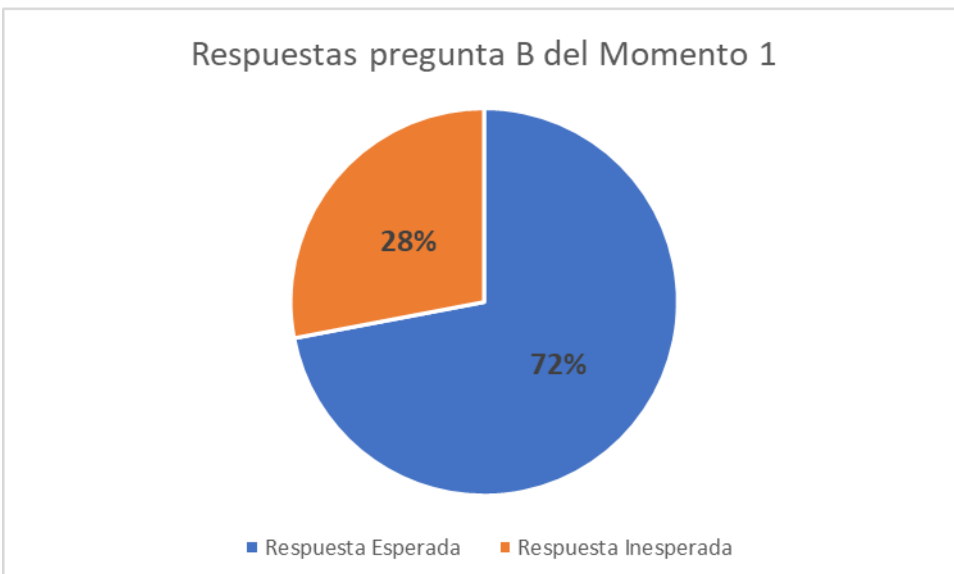


Figura 15: Gráfico de respuestas pregunta B momento 1.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

A modo general se observa que los estudiantes comprenden que una aceleración nula implica un estado de equilibrio, y la mayor dificultad existente tiene relación con las dificultades de lenguaje para referirse al estado del cuerpo. Luego de analizarlo, llegamos a la conclusión que esto se debió al diálogo realizado en el momento de la primera implementación, donde un estudiante se refirió al movimiento como "nulo", donde muchos de ellos le dieron sentido, pese a ser técnicamente incorrecto.

Pregunta (a) Si M tiene mayor masa que m, ¿Qué ocurre con el sistema?

Momento	Estudiante	Respuesta
1	E1, E4, E5, E6, E7, E9, E11	*La M tiene más peso que la m haciendo que la m suba y la M baje más como una balanza.*
2	E2, E4, E7, E8, E11	*"Se mueve hacia la M mayúscula por el peso mayor que m"* *"la fuerza que ejerce M es más, por lo que el cuerpo no está en equilibrio y genera movimiento"*
3	E4, E6, E8, E9	*que m sube por tener menos peso y M baja por mayor peso*

Con base en las respuestas entregadas, se puede apreciar que los estudiantes comprenden que si uno de los cuerpos tiene mayor masa (en este caso M), el sistema tendrá movimiento, además hay algunos estudiantes como E6 en la implementación 3 que se aventuran y advierten el sentido de giro que tendrá la polea planteada.

En líneas generales no hay problemas con esta pregunta, sin embargo, hay estudiantes que se refieren a elementos que no están relacionados con la actividad desarrollada, por lo que sus respuestas están fuera de contexto como lo son E10 de la implementación 2 y E3 de la implementación 3, que se refieren a la presión y la fuerza G.

Por otra parte, Los estudiantes E2 y E3 de la implementación 1comparan los pesos que tendrán los cuerpos de masa M y m, sin referirse a si el sistema estará en equilibrio o en movimiento, lo que es similar a la respuesta dada por E10 de la implementación 1, que se refiere a las masas de los cuerpos, explicando el enunciado de la pregunta sin aludir al movimiento de la polea. Además, el estudiante E1 de la implementación 2 argumenta que se pierde el equilibrio, sin embargo, dice que "va todo el peso en la M" lo que es una imprecisión debido a que el cuerpo de masa m también tiene un peso, el cual se contrapone al peso ejercido por el cuerpo de masa M, por lo que no es el único que provoca movimiento en la polea.

Al sistematizar la información se obtiene el siguiente gráfico:

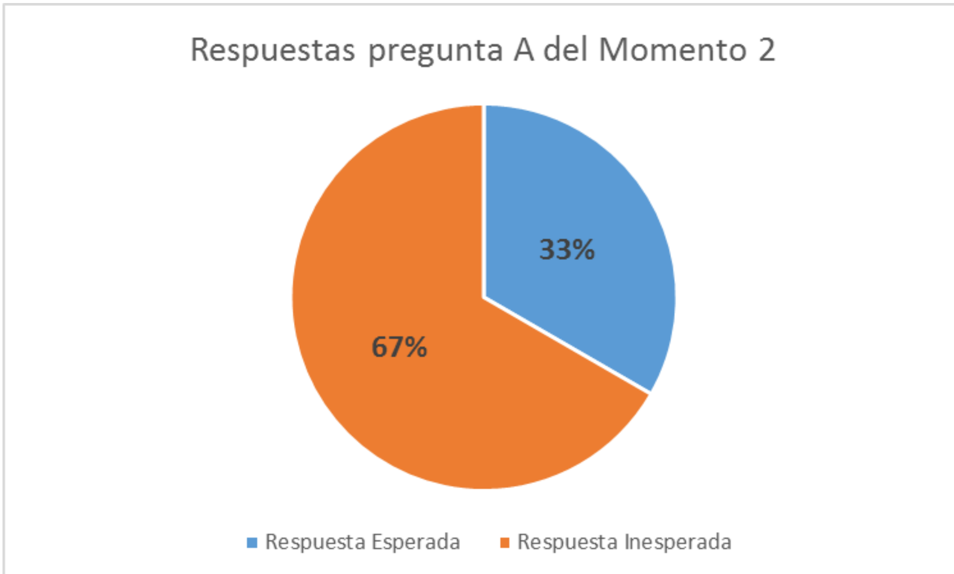


Figura 16: Gráfico de respuestas pregunta A momento 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

Si observamos el gráfico, podemos concluir que 2 de cada 3 estudiantes que respondieron a la pregunta (a) del segundo momento, lograron referirse de manera correcta a lo que ocurre con el sistema cuando uno de los objetos tiene mayor masa que el otro, en el caso de los estudiantes que utilizaron elementos adicionales fuera del contexto del ejercicio y aquellos que se refirieron a la las masas de los cuerpos, podemos decir que no comprendieron el foco de la pregunta o miraron el diagrama planteado en el ejercicio.

Pregunta (b): Con base a la respuesta obtenida en (a), ¿Cuál objeto tira del otro?

Momento	Estudiante	Respuesta
1	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E10.	*“M Grande tiraria de m pequeña”* *“que la M mayuscula como tiene mas peso se lleva a la m minúscula”*

2	E1, E2, E4, E5, E7, E8, E10, E11.	*“M tira tira de m haciendo que la m suba y M baje”* *“Es como un valance el que pesa mas es el que baja .. y por lo tanto la M es la que pesa mas”*
3	E4, E6, E8, E9	*“M tira a m, M al tener el peso mayor tira de el menor”*

De las respuestas entregadas por los estudiantes en la implementación 1 y 2, se observa que la gran mayoría se pudo referir a la pregunta sin problemas, pues comprendieron que el objeto de mayor masa “M” jalaba del objeto de menor masa “m”, por lo que el sistema giraba en dirección al cuerpo de mayor masa. El contraste directo de esto es lo observado en la implementación 3, donde los estudiantes E4, E6 y E9 se refirieron de manera correcta y precisa, utilizando el lenguaje adecuado, con base en la pregunta planteada, pues en la mayoría de las respuestas existieron imprecisiones que se analizarán próximamente.

Entre las dificultades presentadas en esta pregunta, podemos evidenciar que en la implementación 1 el estudiante E11 textualmente dice: “la m mas larga porque tiene mas peso”, de lo que no es posible extraer mucha información más que asegurar que el estudiante reconoce a una de las masas con un mayor peso que la otra.

Ahora bien, al referirnos a las dificultades observadas en las respuestas dadas en la implementación 3, podemos evidenciar que los estudiantes presentan imprecisiones al momento de explicar su respuesta, como lo es en el caso de E1, donde plantea que “"M" tira a "m" con una mayor masa” reconociendo de manera correcta cual es el que jala hacia arriba al otro. Sin embargo, se refiere de manera equivocada al peso que ejerce el cuerpo, confundiéndolo con la “masa”.

Por otra parte, el estudiante E3 responde que: *“M tira con mayor fuerza Por mayor peso, Entonces tiene mayor aceleración y arrastra a m porque tiene menos peso”,* en donde se observa que comprende cual es el objeto que tira del otro, sin embargo, se refiere a la aceleración como distinta para cada uno de los cuerpos, pese a que están unidos por una cuerda, lo que provoca que la aceleración de bajada sea igual a la de subida.

En el caso de E5 plantea que: *"la M mayuscula por q tiene la fuerza de grabedad mas el peso del M"* en donde se evidencia que comprende hacia donde se desliza el sistema, pero se refiere a elementos como la gravedad, a la cual le agrega el peso de M, que no tiene relación con el contexto del ejercicio, pero que se presume, quiso hacer referencia al peso del cuerpo como la masa multiplicada por la aceleración de gravedad.

Si consideramos lo expuesto en párrafos anteriores y lo expresamos a través de un gráfico, podremos observar lo siguiente:

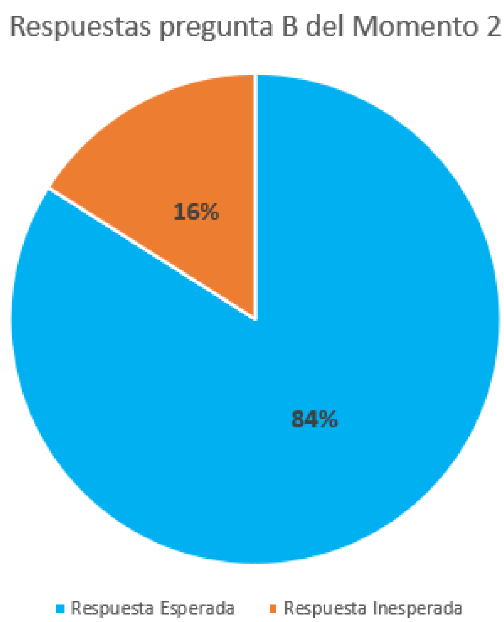


Figura 17: Gráfico de respuestas pregunta B momento 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

La pregunta b del momento 2 fue respondida por 25 estudiantes, de los cuales un 16% (4 estudiantes) tuvieron imprecisiones al momento de plantear su respuesta, en caso de no ser así, la pregunta tendría una positividad sobre el 90%, por lo que podemos concluir que se logró comprender el fondo de la pregunta.

Pregunta (c): Observando el diagrama, plantee ecuaciones que puedan encontrar la aceleración del sistema. Use la segunda ley de Newton $F_n = m \cdot a$

Esta pregunta fue el centro de nuestra situación de aprendizaje, se buscaba que los estudiantes comprendieran que es posible plantear una ecuación por cada uno de los cuerpos y que estas dos ecuaciones permiten hallar la aceleración y tensión de la polea.

Implementación	Estudiante	Respuesta
1	E5	*"T-p=m×a P-t = Mxa"*
2	E2, E4	*"T - Pm=m*A PM- T = m*A"*
3	E1, E6, E8, E9	*"serian P-T=Mxa y al reves T-P=mxa"*

De las tres implementaciones realizadas, tan solo 7 estudiantes fueron capaces de comprender que con una ecuación no bastaba para explicar el movimiento de todo el sistema y que el movimiento que describe una ecuación es distinto al que describe la otra, haciendo alusión a que uno representa el descenso del objeto de masa M y la otra representa el ascenso del objeto de masa m.

En el transcurso de nuestra actividad esta fue la pregunta más conflictiva, con base a las respuestas dadas por los estudiantes pudimos observar una tendencia a intentar expresar el movimiento del sistema a través de una sola ecuación, lo cual se puede ver reflejado a partir de las respuestas de los estudiantes E3, E4, E9, E10 y E11 de la primera implementación; el estudiante E11 de la segunda implementación y los estudiantes E3 y E4 de la tercera implementación. Además, uno de los problemas más recurrentes fue la interpretación de la fuerza neta dentro del contexto del ejercicio, ya que se debía interpretar para cada uno de los cuerpos, de tal forma que organizaran y analizaran las fuerzas involucradas para plantear las ecuaciones con los signos correspondientes.

Por otra parte, se destaca el hecho de que la mayor cantidad de estudiantes que hayan logrado comprender la formulación de dos ecuaciones sean de la implementación 3, pues en esa ocasión fue el centro de nuestra actividad para que se lograra asociar la existencia de sistemas de ecuaciones en sistemas con dos cuerpos suspendidos.

Otra de las confusiones que se presentaron con esta pregunta, tienen relación con la segunda ley de Newton, pues los estudiantes E6 de la implementación 1; E5, E8 y E10 de la implementación 2, realizan el despeje de la aceleración en la ecuación de la segunda ley de

Newton, concluyendo que no dieron cuenta del diagrama y no realizaron un nexo entre este y la segunda ley de Newton, por lo que no lograron interpretar las fuerzas existentes ni la existencia de una ecuación para cada cuerpo.

Si expresamos las respuestas de los estudiantes a través de un gráfico se pueden observar los siguientes resultados:

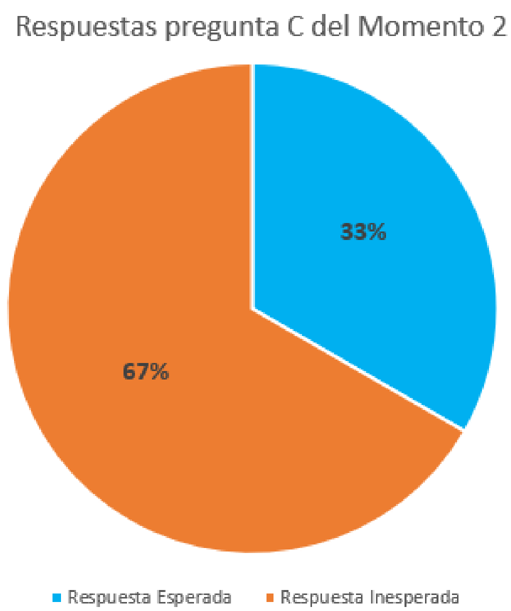


Figura 18: Gráfico de respuestas pregunta C momento 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

De los 21 estudiantes que respondieron la pregunta, el 33% de ellos pudo formular ambas ecuaciones y comprender que cada ecuación representaba el movimiento de uno de los dos cuerpos, ya sea el de masa mayor o menor; por otra parte, la tónica de esta pregunta fue el hecho de que los estudiantes intentaran explicar el movimiento del sistema a través de una ecuación, para lo que se tuvieron que desarrollar diferentes estrategia que evidenciaran que una ecuación no era suficiente, permitiéndonos explicar el ascenso o descenso de uno de los cuerpos, pero que en el otro extremo tenían colgando otro que no estaban considerando. Esta es una de las formas en las que los estudiantes comprendieron que existían dos ecuaciones; por otra parte, una dificultad recurrente fue la interpretación de la fuerza neta, pues no tenía el mismo comportamiento en ambas ecuaciones, por lo que existieron casos como el estudiante E4 de la implementación 1 que intentó formular dos ecuaciones que resultaron ser la misma.

A continuación, se desarrollan preguntas que tienen relación con el sistema de ecuación planteado, y como fue mencionado en la sección de experimentación, los grupos de estudiantes de la implementación 1 y 2 no recordaban haber visto sistemas de ecuaciones, mientras que el tercer grupo dio indicios de haberlos estudiado de manera formal, pero no los recordaban. En el grupo de la implementación 1 se logró desarrollar una actividad previa que les permitiera comprender en qué consistían los sistemas de ecuaciones (sin llegar a explicar ni mostrar ninguno de los métodos de resolución). Por otra parte, los estudiantes de las implementaciones 2 y 3 no respondieron el diagnóstico antes de realizar la implementación, por lo que para obtener esta información se desarrolló una evaluación diagnóstica dentro de nuestra clase para posteriormente ser analizada, por lo que en ese momento no sabíamos que los estudiantes no conocían ni recordaban lo que era un sistema de ecuaciones.

Bajo este contexto se desarrollan las siguientes preguntas:

Pregunta (d): ¿Es posible plantear las ecuaciones como un sistema? ¿Cuáles serían sus incógnitas? Argumente.

Implementación	Estudiante	Respuesta
1	E5, E6, E11	*Si, para calcular ya sea la aceleración o otras cosas*
2	E2, E4, E10	*Es posible y la masa y peso de los cuerpos no serian incognitas y las que si se ponen con una x o y.*
		*"P - X= m*Y X- p"*

En la primera implementación contestaron 8 estudiantes, de los cuales 1 argumentó que era posible calcular la aceleración, mientras que en la segunda implementación contestaron 4, de los que 3 expresaron elementos relacionados a los sistemas de ecuaciones, planteando que existían valores que ellos conocían y que eran constantes, mientras que por otro lado habían incógnitas, las cuales las denominaban con las letras "X" e "Y", que vendrían siendo la tensión y la aceleración.

Un grupo de estudiantes de la implementación 1 (E2 y E3) que aseguraban que si era posible plantear las ecuaciones como un sistema, sin embargo, no daban ningún argumento que sustentara lo que decían. Por otra parte, los estudiantes E4 y E11 del mismo grupo, dieron argumentos descontextualizados, pues decían que *"depende de la situación y del problema"* o *"porque así es mas fácil ordenar nuestros datos y llegar algún resultado"*, perdiendo sentido dentro del contexto en el que se estaba desarrollando la actividad.

Para el caso de los estudiantes de la implementación 2, debido a que se acababa el tiempo de la clase, dejaron de responder por Nearpod y dieron sus respuestas a viva voz, de lo cual se pudieron rescatar algunas respuestas a través del chat y/o la grabación de la clase; en particular el estudiante E8 reconocía a la masa y el peso como variables, demostrando una confusión respecto a las incógnitas y constantes que se presentaban en cada ecuación, es posible que se debiera a que ambas ecuaciones solo presentaban letras y ningún número, provocando confusión en ellos.

A modo de resumen, se muestra el siguiente gráfico:

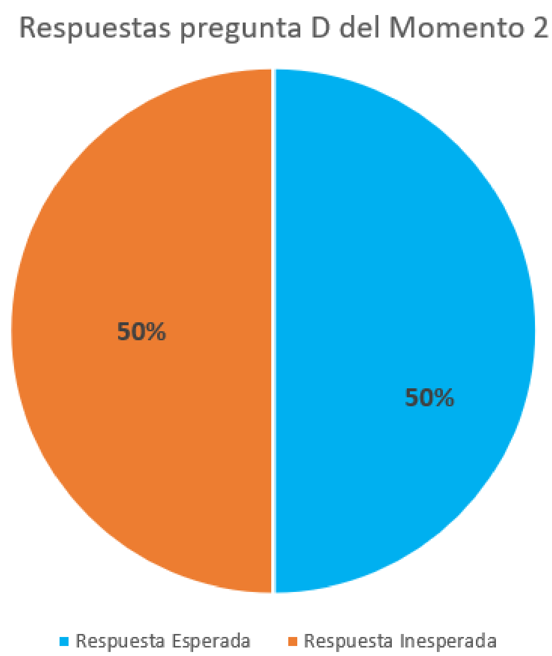


Figura 19: Gráfico de respuestas pregunta D momento 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

De las dos implementaciones realizadas, respondió un total de 12 estudiantes, de los cuales 6 comprendieron o lograron expresar que era posible determinar la aceleración o tensión del sistema, reconociendo la masa y el peso de los cuerpos como constantes. La dificultad principal está relacionada con la falta de conocimientos matemáticos relacionados con la actividad, pues se esperaba que al ser estudiantes de 4° y 3° medio, hubieran estudiado sistemas de ecuaciones.

Pregunta (e) ¿El sistema tiene solución desde el punto de vista físico? Argumente.

Esta pregunta se desarrolla luego de realizar una retroalimentación a los estudiantes del grupo 1, pues con ellos se alcanzó a desarrollar casi toda la actividad. Por otra parte, a los estudiantes de la implementación 2 no se les logró realizar una retroalimentación y respondieron a través del chat de MEET.

Implementación 1		Implementación 2	
Estudiante	Respuesta	Estudiante	Respuesta
Estudiante 1	*"Si porque depende de la tension y la aceleración"*	Estudiante 1	*"Si"*
Estudiante 2	*"Depende de la acelaracion"*	Estudiante 2	*"Si"*
Estudiante 3	*"cuando las gráficas se intersecan en unm punto"*	Estudiante 5	*"Si, gracias a las ecuaciones"*
Estudiante 4	*"la solución es la aceleración"*	Estudiante 7	*"Si porque ya tenemos todos los datos, el peso, y la masa"*
Estudiante 5	*"Si, ya que se busca encontrar la tensión y la aceleración"*	Estudiante 10	*"Si"*
Estudiante 6	*"Si, ya sea para conocer el peso que ejerce o para encontrar el punto de tensión"*		
Estudiante 8	*"si, la tension y la aceleración"*		
Estudiante 9	*"si por que podríamos evidenciar su aceleracion y tensión"*		
Estudiante 11	*"si porque así se puede calcular la tensión y la aceleración"*		

En el caso de la implementación 1, luego de la retroalimentación realizada, lograron comprender que en el sistema había variables y constantes, en el caso de esta pregunta, al complementarla y preguntarles "¿Qué es lo que buscamos calcular?" le dieron sentido y comprendieron que nos estábamos refiriendo a los elementos físicos que nos permiten dar solución al sistema. De esta forma, los estudiantes E1, E2, E4, E5, E8, E9 y E11 dieron respuesta a la pregunta refiriéndose a la tensión y la aceleración como los elementos que nos permiten dar solución al sistema de ecuaciones planteado, mientras que E3 se refirió a la solución matemática de un sistema de ecuaciones como el punto donde dos rectas se intersecan.

Por otra parte, los estudiantes de la implementación 2 argumentaron que el sistema de ecuaciones si tenía solución desde un punto físico, sin argumentar el motivo por el cual tenía solución, solo E7 se refirió a los elementos conocidos dentro de las ecuaciones como lo son el peso y la masa, por lo que podemos decir que comprendió de la pregunta anterior que estos valores son conocidos, mientras que la tensión y la aceleración son desconocidos y comunes en ambas ecuaciones y en el sistema.

Las mayores dificultades de esta pregunta están relacionadas con los conocimientos previos de los estudiantes, pues al realizarles la pregunta de forma matemática no la comprendieron, sin embargo, al realizar la pregunta considerando otros elementos que ellos ya manejan y reformular la pregunta para referirnos a los elementos que se deben calcular, es posible que den respuesta a la pregunta planteada.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de logro obtenido en esta pregunta.

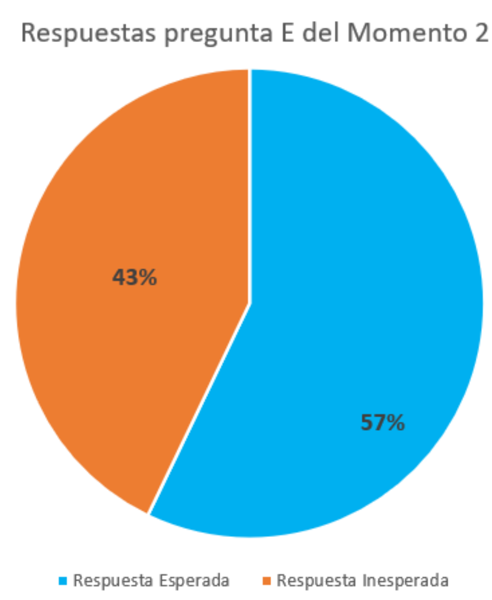


Figura 20: Gráfico de respuestas pregunta E momento 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

Esta pregunta fue respondida por 14 estudiantes, de los cuales un 57% respondió de manera satisfactoria esta pregunta, mientras que un 43% presentó alguna confusión o no justificó su respuesta, siendo esta última la razón primordial; además, es importante señalar que 9 (64%) de los 14 estudiantes pertenecían al grupo de la primera implementación y del total, dos tuvieron respuestas distintas a las de sus compañeros, uno se refirió a la solución matemática de un sistema de ecuaciones, mientras que el otro confundió las variables con las constantes, refiriéndose al peso como una de las incógnitas del sistema de ecuaciones.

Pregunta (f) ¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente.

Implementación 1		Implementación 2	
Estudiante	Respuesta	Estudiante	Respuesta
Estudiante 1	*"Porque depende del signo que tengan"*	Estudiante 1	*"Porque hay una positiva y una negativa"*
Estudiante 3	*"pq puede reducir le presion arterial en aproximadamente igual"*	Estudiante 2	*"Por la tención negativa y positiva?"*
Estudiante 4	*"que ay veces que la tencion es negativo y la otra positiva y ahí queda en cero"*	Estudiante 4	*"Porque hay dos ecuaciones y dos variables"*
Estudiante 5	*"Por qué en una fuerza la tensión va positiva y en la otra negativa, esto hace que sea t-t"*	Estudiante 11	*"Porque en uno de los lados la tensión es positiva y en el otro negativo."*
Estudiante 6	*"Si, se podría reducir la tensión si ambos ejercen la misma fuerza o no hacen nada."*		
Estudiante 8	*"porque tienen signos distintos"*		
Estudiante 9	*"que ambas objetos tengan igual de masa para que ocurra un equilibrio"*		
Estudiante 10	*"Porque ambos son iguales"*		

Estudiante 11	*"una es positiva y otra negativa entonces seria 0"*		

Los estudiantes tenían diferentes opciones para dar respuesta a esta pregunta, en primer lugar, lo podían hacer de manera matemática, comprendiendo que en una de las ecuaciones una tensión se presenta con signo contrario al de la otra; por otra parte, al analizarlo de manera física, podrían argumentar que era posible reducirla debido a que tienen sentidos distintos, por lo que se puede reducir. Sin embargo, la última respuesta dada está relacionada con la siguiente pregunta, por lo que se esperaba que identificaran la diferencia de la tensión en ambas ecuaciones y concluir,

De los estudiantes del grupo de la primera implementación: E1, E4, E5, E6, E8 y E11; se refieren al signo que adquiere la tensión en cada ecuación, por lo que concluyen que es posible reducirla. De la misma manera, los estudiantes del segundo grupo de implementación: E1, E2 y E11 se refieren al signo que presenta en ambas ecuaciones como positivo y negativo.

Notamos que en esta pregunta solo un estudiante del grupo de la primera implementación presentó dificultades con la comprensión de la pregunta (E9), pues se refiere a las masas y el estado de equilibrio del cuerpo, quizá relacionando estos elementos con las preguntas desarrolladas en el primer momento; por otra parte, los estudiantes E3 de la primera implementación y E4 de la segunda implementación, dieron respuestas que no estaban relacionadas con el contexto en el que se desarrollaba la pregunta, pues uno se refería a la "presión arterial", mientras que el segundo se refería a la existencia de "dos ecuaciones y dos variables", sin dar respuesta a la pregunta planteada.

A continuación, se muestra un gráfico que resume el porcentaje de logro de esta pregunta.

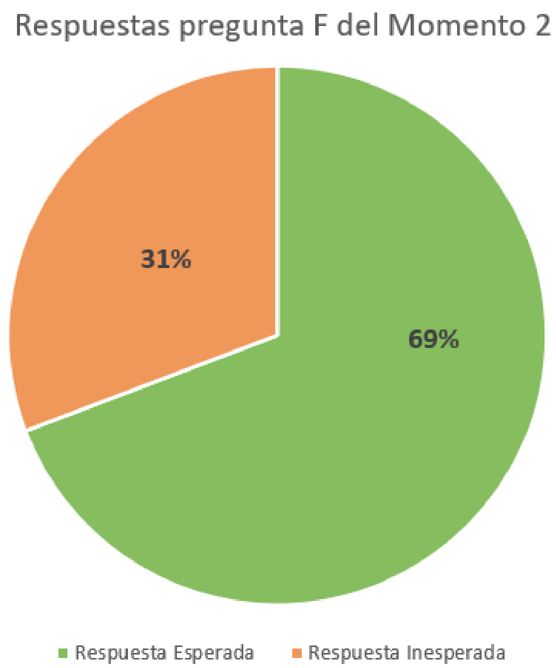


Figura 21: Gráfico de respuestas pregunta F momento 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

La pregunta fue contestada por 13 estudiantes, de los cuales 9 pertenecen a la primera implementación y 4 a la segunda implementación, obteniendo un porcentaje de logro del 69%, mientras que un 31% presentó alguna dificultad que le impidió responder correctamente. Si consideramos las respuestas fuera de contexto (E3, E9 de I1 y E4 de I2), encontramos solo la respuesta dada por E10 de I1, relacionada con el grado de especificación de la respuesta del estudiante, de donde se concluye que E10 comprendió el planteamiento de la pregunta, pero se refirió de manera errónea a las tensiones como “iguales”.

Pregunta (g): Desde un punto de vista físico, ¿Qué significa que la tensión tenga signos distintos?

Como se dijo anteriormente, debido a la falta de tiempo en la implementación 2 se omitieron algunas preguntas y una de ellas es esta, por lo que se procederá a mostrar los resultados obtenidos de la primera implementación:

Estudiante	Respuesta
Estudiante 1	*Que toma un valor negativo y otro positivo dependiendo de que lado se vea*

Estudiante 3	*que tienen otras direcciones*
Estudiante 4	*que hay un cuerpo positivo y el otro negativo y de eso queda en cero*
Estudiante 5	*Por qué hay un punto medio que sería el 0 y un lado se hace fuerza para el lado negativo y el otro positivo, o mejor hacia abajo neg y arriba post*
Estudiante 6	*De que en cuerpo negativo no hace acelera ya que es negativo o ejerce pero para el lado negativo, y bueno el positivo acelera*
Estudiante 8	*significa que las fuerzas tienen distintas direcciones*
Estudiante 9	*que las partes positivas tiran hacia un lado y las negativas en contra de ella*
Estudiante 10	*Que ambos cuerpos son distintos ya que uno está ejerciendo fuerza y el otro n*
Estudiante 11	*que la parte positiva esta tirando a un lado y la negativa esta tirando también pero hacia el otro lado*

De los estudiantes que respondieron en la primera implementación, E1, E3, E4, E5, E8, E9 y E11 dieron cuenta de la relación existente entre el sistema de ecuaciones planteado, el signo que tenía la tensión en cada ecuación y el movimiento que tenían los cuerpos colgando en los extremos de la polea. De esta forma, los estudiantes lograron atribuir los diferentes signos a las diferencias en el movimiento de cada cuerpo y la forma en la que se movían.

Por otra parte, los estudiantes E6 y E10 tuvieron dificultades para comprender esta relación; el primero de ellos relaciona el signo de la tensión con el sentido de la aceleración, interpretando que para uno de los cuerpos es una aceleración negativa mientras que para el otro es positiva, mientras que el segundo relaciona el signo de las tensiones con la fuerza que ejercen los cuerpos, donde argumenta que “uno ejerce fuerza y el otro no”, lo que se contrapone a lo explicado en las preguntas anteriores relacionadas al planteamiento de ecuaciones y el movimiento del sistema.

El siguiente gráfico muestra el porcentaje de logro de los estudiantes de la primera implementación en la pregunta g.

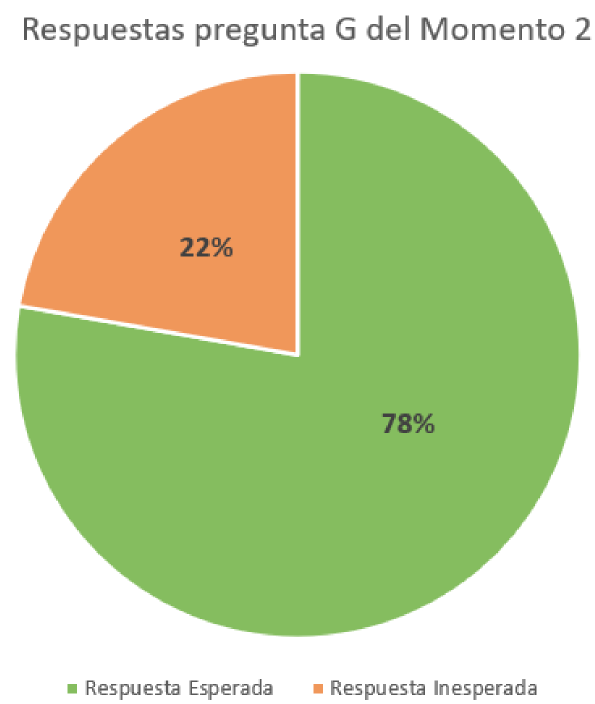


Figura 22: Gráfico de respuestas pregunta G momento 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

La pregunta fue respondida por 9 estudiantes, de los cuales 7 de ellos (78%) planteó una respuesta adecuada en relación a la física y el signo de las tensiones en las ecuaciones, mientras que 2 de ellos (22%) tuvieron dificultades comprendiendo la pregunta, quizá debido a que no analizaron el sistema de ecuaciones ni el diagrama planteado.

Momento 2, Actividad 2

Pregunta (a): ¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.

Implementación 1		Implementación 2	
Estudiante	Respuesta	Estudiante	Respuesta
Estudiante 1	*"Se caen ambos y se elimina la tension de estos"*	Estudiante 2	*"La tension se acaba"*
Estudiante 2	*"El cuerpo que tiene mas peso hara mas el peso para caer"*	Estudiante 6	*"Caen por la gravedad"*

Estudiante 3	*“se van a caer los dos y queda la m con el peso”*	Estudiante 7	*“Se van a caer por la gravedad”*
Estudiante 4	*“que los dos van a caer al suelo pero la que lleva mas peso llega mas rápido al suelo”*	Estudiante 10	*“Caen los dos”*
Estudiante 5	*“que los dos van a caer al suelo pero la que lleva mas peso llega mas rápido al suelo”*	Estudiante 11	*“La tension se acaba”*
Estudiante 6	*“Por la fuerza de gravedad caerían ambos”*		
Estudiante 8	*“ambos caerian pero la M caeria mas rapido por la fuerza de gravedad que se ejercería”*		
Estudiante 9	*“La M mayor se iria solo a su lado ya que no existiría una fuerza negativa”*		
Estudiante 10	*“El cuerpo M rojo caerá con más rapidez ya que tiene más fuerza y m rosa tomará más tiempo en caer”*		
Estudiante 11	*“la m que queda va a tener todo el peso porque no va haber un peso que le este haciendo peso contrario”*		

En el caso de la primera implementación, 10 estudiantes respondieron a la pregunta (a) de la actividad 2, de los cuales E1, E3, E4, E5, E6, E8 y E10 se refirieron a la caída libre de los cuerpos luego de que se cortara la cuerda o refiriéndose a la eliminación de la tensión, por lo que los cuerpos caerían con la aceleración de gravedad. Es importante destacar que los estudiantes E4, E8 y E10 advierten que el cuerpo con mayor peso caerá primero, lo cual es correcto si consideramos el rozamiento que tiene cada uno de los cuerpos con el aire, sin embargo, también es correcto afirmar que, con la ausencia del rozamiento con el aire, ambos cuerpos caerán al mismo tiempo.

Por otra parte, los 5 estudiantes que respondieron a esta pregunta argumentaron de manera lógica que al cortar la cuerda que sostiene a ambos cuerpos, estos caerían en caída libre y reconociendo que uno de los elementos que se eliminaría dentro de las ecuaciones planteadas sería la tensión.

Entre las dificultades que se reconocieron en esta pregunta destaca el hecho de que se olvide que es lo que ocurre con el otro cuerpo y se centre solo en el de mayor masa, lo que se puede evidenciar en las respuestas entregadas por E9 y E11, lo que es correcto, pero se desvía del objetivo principal de la pregunta.

Para sistematizar esta información se presenta el siguiente gráfico:

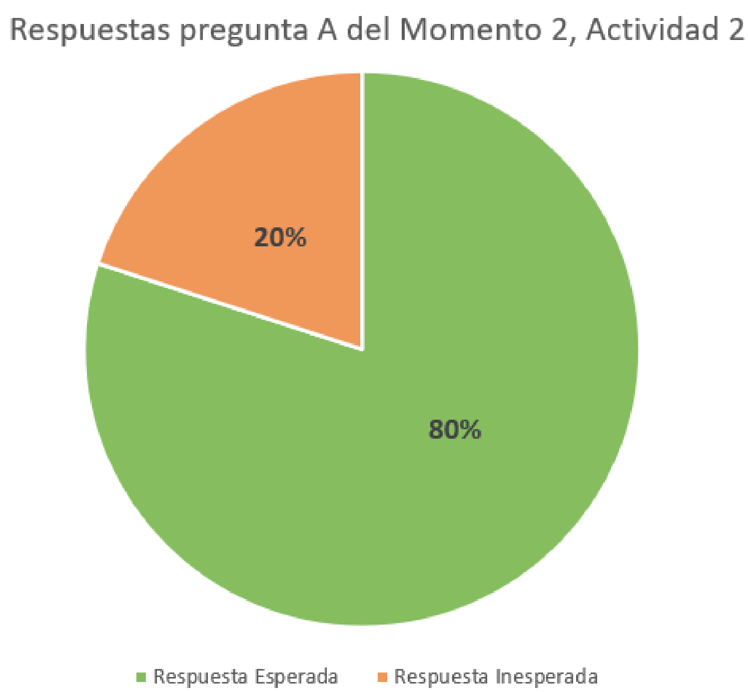


Figura 23: Gráfico de respuestas pregunta A momento 2, Actividad 2.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

Considerando ambas implementaciones, respondieron un total de 15 estudiantes y tuvo un 80% de logro (12 respuestas esperadas), mientras que la dificultad observada está relacionada con el enfoque a uno de los cuerpos, olvidando que el otro también cae con la aceleración de la gravedad.

Pregunta (b): ¿Qué ocurre si M=m? Fundamente

Como en el caso de la pregunta (g) de la actividad 1 del momento 2, esta pregunta fue desarrollada solo por estudiantes de la primera implementación.

Estudiante	Respuesta
Estudiante 1	*"Ocurre el equilibrio"*
Estudiante 2	*"Amos pesos va a estar a la misma altura"*
Estudiante 3	*"se mantendría"*
Estudiante 4	*"que si las dos serian igual estarían en equilibrio"*
Estudiante 5	*"Sería una balanza equilibrada"*
Estudiante 6	*"Si ambos pesos son iguales se mantendria el equilibrio"*
Estudiante 8	*"se mantendrian en equilibrio y estarian al mismo nivel"*
Estudiante 9	*"ocurre un equilibrio ya que ambas M serian iguales"*
Estudiante 10	*"Amos tendrían el mismo peso y se mantendrían en equilibrio"*
Estudiante 11	*"estarían haciendo equilibrio, como una balanza con el mismo peso las dos"*

De los 10 estudiantes que respondieron esta pregunta, todos los estudiantes respondieron en relación al estado de equilibrio que se presentaría en el caso de que ambas masas tuvieran igual magnitud, sin embargo, podemos observar que existen elementos que pueden llegar a ser considerados como "errores"; uno de ellos es lo señalado por E2 y E8, en donde dicen que ambos cuerpos se encontrarán "al mismo nivel", lo que en un contexto real sería cierto; sin embargo, en el contexto de nuestro ejercicio y con base en las condiciones ideales de la polea y la cuerda, el estado de equilibrio se presentaría con cualquier longitud de cuerda para cualquiera de los dos cuerpos.

Finalmente, se realiza el análisis de la pregunta que cierra la implementación de la situación de aprendizaje (Véase Anexo A: Cierre de situación de aprendizaje).

Pregunta de cierre: ¿En qué situaciones u objetos podemos encontrar sistemas de ecuaciones?

Primera Implementación

Estudiante 1	*Que es una fórmula fácil de entender y rápida de poder resolver, en el una lámpara, fuerzas de un auto, balanza, etc.*
Estudiante 2	*es un sistema para calcular la aceleracion, peso de algún objeto que este en equilibrio o desequilibrio y en por ejemplo construcciones, artefactos, etc*
Estudiante 3	*Es como un conjunto de ecuaciones simultáneas, en la vida real constantemente estamos usando ecuaciones. Un sencillo ejemplo: Supón que quieres comprar 9 refrescos y en el negocio te dicen que cuestan en total 72 pesos. Para saber cuanto cuesta cada refresco planteamos una ecuación.... 9 R = 72 (Donde R son los refrescos) Despejamos la R y nos queda R = 72/9 R = 8*
Estudiante 4	*Segun la clase que tuvimos lo ponemos ver en una balanza o en una construcción y un equilibrio entre 2 objetos*
Estudiante 5	*Es sacar o encontrar de alguna manera el valor de una incógnita, y este se puede aplicar en la vida cotidiana cuando compras y sacas su valor en un negocio o supermercado*
Estudiante 6	*Ws un conjunto de ecuaciones que tienen mas de una incognita, se pueden encontrar al tratar de cotizar cosas al comprar y calculos en cuanto a ahorros*
Estudiante 7	*se que entra en la ptu y tiene 3 tipos de solución, por reducción, sustitución e igualación. en la vida cotidiana para mi no sirve para nada, a no ser que quieras entrar a la U, en ese caso debes aprenderlo por la prueba de admisión*
Estudiante 8	*por sistema de ecuaciones recuerdo que hay dos, las lineales y equivalentes, y que sirven para resolver dos incógnitas en una misma ecuación o ejercicio*
Estudiante 9	*Hola mire por lo que entendí que hay una formula que es F=M*A pero luego se le agrega la tensión y el peso , y esto es super común de ver por ejemplo cuando uno en el colegio tirar la cuerda , cuando esta en una balanza o un candelabro se hace una fuerza y ahi es donde se tiene un ganador por así decirlo*
Segunda Implementación	
Estudiante 1	*La vela de un barco*
Estudiante 2	*Polea*
Estudiante 3	*niños tirando de una cuerd*
Estudiante 4	*una manzana colgando de un arbol*
Tercera Implementación	
Estudiante 1	*en la aeronáutica*
Estudiante 2	*poleas aseleracion de automoviles de las ruedas*
Estudiante 3	*En la traccion de un vehiculo, En la rueda de una vicicleta*
Estudiante 4	*En una polea la cual tenga distintos pesos en cada extremo*
Estudiante 5	*Hasta en una persona corriendo una maratón*
Estudiante 6	*Podemos encontrar en las lámparas*
Estudiante 7	*Una persona empujando un carrito que en una pendiente*

Podemos observar que, de las 9 respuestas entregadas por los estudiantes, 5 de ellas guardan relación con elementos relacionados con ecuaciones y sistemas de ecuaciones, pero no con la situación de aprendizaje planteada. De las otras cuatro respuestas, tres de ellas presentan elementos relacionados al planteamiento de sistemas de ecuaciones como lo son las balanzas, juego de tirar la cuerda, construcciones y automóviles. Y también otros relacionados al planteamiento de una sola ecuación como lo es un candelabro o lámpara, por lo que se concluye que aquellos estudiantes lograron comprender a lo que se refería la actividad, pero no llegaron a interiorizarlo a cabalidad, puede ser posible debido a que argumentaron no haber estudiado sistemas de ecuaciones en cursos anterior.

Los estudiantes de la primera implementación se refirieron a elementos como la vela de un barco, polea, el juego de tirar la cuerda y una manzana colgada de un árbol; este último guarda relación con el estado de equilibrio planteado en el primer momento, por lo que se presume que confundió el planteamiento del sistema de ecuaciones con la formulación de una ecuación, mientras que por otro lado, los estudiantes notaron otros elementos en donde se pueden encontrar poleas y es posible plantear sistemas de ecuaciones.

Por último, de los estudiantes que participaron en la tercera implementación, 7 dieron respuesta a la pregunta planteada. Como se puede observar en la tabla, existen respuestas variadas, algunas refiriéndose a objetos o situaciones que involucren el planteamiento de una ecuación y, por otro lado, algunas se refieren a objetos que relacionan la actividad desarrollada con otros objetos que presenten poleas o un sistema similar al de las poleas y sea posible plantear un sistema de ecuaciones.

Es posible concluir que la implementación de la situación de aprendizaje permite que los estudiantes identifiquen otros objetos concretos en los que se encuentre un sistema similar al de las poleas. Sin embargo, realizar esta relación requiere una mayor cantidad de tiempo y un dominio total o parcial de los conocimientos previos relacionados a sistemas de ecuaciones, ecuaciones, leyes de Newton, fuerzas y movimiento.

5.5. Confrontación

En la sección anterior se mostró la situación de aprendizaje a implementar y el objetivo de cada una de las preguntas, lo cual será contrastado con las respuestas obtenidas en el análisis a posteriori. Para ello se utilizará la tabla II presentada en la ingeniería didáctica, separando cada una de las implementaciones y preguntas desarrolladas en el primer y segundo momento.

En la tabla se muestra la *pregunta*, separada por cada uno de los momentos y actividades realizadas, la *respuesta esperada*, basada en la comparación entre la respuesta recopilada en Nearpood y el objetivo de la pregunta; la *respuesta no esperada*, donde se consideran aquellos estudiantes que no lograron dar respuesta a cabalidad a la pregunta y la *dificultad* que se presentó con mayor frecuencia.

Primera Implementación:

Pregunta	Respuesta Esperada	Respuesta no Esperada	Dificultad
Momento 1			
a	E1, E10.	E3, E4, E5, E6, E9, E12.	Se formula la ecuación T-P=M, suprimiendo la aceleración al argumentar que es igual a 0.
b	E5, E6, E9.	E1, E2, E3, E4, E10, E11.	Se hace referencia al estado del cuerpo como “nulo”.
Actividad 1, Momento 2			
a	E1, E4, E5, E6, E7, E9, E11.	E2, E3, E10	No se alude al estado del sistema dada la situación planteada en la pregunta, explicando características de la pregunta o comparando sus pesos.
b	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E10	E11.	La información presentada en la respuesta es poco comprensible debido a la redacción.

c	E5.	E1, E3, E4, E6, E9, E10, E11	Se presenta una sola ecuación para explicar el movimiento del sistema, argumentando que esta pertenece a al cuerpo de mayor masa.
d	E5, E6, E9	E1, E2, E3, E4, E11.	No se justifica la respuesta o se entregan afirmaciones o negaciones a secas.
e	E1, E2, E4, E5, E8, E9, E11.	E3, E6.	Los estudiantes justifican erróneamente su respuesta.
f	E1, E4, E5, E6, E8, E10.	E3, E10.	Se entregan respuestas cuyo contexto no pertenece al que se trabaja en la actividad.
g	E1, E3, E4, E5, E8, E9, E11.	E6, E10	No se comprendió la relación entre el movimiento del cuerpo con el signo de las fuerzas, relacionando el signo negativo de la tensión con oros factores como la aceleración o la fuerza peso.
Actividad 2, Momento 2			
a	E1, E3, E4, E5, E6, E8, E10.	E2, E10, E11.	Se argumenta que el cuerpo de mayor peso caería primero.
b	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E11.	-	-

A continuación, se muestra un gráfico que muestra el porcentaje de logro obtenido por los estudiantes de la primera implementación considerando todas las respuestas entregadas en las 11 preguntas.

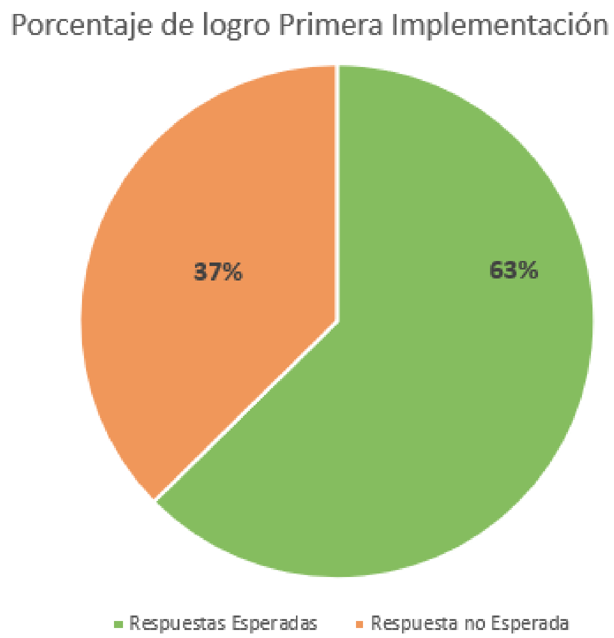


Figura 24: Gráfico del porcentaje de logro de la primera implementación.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

El porcentaje de logro de esta implementación fue de un 63%, lo que indica que la actividad se pudo desarrollar, sin embargo, aún hay elementos que pueden ser mejorados y abordados de una manera más efectiva para lograr relacionar la matemática y física del sistema tras la polea.

Además, es importante mencionar que, en esta primera implementación, la pregunta en la que existieron mayores dificultades fue la pregunta (c) del segundo momento, lo cual guarda relación con el planteamiento de las ecuaciones y la comprensión de los elementos involucrados (fuerza neta, fuerzas, segunda ley de Newton).

Segunda Implementación:

Pregunta	Respuesta Esperada	Respuesta no Esperada	Dificultad
Momento 1			

a	E1, E2, E3	E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11.	Se refieren a la fuerza neta como la multiplicación de las fuerzas.
b	E1, E2, E3, E4, E6, E8, E9, E10, E11	-	-
Actividad 1, Momento 2			
a	E2, E4, E7, E8, E11	E1, E5, E10	Se hace alusión a elementos que no están relacionados con la actividad.
b	E1, E2, E4, E5, E7, E8, E10, E11.	-	-
c	E2, E4	E1, E5, E8, E10, E11	Se presentan una o varias ecuaciones ya conocidas, o que utilizan elementos que no pertenecían al contexto del ejercicio.
d	E2, E4, E10	E8	Se cree que todos los elementos de las ecuaciones son variables.
e	E7	E1, E2, E5, E10	Se entregan respuestas sin justificación.
f	E1, E2, E11	E4	La justificación es vaga y no permite saber si el estudiante comprendió los conceptos.
Actividad 2, Momento 2			
a	E2, E6, E7, E10, E11.	-	-

A partir de los datos obtenidos de la tabla, se realiza el siguiente gráfico (como en la primera implementación) que sistematiza la información de las respuestas esperadas.

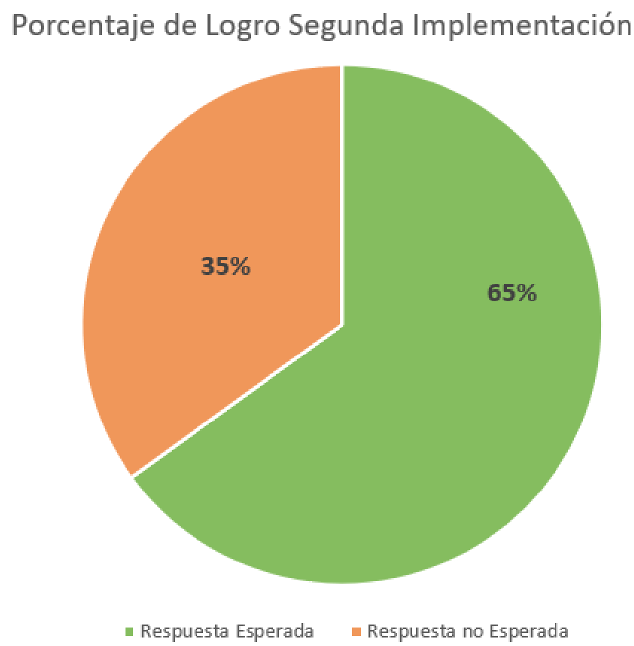


Figura 25: Gráfico del porcentaje de logro de la segunda implementación.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

Del gráfico se observa que el porcentaje de logro de la segunda implementación es de un 65%, siendo las preguntas (a) del primer momento y (c) del segundo momento las que presentaron mayores dificultades. Curiosamente, estas preguntas tienen relación con la formulación de ecuaciones que describan el movimiento de los cuerpos; en el primer momento, el estado de equilibrio y en el segundo momento, el movimiento de la polea.

Tercera Implementación:

Pregunta	Respuesta Esperada	Respuesta no Esperada	Dificultad
Momento 1			
a	E1, E4, E8.	E3, E5, E6, E7, E9.	La ecuación que se plantea es $T - P$, ignorando el otro miembro que contiene la aceleración y la masa del cuerpo.

b	E1, E3, E4, E5, E6, E8, E9.	E7.	A pesar de reconocer que el cuerpo no tiene aceleración, no se reconoce el estado del cuerpo.
Actividad 1, Momento 2			
a	E4, E6, E8, E9.	E3, E5.	Se hace alusión a elementos que no están relacionados con la actividad.
b	E4, E6, E8, E9.	E1, E3, E5.	Existen imprecisiones al momento de explicar las respuestas, usando palabras redundantes o sin sentido.
c	E1, E6, E8, E9.	E3, E4.	No se logran formular dos ecuaciones que permitan explicar el movimiento del sistema, y en su lugar se entrega una sola.

En esta última implementación se desarrollaron 5 preguntas y como se dijo en el análisis a posteriori, se le dio un mayor énfasis a la pregunta (c) del segundo momento, pues nos permitiría relacionar la física y matemática tras la polea, de tal forma de reflexionar y encontrar otros objetos que nos permiten formular sistemas de ecuaciones.

El siguiente gráfico muestra el porcentaje de logro de esta tercera implementación.

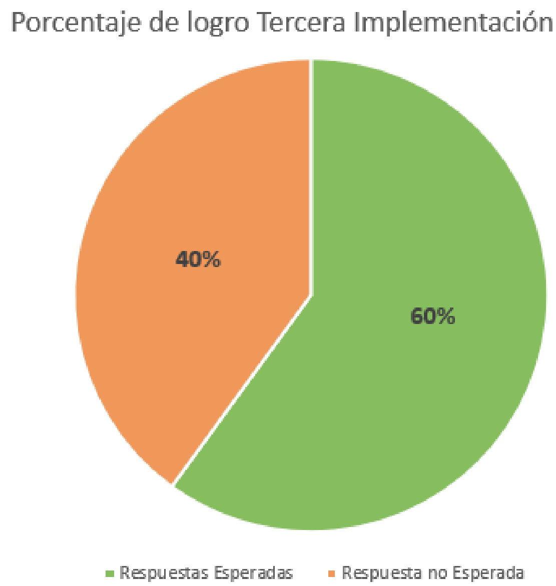


Figura 26: Gráfico del porcentaje de logro de la tercera implementación.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

En esta implementación se tuvo un porcentaje de logro del 60%, siendo la pregunta (a) del primer momento aquella que presentó mayores dificultades; se presume que fue debido a la confusión al momento de aplicar la segunda ley de Newton y comprender la acción de las fuerzas, sin embargo, al realizar la retroalimentación luego de la pregunta, los estudiantes lo comprendieron y pudieron desarrollar el resto de la actividad sin mayores dificultades.

A continuación, se muestra el gráfico con el porcentaje de logro en la pregunta (c) por cada implementación realizada:

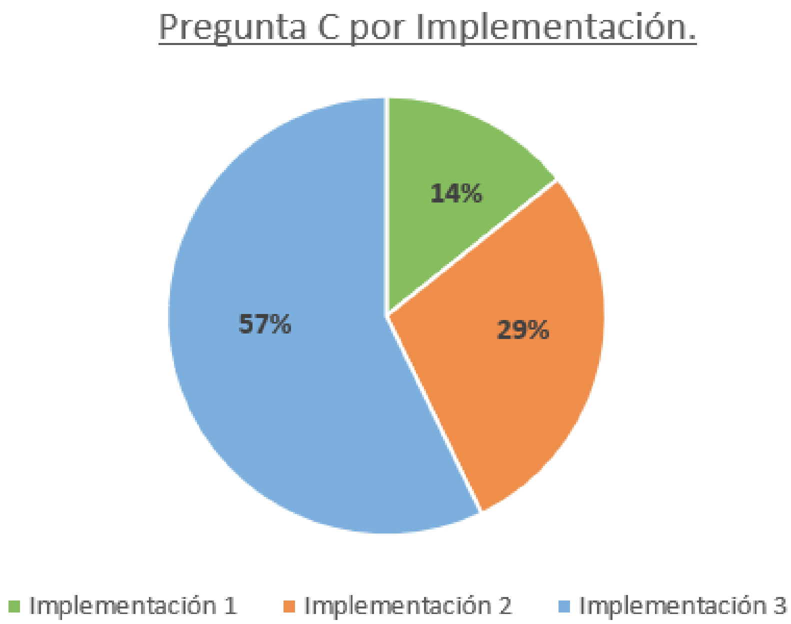


Figura 27: Gráfico del porcentaje de logro de la pregunta C.
Fuente: Elaboración propia, situación de aprendizaje, 2021.

A partir de la información de las anteriores tres tablas y la gráfica de las implementaciones realizadas, la tercera es la que presenta un mayor número de respuestas esperadas en la pregunta (c) del segundo momento, lo que permite deducir que el tiempo y la forma en la que se abordó esta pregunta, permitió que los estudiantes comprendieran la relación entre el sistema de la polea y los sistemas de ecuaciones.

CONCLUSIONES

El siguiente capítulo tiene por objetivo presentar de manera sistemática las conclusiones desarrolladas a lo largo de esta investigación, centrada en resignificar la noción de sistemas de ecuaciones lineales de cuarto medio, a través del diseño de una situación de aprendizaje que considere el uso de poleas desde una mirada socioepistemológica.

Es bien sabido que el conocimiento descontextualizado no es significativo, y es algo que se evidencia claramente en el desarrollo de nuestra investigación donde se planteó que el álgebra era una de las ramas conflictivas de la matemática debido a los elementos abstractos que se presentan y el lenguaje utilizado, es por ello que los estudiantes desarrollan ejercicios matemáticos siguiendo un estricto paso a paso.

En los documentos curriculares entregados por el MINEDUC se puede evidenciar una clara contradicción entre lo que se pretende enseñar y lo que se está enseñando, pues las actividades planteadas dentro de los planes y programas reflejan el objetivo de aprendizaje presentado. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el caso del texto del estudiante. Las actividades presentadas buscan desarrollar la mecanización matemática, en donde se siga un paso a paso para poder hallar la solución del problema, lo que se evidencia dentro del mismo texto, en donde se presenta un paso a paso de cada uno de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales como lo son: sustitución, reducción e igualación.

El planteamiento de estas actividades no permite que el estudiante logre aplicar y comprender el significado de los sistemas de ecuaciones en ejercicios contextualizados, pues en la mayoría de los casos no se comprenden y se aprenden solo para el momento en el que son evaluados y luego se olvidan.

Es debido a lo anterior que surge la necesidad de rediseñar el discurso matemático escolar y otorgar un significado a aquellos conocimientos que parecen tan ajenos a la realidad del estudiante, y que son vistos como una matemática sin sentido e inútil en la futura vida laboral. Para ello la teoría socioepistemológica propone elementos que nos permiten realizar este cambio, en primer lugar, comprender el contexto en el que se desarrolla el contenido matemático y comprender el cotidiano en el que es aplicada la matemática, nos permite articular el conocimiento y plantear actividades que tengan relación con situaciones reales y concretas.

En nuestro caso particular, el conocimiento físico es un elemento fundamental dentro del planteamiento y la elaboración de nuestra situación de aprendizaje, a partir de lo descrito en el análisis histórico y epistemológico de las poleas, se pudo evidenciar la relación natural que existe entre nuestro objeto y la matemática, presentando una característica sumamente relevante dentro de la teoría socioepistemológica y dentro del área de modelación, y que tiene relación directa con el planteamiento de una situación transversal a los ejes de matemática y física que permite desarrollar un conocimiento, y mejor aún, otorgar un nuevo significado a los sistemas de ecuaciones bajo un escenario como lo es el uso de las poleas.

Debido a lo anterior es que desarrolla una situación de aprendizaje que permita a los estudiantes realizar esta conexión y evidenciar el tránsito existente entre la matemática y física, permitiendo evidenciar en un objeto concreto los sistemas de ecuaciones. De esta forma se pretende que los estudiantes comprendan que los sistemas que involucren poleas u otros que involucren dos cuerpos unidos a través de una cuerda, permiten evidenciar sistemas de ecuaciones.

La situación de aprendizaje diseñada (véase anexo D. Situación de aprendizaje), busca que con cada pregunta se comprenda la matemática de manera funcional, a través del funcionamiento de la polea. Para ello, las preguntas (a) y (b) del segundo momento, permiten comprender de manera intuitiva el movimiento del sistema, mientras que en la pregunta (c) deben hacer la relación entre sus conocimientos matemáticos y la segunda ley de Newton para explicar a través de ecuaciones el movimiento del sistema.

Con base en el sistema de ecuaciones planteado, las siguientes preguntas buscan hacer que el estudiante reflexione acerca de la matemática y la física, permitiendo que se comprenda y signifique la noción existente sobre sistemas de ecuaciones.

Ahora bien, para evidenciar si efectivamente la situación de aprendizajes elaboraba permitía el rediseño del discurso matemático escolar y la resignificación, es que se utiliza la metodología planteada por Artigue (1995) con base en las cuatro fases de la ingeniería didáctica que son: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori, con la que fuimos capaces de analizar y sistematizar la información tras la implementación de nuestra actividad.

Durante las tres implementaciones realizadas nos enfrentamos a grupos que no tenían un dominio del contenido matemático, lo que pudimos dar cuenta en la evaluación diagnóstica realizada en cada una de las implementaciones, lo que se evidenció al momento de realizar preguntas relacionadas con el planteamiento de ecuaciones que evidenciaran el movimiento del sistema y con las preguntas enfocadas a la comprensión del sistema de ecuaciones tras las poleas. Lo que se contrasta con el análisis a priori realizado, permitiendo aprovechar la ausencia de conocimientos previos para ofrecerle significados a la formulación de un sistema de ecuaciones, permitiéndonos problematizar la situación diseñada sobre la necesidad de representar el movimiento del sistema planteado a través de dos ecuaciones lineales.

Es debido a lo anterior que el tiempo invertido en las actividades resultó ser más extenso en las tres implementaciones, pues se debía comprender la transición entre el registro verbal al registro algebraico a través de ecuaciones, lo que provocó que algunas preguntas de la actividad no fueran implementadas o desarrolladas de manera apresurada.

Dentro de la planificación de nuestra actividad, la participación de los estudiantes jugaba un papel fundamental, ya que estaba centrada en ellos y en el hipotético caso de que no respondieran, no podríamos pasar a la siguiente pregunta.

Cada grupo de estudiantes tenía características únicas, el primero de ellos fue el que se mostró más participativo, tanto a través del Nearpod (plataforma digital utilizada para recopilar las respuestas de los estudiantes) como usando el micrófono, mientras que los estudiantes de la segunda implementación resultaron ser poco participativos a la hora de desarrollar la actividad, provocando en reiteradas ocasiones que esta se encontrara detenida más tiempo del destinado en una sola pregunta. Por último, el tercer grupo de estudiantes se mostró mucho más participativo que el segundo, lo que, sumado a la comprensión de los contenidos físicos involucrados en la actividad, permitió que se comprendiera con mayor facilidad la relación entre las poleas y sistemas de ecuaciones.

Desde el principio al final de la implementación, la tendencia fue la elaboración de una ecuación que explique el movimiento de todo el sistema. Esto se puede deber principalmente a dos razones, la primera de ellas está relacionada con los conocimientos previos de los estudiantes y su comprensión de los conceptos matemáticos que los adherían a situaciones cotidianas que se modelaran a través de una ecuación; y la segunda de ellas está relacionada a la elaboración propiamente tal de la situación de aprendizaje, la cual invitaba al estudiante a cuestionar sus conocimientos y dar cuenta de que una ecuación explicaba el movimiento de un cuerpo en donde surgía la necesidad de plantear otra ecuación que se relacionara con la primera y evidenciara la resistencia a la caída del cuerpo de mayor masa.

Los resultados obtenidos de las tres implementaciones muestran que la situación de aprendizaje planteada cumple con el objetivo propuesto, se pudo dar cuenta del conflicto que se generaba en los estudiantes cuando intentaban describir el movimiento de un cuerpo en reposo en el primer momento y luego describir el movimiento existente en la polea en el segundo, comprendiendo que una ecuación no bastaba para explicar lo que ocurría con el cuerpo.

Es por ello que al término de esta investigación podemos dar respuesta a la pregunta ¿Cómo se resignifica la noción de sistemas de ecuaciones a través del uso de poleas desde una mirada socioepistemológica? Teniendo en consideración que los estudiantes se vieron en la necesidad de buscar otra forma de explicar el movimiento de la polea, utilizando el contexto entregado, el sentido común, la física y la matemática relacionada al planteamiento de ecuaciones, por lo que es posible decir que a través de la comprensión del movimiento de un sistema de poleas, es posible resignificar la noción existente de sistemas de ecuaciones a través de la situación de aprendizaje planteada, esto lo podemos evidenciar en las respuestas entregadas por los estudiantes al realizar el cierre de la actividad (Véase Anexo B: Cierre de situación de aprendizaje), en donde algunos de ellos comprendieron que el planteamiento de un sistema que involucre dos cuerpos y una cuerda, permite la formulación de un sistema de ecuaciones.

A raíz de los resultados y la información presentada en esta investigación, es posible concluir que los contenidos entregados por el MINEDUC aíslan la matemática del cotidiano del estudiante (en este caso la física), siendo explicada a través de un paso a paso y dificultando la comprensión de los contenidos, haciéndose necesario el desarrollo de propuestas que permitan modificar este discurso matemático escolar dominante y permitan generar un verdadero aprendizaje significativo.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, F. (2013). El modelo matemático de Fourier para el calentamiento terrestre. *Revista Ciencia y Tecnología*. 13, 293-398.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: una empresa docente.

Baroody, A (2000). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.* (4a. ed.). Madrid: Visor.

Borges Ruiz, M. (2016) Las relaciones interdisciplinarias en el tratamiento de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales en 9° grado. Trabajo de Diploma. Universidad Central Marta Abreu de las Villas. Facultad de Educación Media. Departamento de Ciencias Exactas. Santa Clara, Cuba.

Brousseau, B. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cádiz, F., Hevia, S. y Reyes, S. (2013) *Mecánica Clásica*. Recuperado el 13 de Julio del 2021 de http://www.fis.puc.cl/~ldf/Libro_de_Fisica/Home_files/LibroFisica.pdf

Calderón, D. y León, O. (2012). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. *Lenguaje y Educación: Perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio*, 71-104.

Camacho-Ríos, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales: Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista iberoamericana de educación superior*, *2*(3), 152-171.

Campos Motta, M. E. (2017) *Los sistemas de ecuaciones lineales como instrumento de modelización en la secundaria*. Tesis para optar al grado de maestro en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Postgrado. San Miguel, Perú.

Cantoral, R. (1995). Matemática, Matemática Escolar y Matemática Educativa. En Farfán R. (Ed.), *Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (1-10). La Habana, Cuba: Ministerio de Educación de Cuba.

Cantoral, R. (2016). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. (2da. ed.). Barcelona, España: Gedisa

Cantoral, R. Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, 6 (1), 27-40.

Cantoral, R. y Farfán, R (2008). Socioepistemología y matemáticas. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (740-753). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9-28.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: El caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 5-17.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado. (1a. ed.). Buenos Aires, Argentina: AIQUE.

Cole, EM. y Volver, W. Biographia de Atwood George en *Dictionary of Scientific Biography*. Recuperado el 13 de Julio del 2021 de https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/atwood-george.

Cordero, F. (2016). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En Díaz, L. y Arrieta, J. (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas de Modelación de la Matemática Educativa*. 59-88. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad. Barcelona, España: Editorial Gedisa, S.A.

Correa M., Molfino, V., y Schaffel, V. (2018). Matemática educativa: una visión-ilustrada-de su evolución. *Educación matemática*, *30*(2), 232-255.

Cristi, I. (2003) Sobre palancas, poleas y garruchas. Santiago de Chile. Recuperado el 13 de Julio del 2021 de http://casanchi.org/fis/05_palancas.pdf.

De Faria, E. (2008). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, Universidad de Costa Rica.

Del Valle, T. (2015) *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica*. Tesis para optar al Grado de Doctor en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias. Instituto de Matemáticas. Valparaíso, Chile.

Espinoza, L. y Cantoral, R. (2011). *Una caracterización de los contextos de significación desde la socioepistemología.* En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 889-896. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Figueroa Vera, R. E. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas.* Tesis para optar al grado de maestro en enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de Graduados. Lima, Perú.

Gómez, K. y Cordero, F (2010). Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 919-927. Coacalco, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Gómez, K., Silva, H., Cordero, F. y Soto, D. (2014). Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1457-1464. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, 45, 17-28

Guerra González, A. A. (2012). *Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones.* Título de maestro en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia.

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R., Mena-Lorca, J. (2018) El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas.* 36(1), 99-115.

Ley N° 20.370. (2009). *Establece la ley general de educación*. Ministerio de Educación. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile.

Lezama, J. (2005) Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 8(3). 339-362.

Maturana Andrade, J. L. (2017). *Situaciones didácticas y resolución de problemas cotidianos: Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables en el grado noveno de la I.E. Humberto Jordan Mazuera.* Trabajo de Grado. Universidad ICESI. Escuela de Ciencias de la Educación. Maestría en Educación. Santiago de Cali, Colombia.

Mendoza, J., Cordero, F., Solís, M. y Gómez, K. (2018). The Use of Mathematical Knowledge within Communities of Engineers. From Object to Mathematical Functionality. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*. 32(62). 1219-1243.

Mendoza, J., y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 11(1), 36-61.

Ministerio de Educación (2015). *Bases Curriculares séptimo básico a segundo medio.* (1a. ed.). Santiago, Chile. (Recuperado el 27 de mayo del 2021 de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34949_Bases.pdf).

Ministerio de Educación (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. (1a. ed.). Santiago, Chile.

Ministerio de Educación, (2016). *Fundamentos para la elaboración de bases curriculares en educación de personas jóvenes y adultas*. Santiago, Chile. (Recuperado el 27 de mayo del 2021 de https://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/10/Documento-fundante_BBCC_EPJA_versionCNED.pdf).

Morales, A., Mena-Lorca, J. y González, A. (2016). Modelación matemática y la matemática de un investigador en ciencias: en pos de la innovación y de la transdisciplina. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1, 192-199.

Ochoviet Filgueiras T. C. (2009). *Sobre el concepto de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Tesis que para obtener el grado de doctora en matemática educativa. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en ciencia aplicada y tecnología Avanzada. Unidad Legaria. Montevideo, Uruguay

Opazo, C., Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2017). La identidad disciplinar desde la construcción social del conocimiento matemático. Un programa permanente de la formación del docente. En Serna, L. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (866-873). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía,* 23(71), 158-180.

Pezoa, M. y Morales, A. (2016). El rol de la modelación en una situación que resignifica el concepto de función. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias,* 11 (2), 52-64.

Pinto Vergara, A. I. (2018). *La derivada como razón de cambio, una articulación entre la escuela y cálculo de primer año de universidad*. Trabajo para optar al Título de Magíster en Educación Matemática. Universidad de Santiago. Facultad de ciencias. Departamento de matemática y ciencia de la computación. Santiago, Chile.

Piña Vergara, N. (2017) *Sobre el concepto conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales en* $\mathbb{R}^2$ *desde la Teoría de registros de representación semiótica por medio de problemas de cinemática unidimensional.* Trabajo para optar al Título de Magíster en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias. Instituto de Matemáticas. Valparaíso, Chile.

Regalado A., Delgado F., Martínez R. y Peralta E. (2014). Balanceo de Ecuaciones químicas integrando las asignaturas de química general, algebra lineal y computación: Un enfoque de aprendizaje activo. *Formación Universitaria,* 7(2), 29-39.

Reyes-Gasperini, D. (2013). La transversalidad de la proporcionalidad. Recuperado el 13 de Junio del 2021 de https://www.researchgate.net/publication/262764470_La_transversalidad_de_la_proporcionalidad/citations

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente. La práctica docente más allá de la didáctica… ¿Qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista De La Escuela De Ciencias De La Educación*, 2(11), 155-176.

Ríos Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Omnia,* 13 (2), 120-157.

Rosas, L. (2013). *Una visión Socioepistemológica del rol de la argumentación gráfica en la resignificación del conocimiento matemático en torno a la noción de polígono*. Tesis de maestría en didáctica de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas, Valparaíso, Chile

Sánchez, N. y Del Valle, M. (2016). Álgebra escolar: una revisión preliminar en relación a errores y dificultades. En Rosas, A. (Ed.). *Avances en Matemática Educativa. Teorías y Enfoques* (60-75). México: Lectorum.

Soto, D. y Cantoral, R. (2010). ¿Fracaso o exclusión en el campo de la matemática? En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 839-848. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, 28 (50), 1525-1544.

Strathem, P. (1999) *Arquimedes y la palanca.* Madrid: Siglo XXI

Suárez, L. y Cordero, F (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3 (1), 51-58.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación - graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 13 (4-II), 319-333.

Trejo E. y Camarena P. (2011). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia. *Educación matemática*, 23(2), 65-90.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa,* 9(46), 75-87.

Villa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *TecnoLógicas*, (19), 63-85.

Anexos

Anexo C. Ejercicios planteados en documentos curriculares.

■ ACTIVIDADES *EN TU CUADERNO*

1. Verifica si los valores de x e y son solución de cada sistema de ecuaciones.

a. $\begin{array}{r} x+y=14 \\ x-y=10 \end{array}$ $\begin{array}{l} x=12 \\ y=2 \end{array}$ **b.** $\begin{array}{r} -3x+y=5 \\ x-5y=8 \end{array}$ $\begin{array}{l} x=-3 \\ y=7 \end{array}$ **c.** $\begin{array}{r} 3x-5y=-1 \\ x+3y=2 \end{array}$ $\begin{array}{l} x=0{,}5 \\ y=0{,}5 \end{array}$

2. Resuelve de manera gráfica cada sistema de ecuaciones. Luego, clasifícalo en compatible, compatible indeterminado o incompatible.

a. $\begin{array}{r} 3x+2y=4 \\ -3x+y=-7 \end{array}$ **b.** $\begin{array}{r} x+y=7 \\ -x-y=9 \end{array}$ **c.** $\begin{array}{r} x+y=10 \\ 2x+2y=20 \end{array}$ **d.** $\begin{array}{r} -0{,}5x+y=2 \\ 2x+y=-3 \end{array}$

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método que estimes conveniente.

a. $\begin{array}{r} 7x-11y=10 \\ x+2y=5 \end{array}$ **b.** $\begin{array}{r} a-9b=-4 \\ a+5b=3 \end{array}$ **c.** $\begin{array}{r} 3x-7y=15 \\ 3x+6y=2 \end{array}$ **d.** $\begin{array}{r} c+2d=-1 \\ 2c-3d=5 \end{array}$

■ ACTIVIDADES *EN TU CUADERNO*

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de igualación.

a. $\begin{array}{r} 5x-4y=-2 \\ -2x+2y=5 \end{array}$ **c.** $\begin{array}{r} 3x=4y+1 \\ x=5-y \end{array}$ **e.** $\begin{array}{r} 3x-2y=1 \\ 5y-4x=2 \end{array}$ **g.** $\begin{array}{r} -2x-y=5 \\ y-7x=10 \end{array}$

b. $\begin{array}{r} 7x+4y=1 \\ x+2y=5 \end{array}$ **d.** $\begin{array}{r} -3x-4y=-17 \\ -x+y=-1 \end{array}$ **f.** $\begin{array}{r} x-y=0 \\ y+4x=1 \end{array}$ **h.** $\begin{array}{r} -x-5=y \\ x-2y=8 \end{array}$

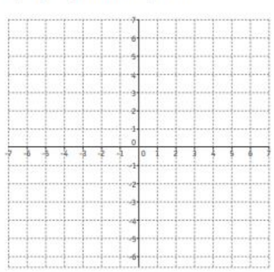
2. Resuelve los siguientes problemas.

a. La diferencia de dos números es 85 y uno de ellos es 20 unidades mayor que el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

b. Dafne tiene 14 monedas en su alcancía. En ella solo hay monedas de \$50 y de \$100. Si en total suman \$1 100, ¿cuántas monedas de \$50 y de \$100 hay?

Actividades

1. Marcan los puntos A (2, 0) y B (0, 3) sobre el sistema cartesiano de coordenadas. Grafican una recta que pasa por ambos puntos.



a. Elaboran la ecuación funcional: $y = m \cdot x + n$, que corresponde a la recta que pasa por A y B.

b. Determinan las coordenadas de más puntos que pertenecen al gráfico. Luego completan la tabla siguiente:

x	−4			2	4		8	
y		−3	3			−12		−6

c. Transforman la ecuación funcional a la forma $a \cdot x + b \cdot y = c$ (a, b, $c \in Z$).

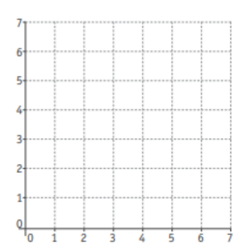
d. Verifican que las coordenadas de los puntos del ejercicio b) también son soluciones de la ecuación $a \cdot x + b \cdot y = c$, reconociendo que hay infinitas soluciones.

2. Una empresa automotriz quiere proyectar la venta de dos modelos de autos para el resto del año, considerando que a fines de febrero se han vendido 90 unidades del modelo A y 60 del modelo B. Para los próximos meses, se estima que la venta mensual del modelo A será de 15 autos y del modelo B, de 20 autos. Se quiere saber el mes en el cual la venta del modelo B podría igualar la venta del modelo A.

a. Completan la siguiente tabla:

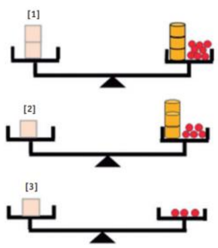
FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
90										
60										

b. Confeccionan el gráfico eligiendo los ejes y la escala que muestra el desarrollo de la venta de ambos modelos de auto, y determinan el mes en el cual la venta del modelo B iguala la venta del modelo A.



- Elaboran las ecuaciones de las funciones afines que modelan la venta de ambos tipos de auto. La variable independiente x representa los meses y la variable dependiente y representa el número de autos vendidos.

5. En la imagen se muestran tres balanzas en el estado de equilibrio. Se transforma la balanza [1] en la balanza [3], sabiendo el estado de equilibrio de la balanza [2].



Ecuación [3]:

a. Describen el proceso que se realiza en la transformación de la balanza [1] en la balanza [3].
b. Representan las tres balanzas con ecuaciones de la forma $ax = by + c$.
c. Describen el proceso matemático que transforma la ecuación [1] y la ecuación [2] en la ecuación [3].
d. Sustituyen la ecuación [3] en la ecuación [2] y determinan así el valor de x.
e. Verifican que el par (x,y), que resulta de las transformaciones de las ecuaciones, resuelve el sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales representado por las balanzas [1] y [2].

6. Resuelven los siguientes sistemas 2 x 2 de ecuaciones lineales eligiendo el método más conveniente. Realizan la prueba con ambas ecuaciones del sistema:

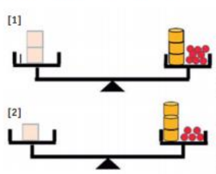
a. $\begin{array}{l|} y = 4x + 21 \\ y = -1{,}5x - 1 \end{array}$

b. $\begin{array}{l|} -3x + 0{,}5y = 3{,}5 \\ x = 3y - 12{,}5 \end{array}$

c. $\begin{array}{l|} 2x + 4y = -2 \\ 5x - 2y = 19 \end{array}$

4. Representan dos balanzas con un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales. Los cubos representan la variable y; los cilindros representan la variable x. Las bolitas representan unidades de masa.

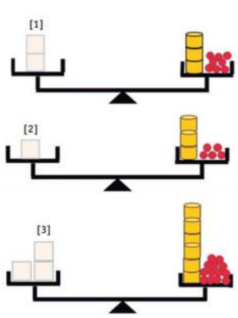
a. Elaboran las ecuaciones lineales y las escriben en la forma $ax = by + c$.



Ecuación [1]:

Ecuación [2]:

b. ¿Cómo se obtiene la siguiente balanza [3]? Describen verbalmente el proceso mostrado en el siguiente dibujo. Conjeturan sobre el estado del equilibrio.
Responden: ¿Con qué proceso matemático se transforman las ecuaciones [1] y [2] en la ecuación [3]? Realizan simbólicamente la transformación. Conjeturan sobre la igualdad.



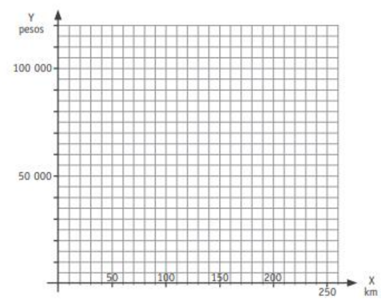
Ecuación [3]:

- Representan ambas ecuaciones en un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales y lo resuelven mediante el método de igualar ambas ecuaciones.

® **Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA 20 de 1° medio.**

3. Dos ofertas de arrendamiento de un furgón de mudanza, A y B, se igualan en el kilometraje de 200 km a un precio de \$ 80 000. En la oferta A se cobran \$ 100 por kilómetro recorrido y en la oferta B se cobran \$ 150 por kilómetro recorrido.

a. Confeccionan los gráficos que representan ambas ofertas de arrendamiento en el sistema de coordenadas dado y determinan los puntos de intersección con el eje Y.
b. Elaboran las ecuaciones funcionales de las funciones afines que modelan el arrendamiento del furgón de mudanzas para ambas ofertas.
c. Determinan algebraicamente los puntos de intersección con el eje Y. Comparan el resultado con la solución gráfica.



d. Representan ambas ecuaciones en un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales, lo resuelven y comparan el resultado con los datos iniciales.

8. En un trabajo en grupos sobre sistemas 2 x 2 de ecuaciones lineales, los alumnos Jorge, Ana, Juan, María, Luis y Sonia discuten sobre las posibilidades de soluciones de un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales. Para un sistema 2 x 2, el grupo de Ana encontró una solución $x_1 = a$ con $y_1 = b$, y otra solución más de $x_2 = c$ con $y_2 = d$.

- Jorge dice que no se puede encontrar más de una solución de un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales. Pero Ana insiste en que el sistema de su grupo tiene infinitas soluciones.
- Juan dice que $x = a + c$ e $y = c + d$ también es solución del mismo sistema.
- María agrega otra solución del mismo sistema: $x = a - c$ e $y = b - d$.
- Luisa supone que $x = a + b$ e $y = c + d$ también deberían ser soluciones del mismo sistema.
- Sonia compone otra solución del mismo sistema: $x = a + \frac{(a - c)}{2}$ e $y = \frac{(b - d)}{2}$.

¿Alguien tiene razón o todos están equivocados? Justifican con un ejemplo.

9. Una vela delgada tiene una altura de 36 cm y otra vela más gruesa, una altura de 14 cm. Se prenden ambas velas al mismo tiempo. Al quemarse, la vela delgada baja 3 cm cada hora, mientras que la otra baja 1 cm por hora. ¿En qué tiempo ambas velas tendrán la misma altura?

- Elaboran la ecuación que describe el proceso de la quema de la vela delgada.
- Elaboran la ecuación que describe el proceso de la quema de la vela gruesa.
- Resuelven gráficamente el problema.
- Resuelven algebraicamente el problema.

Anexo D. Documentos Curriculares.

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

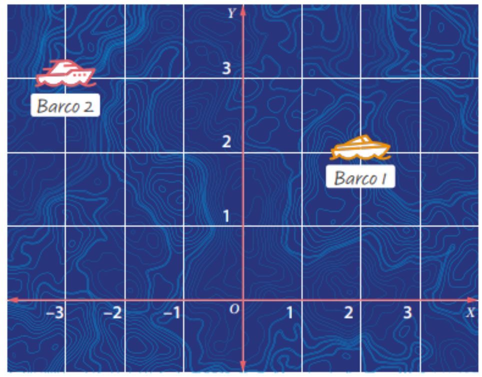
Un dron sobrevuela la costa y registra dos barcos que se aproximan en línea recta. El sistema de observación ha establecido que sus trayectorias están determinadas por las siguientes ecuaciones:

 $4x - 3y = 2$

 $5x + 2y = -9$

Las coordenadas x e y se refieren a la posición relativa respecto a un punto de referencia en el mar.

Con el fin de prevenir un choque, se necesita conocer el punto en común de las trayectorias.



- ¿Qué puntos del plano pertenecen a la trayectoria del *Barco 1*? ¿Y a la trayectoria del *Barco 2*? Identifica tres puntos en cada caso.
- ¿Cómo determinarías el punto en común de las trayectorias? Comenta con tu curso.

Recurso Web

Al ingresar al *link http://es.battleship-game.org/* puedes realizar un juego online de combate naval.

UNIDAD 2	
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
Se espera que las y los estudiantes sean capaces de:	Los y las estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA 4 Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2 x 2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con *software* educativo.	• Verifican que una sola ecuación en dos variables $ax + by = c$ (con a, b, c fijo) tiene como solución infinitos pares ordenados (x, y) de números. • Transforman ecuaciones de la forma $ax + by = c$ a la forma $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}$, reconociendo la función afín. • Representan sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones, de manera concreta (balanzas), pictórica (gráficos) o simbólica. • Elaboran los gráficos de un sistema de la forma: $ax + by = c$ $dx + ey = f$ • Resuelven sistemas de ecuaciones lineales utilizando métodos algebraicos de resolución, como eliminación por igualación, sustitución y adición. • Modelan situaciones de la vida diaria y de ciencias, con sistemas 2 x 2 de ecuaciones lineales.

Anexo E. Métodos de resolución planteados en documentos curriculares.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

■ Método gráfico

Para resolver **gráficamente** un sistema de ecuaciones lineales, se representan en el plano cartesiano las rectas correspondientes a cada ecuación identificando el punto de intersección, en caso de que exista, como la solución del sistema de ecuaciones.

■ EJEMPLO 1

Resuelve el problema inicial de la página 70.

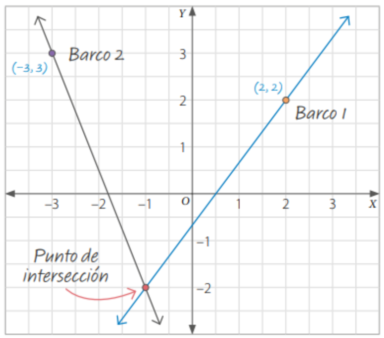
Al representar las rectas correspondientes a las trayectorias de los barcos en el plano cartesiano, se observa que se intersecan en el punto (–1, –2).

Luego, la solución del sistema es $x = -1$ e $y = -2$, por lo que el sistema es compatible.

Para comprobar, se reemplazan estos valores en el sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l|}4x - 3y = 2 \\ 5x + 2y = -9\end{array} \quad \begin{array}{l}\blacktriangleright\ 4 \cdot -1 - 3 \cdot -2 = -4 + 6 = 2 \\ \blacktriangleright\ 5 \cdot -1 + 2 \cdot -2 = -5 - 4 = -9\end{array}$$

Como las igualdades se cumplen, el punto en común de las trayectorias es (–1, –2).



■ Método de sustitución

■ EJEMPLO

Las edades de Marco (x) y Valeria (y) suman 77 años. Si en dos años más la edad de Marco será el doble de la de Valeria, ¿cuál es la edad de cada uno? Resuelve utilizando el método de sustitución.

Plantea el sistema que modela la situación del problema.

$$\begin{array}{l|}x + y = 77 \\ x + 2 = 2(y + 2)\end{array} \ \blacktriangleright\ \begin{array}{l|}x + y = 77 \\ x + 2 = 2y + 4\end{array} \ \blacktriangleright\ \begin{array}{l|}x + y = 77 \\ x - 2y = 2\end{array}$$

Para resolver el sistema utilizando el método de sustitución puedes considerar los siguientes pasos:

1º «Despeja» una de las incógnitas (x o y) en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

Se despeja x en la ecuación $x + y = 77$, de donde se tiene que $x = 77 - y$.

2º Reemplaza la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema y resuelve.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ (77 - y) - 2y &= 2 \quad \longrightarrow \text{ Se reemplaza } x = 77 - y \\ 77 - 3y &= 2 \\ -3y &= -75 \\ y &= 25 \end{aligned}$$

3º Reemplaza la solución de la ecuación en una de las ecuaciones del sistema y resuelve para la incógnita restante.

$$\begin{aligned} x + y &= 77 \\ x + 25 &= 77 \quad \longrightarrow \text{ Se reemplaza } y = 25. \\ x &= 52 \end{aligned}$$

4º Verifica y escribe la solución.

Se reemplaza $x = 52$, $y = 25$ en cada ecuación del sistema, es decir:

$$\begin{array}{ll} x + y = 77 & \blacktriangleright\ 52 + 25 = 77 \\ x - 2y = 2 & \blacktriangleright\ 52 - 2 \cdot 25 = 52 - 50 = 2 \end{array}$$

Luego, la solución del sistema es $x = 52$, $y = 25$, por lo que la edad de Marco es 52 años y la de Valeria 25 años.

Método de reducción

Ejemplo

Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l}4a - 3b = -1\\ 3a + 4b = 2\end{array}\right|$ **utilizando el método de reducción.**

Para resolver el sistema empleando este método, puedes considerar los siguientes pasos:

1º Multiplica una o ambas ecuaciones del sistema por ciertos números, de modo tal que resulte que los coeficientes numéricos de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sean inversos aditivos.

En este caso, se puede multiplicar la primera ecuación por –3 y la segunda por 4.

$$\left.\begin{array}{l}4a - 3b = -1\\ 3a + 4b = 2\end{array}\right| \begin{array}{l}/\cdot -3\\ /\cdot 4\end{array} \;\blacktriangleright\; \left.\begin{array}{l}-12a + 9b = 3\\ 12a + 16b = 8\end{array}\right|$$

2º Suma ambas ecuaciones, de manera que quede una ecuación con solo una incógnita y resuelve.

$$-12a + 12a + 9b + 16b = 3 + 8 \;\blacktriangleright\; 25b = 11 \;\blacktriangleright\; b = \frac{11}{25}$$

3º Reemplaza la solución obtenida en una de las ecuaciones del sistema y resuelve.

$$3a + 4b = 2 \;\blacktriangleright\; 3a + 4 \cdot \frac{11}{25} = 2 \;\blacktriangleright\; 3a = \frac{6}{25} \;\blacktriangleright\; a = \frac{2}{25}$$

4º Verifica y escribe la solución.

Se reemplaza $a = \frac{2}{25}$, $b = \frac{11}{25}$ en cada ecuación del sistema, es decir:

$$4a - 3b = -1 \;\blacktriangleright\; 4 \cdot \frac{2}{25} - 3 \cdot \frac{11}{25} = \frac{8}{25} - \frac{33}{25} = -\frac{25}{25} = -1$$

$$3a + 4b = 2 \;\blacktriangleright\; 3 \cdot \frac{2}{25} + 4 \cdot \frac{11}{25} = \frac{6}{25} + \frac{44}{25} = \frac{50}{25} = 2$$

La solución del sistema es $a = \frac{2}{25}$, $b = \frac{11}{25}$.

Método de igualación

Ejemplo

Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r}2x - 3y = 3\\ x + 5y = 8\end{array}\right|$ **utilizando el método de igualación.**

Para resolver el sistema empleando este método, puedes considerar los siguientes pasos:

1º «Despeja» la misma incógnita en las dos ecuaciones. En este caso se despejará x.

$$2x - 3y = 3 \;\blacktriangleright\; x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y \qquad\qquad x + 5y = 8 \;\blacktriangleright\; x = 8 - 5y$$

2º Iguala las expresiones obtenidas y resuelve la ecuación.

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}y = 8 - 5y$$
$$\frac{3}{2}y + 5y = 8 - \frac{3}{2} \quad /\cdot 2$$
$$3y + 10y = 16 - 3$$
$$13y = 13$$
$$y = 1$$

3º Reemplaza el valor de la incógnita obtenida en una de las ecuaciones del sistema y resuelve.

$$\begin{array}{r}x + 5y = 8\\ x + 5 \cdot 1 = 8\\ x = 3\end{array} \longrightarrow \text{Se reemplaza } y = 1.$$

4º Verifica y escribe la solución.

Se reemplaza $x = 3$, $y = 1$ en cada ecuación del sistema, es decir:

$$2x - 3y = 3 \;\blacktriangleright\; 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3 \qquad x + 5y = 8 \;\blacktriangleright\; 3 + 5 \cdot 1 = 3 + 5 = 8$$

Finalmente, la solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$.

Anexo F. Situación de Aprendizaje.

Sistemas de ecuaciones a través de Poleas

Reflexionado en torno al video:

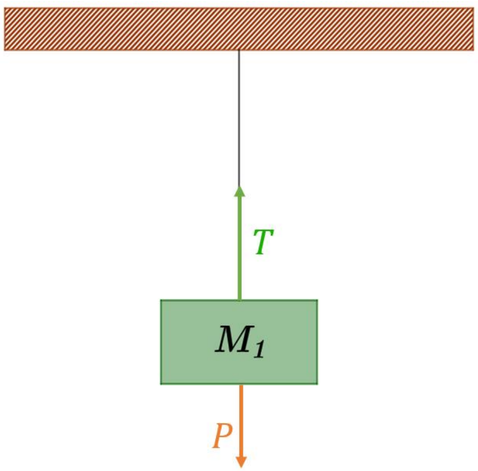
- ¿Cuáles son las Magnitudes mencionadas en el video?
- ¿Cuáles son las Fuerzas mencionadas en el video?
- ¿Cómo podemos escribir la suma de todas las fuerzas?
- ¿Dónde podemos representar las fuerzas que interactúan en un cuerpo?

Se presentará la siguiente situación. Considere que la polea no tiene roce y el cable es inextensible.

Primer Momento

Actividad

1. A través del diagrama de cuerpo libre planteado en el video, responda las siguientes preguntas:



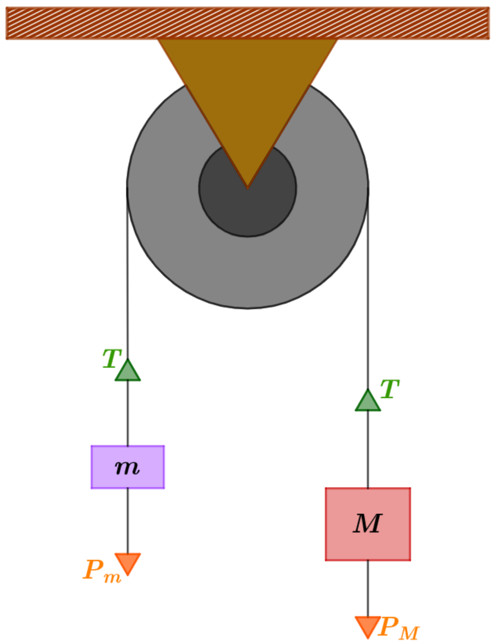
a) Utilizando la segunda ley de Newton ¿Qué ecuación podemos formular?

b) ¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?

Segundo Momento

Actividad

1. José está realizando un experimento para medir la aceleración de las masas m y M tal como se muestra en el siguiente diagrama. Considere que la polea es una polea ideal (sin roce y masa despreciable) y el cable es inextensible.



a) Si M tiene mayor masa que m, ¿Qué ocurre con el sistema?

b) En base a la respuesta obtenida en (b), ¿Cuál objeto tira del otro?

c) Considerando (b) y (c). Plantee ecuaciones que permitan encontrar la aceleración del sistema. Utilice la segunda ley de Newton ($F_n = m \cdot a$).

d) ¿Es posible plantear las ecuaciones como un sistema? Argumente.

a) ¿El sistema tiene solución desde el punto de vista físico?

b) ¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente.

c) Desde un punto de vista físico, ¿Qué significa que la tensión tenga signos distintos?

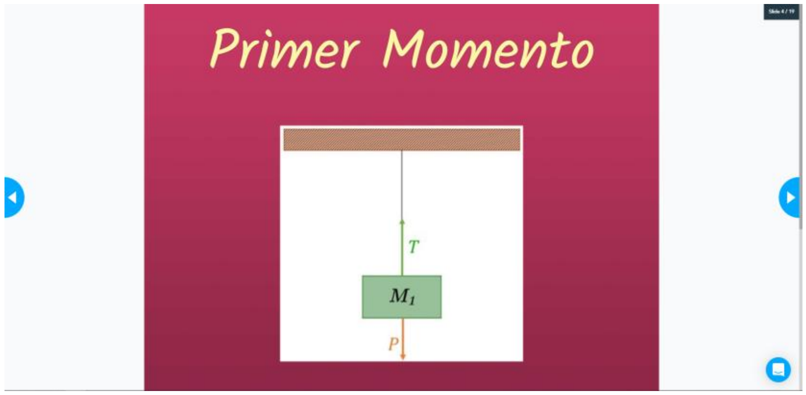
1. Supongamos:

a) ¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.

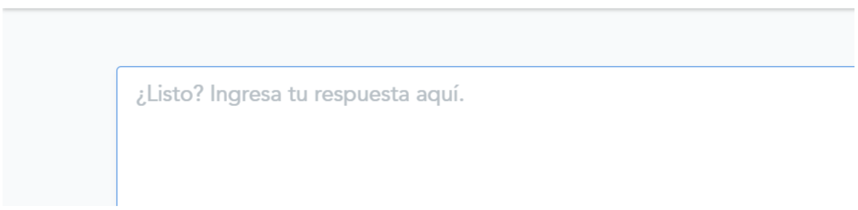
b) ¿Qué ocurre si $m = M$? Fundamente.

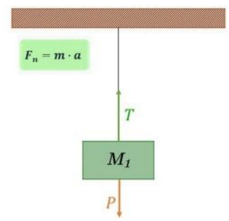
A modo de cierre de esta primera parte se realiza una lluvia de ideas y se les pregunta a los estudiantes en qué situaciones podemos encontrar poleas y sistemas de ecuaciones.

En formato digital utilizando Nearpood:

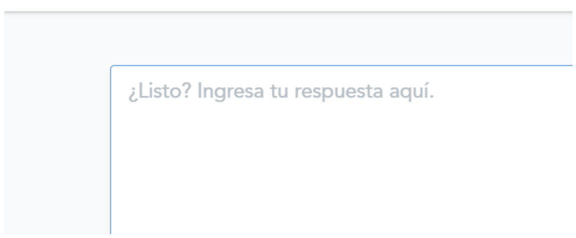


a. Utilizando la segunda ley de Newton. ¿Qué ecuación(es) podemos formular?¿Qué valores conocemos?



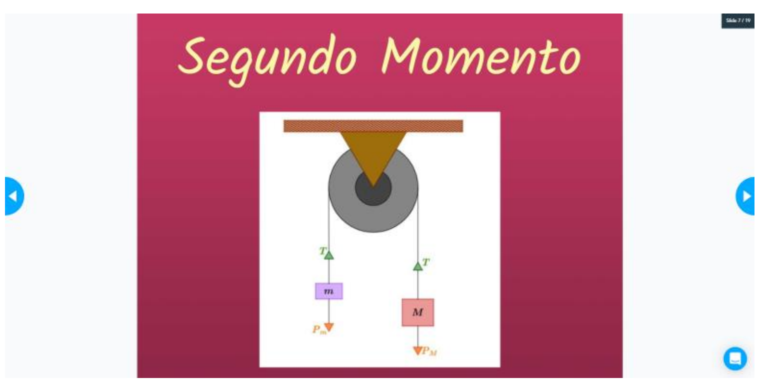


b) ¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?

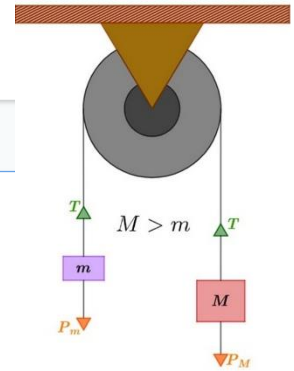


$$T - P = m \cdot a$$

$$T - P = 0$$



a) Si **M** tiene mayor masa que **m**, ¿Qué ocurre con el sistema?



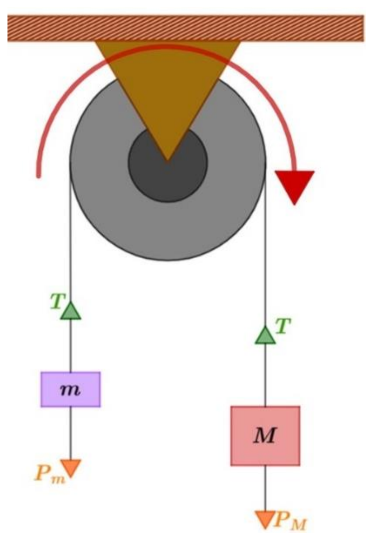
¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.

b) En base a la respuesta obtenida en (b), ¿Cuál objeto tira del otro?, ¿Cuál tira con mayor fuerza?

¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.

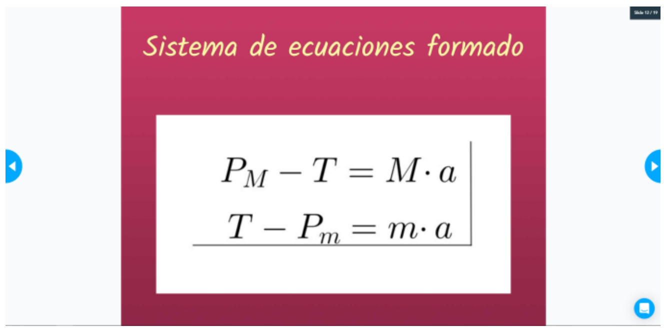
c) Considerando (a) y (b). Plantee ecuaciones que permitan encontrar la aceleración del sistema. Utilice la segunda ley de Newton $F_n = m \cdot a$

¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.



d) ¿Es posible plantear las ecuaciones como un **sistema**?¿Cuáles serían susincógnitas? Argumente.

¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.



e) ¿El sistema tiene solución desde el punto de vista físico? Argumente.

¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.

$$\begin{aligned} P_M - T &= M \cdot a \\ T - P_m &= m \cdot a \end{aligned}$$

f) ¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente.

¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.

$$\begin{aligned} P_M - T &= M \cdot a \\ T - P_m &= m \cdot a \end{aligned}$$

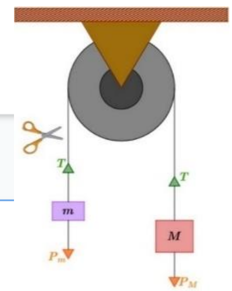
g) Desde un punto de vista físico, ¿Qué significa que la tensión tenga signos distintos?

¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.

$$\begin{aligned} P_M - T &= M \cdot a \\ T - P_m &= m \cdot a \end{aligned}$$

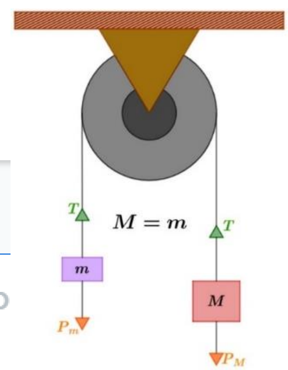
a) ¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.

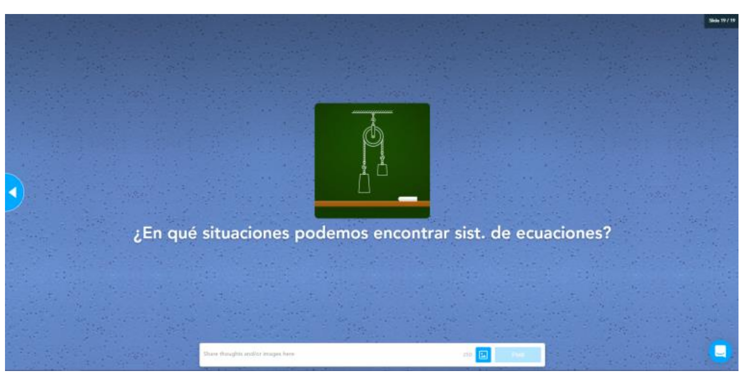
¿Listo? Ingresa tu respuesta aquí.



b) ¿Qué ocurre si **M = m**? Fundamente.

¿Listo? Ingresa tu resp





Anexo G. Carta enviada a expertos.

Santiago de Chile, mayo 2021

Estimado evaluador:

Nos dirigimos a usted para solicitar la validación de los dos instrumentos utilizados en la investigación de tesina para optar al grado de Licenciado en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática con Mención en Estadística Educacional de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), que lleva por título “Diseño de una propuesta de enseñanza para resignificar la noción de sistemas de ecuaciones bajo la perspectiva socioepistemológica”.

Uno de estos instrumentos corresponde a la guía de trabajo “Sistemas de ecuaciones a través de poleas”, la cual es una situación de aprendizaje matemático sobre el uso de las poleas que fue creada bajo el alero de la teoría socioepistemológica. El otro instrumento por validar corresponde a un video utilizado para la implementación de la situación de poleas. El fin de utilizar estos instrumentos, es la implementación de una situación de aprendizaje dondelos estudiantes se vean involucrados con elementos físicos concretos e identifiquen la matemática que hay tras ellos y lograr que resignifiquen la noción de sistemas de ecuaciones. Estos instrumentos serán aplicados a estudiantes de cuarto año medio del colegio científico humanista Colegio El Prado.

Los instrumentos se han enviado adjuntos a esta evaluación en archivo Word, mientras que el video será publicado en YouTube y el enlace será adjuntado a los respectivos correos de los evaluadores.

Para validar los siguientes instrumentos solicitamos contestar las evaluaciones que vienen a continuación.

Situación de aprendizaje, uso de poleas: Será la primera en ser implementada y corresponde al diseño de una situación de aprendizaje sostenida desde el uso de las poleas para resignificar la noción de sistemas de ecuaciones, contenido matemático estudiado en 1° medio.

Video para la implementación: Consiste en un video elaborado por los investigadores que se utilizará para clarificar y mostrar en qué consisten los momentos centrales de las situaciones de aprendizaje. Este video tendrá una extensión de 6 minutos, y explicara las Leyes de Newton y las fuerzas involucradas en el movimiento y equilibrio de cuerpos.

La situación de aprendizaje se llevará a cabo en una sesión de 60 minutos.

En una primera instancia, se les enviará el video de fuerzas y leyes de Newton a los estudiantes, el cual se mostrara nuevamente al inicio de la clase, para posteriormente realizar una retroalimentación en torno a sus apreciaciones. Esto dará paso a la actividad inicial con un objeto suspendido, donde los estudiantes identificarán las fuerzas que están presentes y realizarán un diagrama de cuerpo libre. En base a esto responderán algunas preguntas.

Posteriormente se pasará a la segunda parte de la actividad, donde se presentará una situación con poleas donde se buscará que los estudiantes logren comprender el movimiento del diagrama. Luego se buscará que los estudiantes logren aplicar la segunda ley de Newton y logren construir una ecuación para cada uno de los objetos suspendidos derivando en un sistema de ecuaciones, el cual será formalizado de la siguiente manera:

$$T - P_1 = m_1 \bullet \vec{a} \, P_2 - T = M_2 \bullet \vec{a}$$

Para concluir la sesión, se realizarán algunos supuestos y se buscará dar sentido a la reducción planteada en el sistema de ecuaciones y finalmente se buscarán situaciones en las que estén presentes poleas.

Quedamos atentos a sus comentarios:

Christopher Cabañas y Sebastián Carvacho.

Evaluación para validación.

Para evaluar la Actividad se le proporciona una Escala Likert[1] para la validación de la guía de trabajo: “Sistemas de ecuaciones a través de poleas, el cual fue creado bajo el alero de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), implementadas cada una durante sus respectivas sesiones de trabajo a través de la plataforma Meet proporcionada por el establecimiento.

Por último, para el Video de la implementación se proporciona una Escala Likert para la validación del material audiovisual, el cual busca ser de utilidad para que los estudiantes comprendan los conceptos involucrados y clarifique la actividad.

Para responder las Escala Likert, marque con una X la respuesta escogida entre las seis opciones que muestran las casillas. Además, se presentará una tabla en la que se da espacio para las observaciones y recomendaciones generales de cada uno de los puntos.

[1] Los modelos de Escala Likert y tablas utilizadas fueron rescatados de Formato para validación de expertos – Guía para la validación de instrumentos de investigación (Universidad Adventista de Chile, sf).

Experto 1: Nicolás Piña Vergara

Valoración general:
Por favor, marque con una X la respuesta escogida de entre las opciones casillas que identifiquen su preferencia que se presentan:

I.Guía de trabajo: Sistemas de ecuaciones a través de poleas.

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (**1** = muy en desacuerdo; **2** = en desacuerdo; **3** = en desacuerdo más que en acuerdo; **4** = de acuerdo más que en desacuerdo; **5** = de acuerdo; **6** = muy de acuerdo)	**Grado de acuerdo**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Las actividades son coherentes con el objetivo de que los estudiantes logren plantear un sistema de ecuación.					x	
Las actividades propician espacios para la retroalimentación.						x
Las preguntas permiten reflexionar acerca de la física y la matemática que hay detrás.					x	
Los diagramas ayudan a facilitar la comprensión de la situación planteada.						x
Existe claridad, cohesión y coherencia entre las preguntas y las actividades, a modo de que estas sean comprendidas por todos los estudiantes.				x		
La cantidad de actividades y preguntas es adecuada considerando el tiempo de implementación					x	

	Evaluación general de la Guía de Trabajo			
	Excelente	**Buena**	**Regular**	**Deficiente**
Validez de la Guía de Trabajo		x		

Observaciones y recomendaciones en general de la Guía de Trabajo:	
Motivos por los que se considera no adecuada	El problema dos es un problema físico que podría complicar su resolución por la no identificación de la dirección de las fuerzas. Eso se mejoraría incluyendo los vectores fuerzas en el diagrama, como en el primer momento. Esto porque su objetivo no es que los y las estudiantes resuelvan un problema físico, sino que sean capaces de plantear un sistema de ecuaciones dada ciertas condiciones.
Motivos por los que se considera no pertinente	No es pertinente debido al objetivo declarado difiere del objetivo del problema planteado, ya que su propósito no es que los y las estudiantes resuelvan un problema físico, sino que sean capaces de plantear un sistema de ecuaciones dadas ciertas condiciones.
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Las propuestas de mejoras fueron planteadas en los documentos en formato de comentarios.

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	
Apruebo el instrumento con reparos	x
Rechazo el instrumento	

II.Video para la implementación de Poleas

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (**1** = muy en desacuerdo; **2** = en desacuerdo; **3** = en desacuerdo más que en acuerdo; **4** = de acuerdo más que en desacuerdo; **5** = de acuerdo; **6** = muy de acuerdo)	**Grado de acuerdo**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
El video se presenta de forma creativa y presenta elementos visualmente atractivos que faciliten la comprensión de los estudiantes.					x	
El material audiovisual es coherente y se encuentra directamente relacionado con lo que aparece en la Guía de trabajo, siendo un apoyo para los estudiantes						x
Los contenidos entregados en el video son comprensibles y no presentan errores conceptuales.				x		
El lenguaje utilizado en los videos es claro y adecuado al contexto de los estudiantes					x	
La extensión de los videos es la adecuada y permite mantener la atención en la actividad trabajada				x		

	Evaluación general de los Videos			
	Excelente	**Buena**	**Regular**	**Deficiente**
Validez del contenido de los Videos		x		

Observaciones y recomendaciones en general de los Videos:	
Motivos por los que se considera no adecuada	¿Es tan relevante explicar al detalle las variables físicas en juego? Quizás planteando una situación similar se podrían las magnitudes que quieren que los estudiantes interioricen. Les planteo una pregunta. Según el propósito de su situación, ¿es relevante que él o la estudiante sepa, por ejemplo, la diferencia, al detalle, entre masa y peso?
Motivos por los que se considera no pertinente	Se escapa del propósito inicial de la actividad. Que no se convierta en un resumen de una clase tradicional de física. Problematicen una situación y planteen la "enseñanza" de los conceptos relevantes.
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Con respecto a la edición es importante cuidar el ruido de fondo, ya que a lo largo del video se escucha un zumbido en el micrófono de quien habla. Por otro lado, es fundamental referencial las imágenes a menos que sean sin derechos de autor. Con respecto al contenido, deben encontrar una definición distinta a la segunda Ley de Newton, ya que en la que describen no hace referencia a la masa y la ley, con ciertas condiciones, se resume f=ma. Además, las fuerzas no se repelen, son los cuerpos lo que lo hacen. Y la repulsión se menciona en fuerzas a distancia, por ejemplo, dos imanes se repelen debido a la repulsión magnética. Un pequeño alcance, la primera ley de Newton también es válida si se aplican fuerzas externas que suman cero. Y el movimiento que permanecerá será un movimiento rectilíneo uniforme. Para agregar en la tercera ley de Newton es importante mencionar que estas fuerzas actúan en distintos cuerpos, por tanto, no se anulan. Entonces, si mueves la pared, igualmente está en juego la tercera ley. No son excluyentes.

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	
Apruebo el instrumento con reparos	x
Rechazo el instrumento	

Identificación del experto

Nombre y Apellidos	**Nicolás Piña Vergara**
Filiación (ocupación, grado académico y lugar de trabajo)	**Licenciado en ciencias exactas, Profesor de Matemática y física y Magister en didáctica de la Matemática. Profesor instructor de Lic. En astronomía, Universidad Central de Chile.**
Correo electrónico	**n.pina.vergara@gmail.com**
Teléfono o celular	**+56998142603**
Fecha de la validación (día, mes y año)	**04/06/2021**
Firma	

Muchas gracias por su valiosa contribución a la validación de los instrumentos.

Experto 2: Herma Casanova Morales

Por favor, marque con una X la respuesta escogida de entre las opciones casillas que identifiquen su preferencia que se presentan:

I. Guía de trabajo: Sistemas de ecuaciones a través de poleas.

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (1 = muy en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = en desacuerdo más que en acuerdo; 4 = de acuerdo más que en desacuerdo; 5 = de acuerdo; 6 = muy de acuerdo)	**Grado de acuerdo**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Las actividades son coherentes con el objetivo de que los estudiantes logren plantear un sistema de ecuación.						x
Las actividades propician espacios para la retroalimentación.					x	
Las preguntas permiten reflexionar acerca de la física y la matemática que hay detrás.						x
Los diagramas ayudan a facilitar la comprensión de la situación planteada.						x
Existe claridad, cohesión y coherencia entre las preguntas y las actividades, a modo de que estas sean comprendidas por todos los estudiantes.						x
La cantidad de actividades y preguntas es adecuada considerando el tiempo de implementación						x

	Evaluación general de la Guía de Trabajo			
	Excelente	**Buena**	**Regular**	**Deficiente**
Validez de la Guía de Trabajo	x			

Observaciones y recomendaciones en general de la Guía de Trabajo:

Motivos por los que se considera no adecuada	
Motivos por los que se considera no pertinente	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Considerar tiempo de aplicación cada hora pedagógica de 30minutos.

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	x
Apruebo el instrumento con reparos	
Rechazo el instrumento	

II. Video para la implementación de Poleas

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (1 = muy en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = en desacuerdo más que en acuerdo; 4 = de acuerdo más que en desacuerdo; 5 = de acuerdo; 6 = muy de acuerdo)	**Grado de acuerdo**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
El video se presenta de forma creativa y presenta elementos visualmente atractivos que faciliten la comprensión de los estudiantes.						x
El material audiovisual es coherente y se encuentra directamente relacionado con lo que aparece en la Guía de trabajo, siendo un apoyo para los estudiantes						x
Los contenidos entregados en el video son comprensibles y no presentan errores conceptuales.						x
El lenguaje utilizado en los videos es claro y adecuado al contexto de los estudiantes						x
La extensión del video es la adecuada y permite mantener la atención en la actividad trabajada						x

	Evaluación general del Video			
	Excelente	**Buena**	**Regular**	**Deficiente**
Validez del contenido del Video	x			

Observaciones y recomendaciones en general del Video:	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Motivos por los que se considera no pertinente	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Buen material para abordar previo a la guía de trabajo

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	x
Apruebo el instrumento con reparos	
Rechazo el instrumento	

III. Identificación del experto

Nombre y Apellidos	**Herma Casanova Morales**
Filiación (ocupación, grado académico y lugar detrabajo)	**Profesora de Matemáticas, Licenciada en Matemáticas, Colegio el Prado**
Correo electrónico	**hcasanova@colegioelprado.cl**
Teléfono o celular	**+56969004981**
Fecha de la validación (día, mes y año)	**9 de Junio 2021**
Firma	

Muchas gracias por su valiosa contribución a la validación de los instrumentos.

as opciones casillas que

Experto 3: Ivonne Bustamante

I. Guía de trabajo: Sistemas de ecuaciones a través de poleas.

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (1 = muy en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = en desacuerdo más que en acuerdo; 4 = de acuerdo más que en desacuerdo; 5 = de acuerdo; 6 = muy de acuerdo)	Grado de acuerdo					
	1	2	3	4	5	6
Las actividades son coherentes con el objetivo de que los estudiantes logren plantear un sistema de ecuación.					X	
Las actividades propician espacios para la retroalimentación.					X	
Las preguntas permiten reflexionar acerca de la fisica y la matemática que hay detrás.						X
Los diagramas ayudan a facilitar la comprensión de la situación planteada.						X
Existe claridad, cohesión y coherencia entre las preguntas y las actividades, a modo de que estas sean comprendidas por todos los estudiantes.					X	
La cantidad de actividades y preguntas es adecuada considerando el tiempo de implementación					X	

	Evaluación general de la Guía de Trabajo			
	Excelente	Buena	Regular	Deficiente
Validez de la Guia de Trabajo		X		

Observaciones y recomendaciones en general de la Guía de Trabajo:	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Motivos por los que se considera no pertinente	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Me parece adecuada y pertinente, solamente deben recibir mini adecuaciones según el contexto en el que se este dando. Pero en cuanto a la ayuda que requieran para realizar la guia los estudiantes.

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	x
Apruebo el instrumento con reparos	
Rechazo el instrumento	

I. Video para la implementación de Poleas

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (1 = muy en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = en desacuerdo más que en acuerdo; 4 = de acuerdo más que en desacuerdo; 5 = de acuerdo; 6 = muy de acuerdo)	Grado de acuerdo					
	1	2	3	4	5	6
El video se presenta de forma creativa y presenta elementos visualmente atractivos que faciliten la comprensión de los estudiantes.						x
El material audiovisual es coherente y se encuentra directamente relacionado con lo que aparece en la Guia de trabajo, siendo un apoyo para los estudiantes						x
Los contenidos entregados en el video son comprensibles y no presentan errores conceptuales.						x
El lenguaje utilizado en los videos es claro y adecuado al contexto de los estudiantes						x
La extensión del video es la adecuada y permite mantener la atención en la actividad trabajada					x	

	Evaluación general del Video			
	Excelente	Buena	Regular	Deficiente
Validez del contenido del Video	x			

Observaciones y recomendaciones en general del Video:	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Motivos por los que se considera no pertinente	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	Sin propuestas de mejora.

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	x
Apruebo el instrumento con reparos	
Rechazo el instrumento	

Experto 4: Sylvia Rosales Romero

III. Identificación del experto

Nombre y Apellidos	**Ivonne Bustamante Calderón**
Filiación (ocupación, grado académico y lugar de trabajo)	**Profesora de matemáticas, licenciada en educación matemática, Colegio Alma Mater.**
Correo electrónico	**Ivoonne.f@gmail.com**
Teléfono o celular	**+56948978114**
Fecha de la validación (día, mes y año)	**24 de junio**
Firma	

Muchas gracias por su valiosa contribución a la validación de los instrumentos.

Valoración general:

Por favor, marque con una X la respuesta escogida de entre las opciones casillas que identifiquen su preferencia que se presentan:

I. Guía de trabajo: Sistemas de ecuaciones a través de poleas.

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (1 = muy en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = en desacuerdo más que en acuerdo; 4 = de acuerdo más que en desacuerdo; 5 = de acuerdo; 6 = muy de acuerdo)	**Grado de acuerdo**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Las actividades son coherentes con el objetivo de que los estudiantes logren plantear un sistema de ecuación.						x
Las actividades propician espacios para la retroalimentación.						x
Las preguntas permiten reflexionar acerca de la física y la matemática que hay detrás.						x
Los diagramas ayudan a facilitar la comprensión de la situación planteada.						x
Existe claridad, cohesión y coherencia entre las preguntas y las actividades, a modo de que estas sean comprendidas por todos los estudiantes.						x
La cantidad de actividades y preguntas es adecuada considerando el tiempo de implementación					x	

	Evaluación general de la Guía de Trabajo			
	Excelente	**Buena**	**Regular**	**Deficiente**
Validez de la Guía de Trabajo	x			

Observaciones y recomendaciones en general de la Guía de Trabajo:	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Motivos por los que se considera no pertinente	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	x
Apruebo el instrumento con reparos	
Rechazo el instrumento	

II. Video para la implementación de Poleas

Indique su grado de acuerdo frente a las siguientes afirmaciones: (1 = muy en desacuerdo; 2 = en desacuerdo; 3 = en desacuerdo más que en acuerdo; 4 = de acuerdo más que en desacuerdo; 5 = de acuerdo; 6 = muy de acuerdo)	**Grado de acuerdo**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
El video se presenta de forma creativa y presenta elementos visualmente atractivos que faciliten la comprensión de los estudiantes.						x
El material audiovisual es coherente y se encuentra directamente relacionado con lo que aparece en la Guía de trabajo, siendo un apoyo para los estudiantes						x
Los contenidos entregados en el video son comprensibles y no presentan errores conceptuales.						x
El lenguaje utilizado en los videos es claro y adecuado al contexto de los estudiantes						x
La extensión del video es la adecuada y permite mantener la atención en la actividad trabajada						x

	Evaluación general del Video			
	Excelente	**Buena**	**Regular**	**Deficiente**
Validez del contenido del Video	x			

Observaciones y recomendaciones en general del Video:	
Motivos por los que se considera no adecuada	
Motivos por los que se considera no pertinente	
Propuestas de mejora (modificación, sustitución o supresión)	

Marque la opción escogida con una X

Apruebo el instrumento	x
Apruebo el instrumento con reparos	
Rechazo el instrumento	

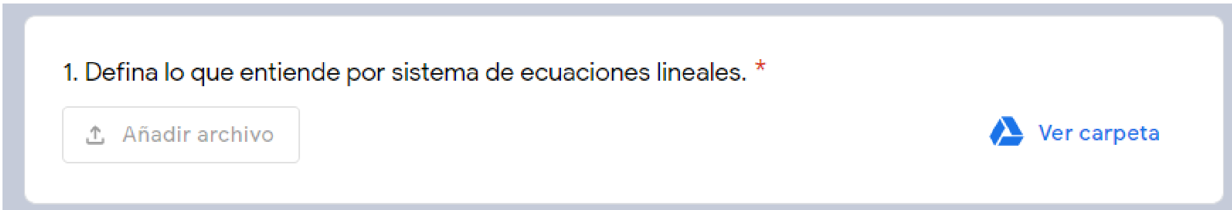
III. Identificación del experto

Nombre y Apellidos	**Sylvia Rosales Romero**
Filiación (ocupación, grado académico y lugar de trabajo)	**Profesora de Matematica, Cursos 3° y 4° medios del Liceo Fidel Pinochet Le-Brun**
Correo electrónico	**sylrosales@gmail.com**
Teléfono o celular	**+56961224785**
Fecha de la validación (día, mes y año)	**01/07/2021**
Firma	

Muchas gracias por su valiosa contribución a la validación de los instrumentos.

Anexo H. Evaluación Diagnóstica.

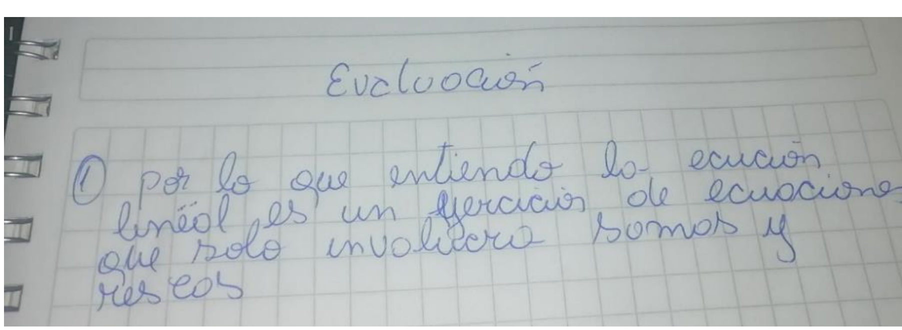
Implementación 1:



1. Defina lo que entiende por sistema de ecuaciones lineales. *

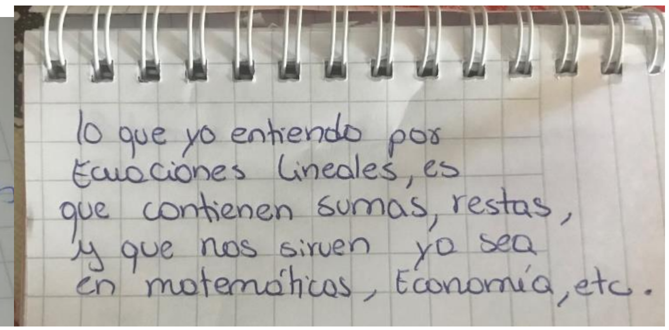
Añadir archivo

Ver carpeta

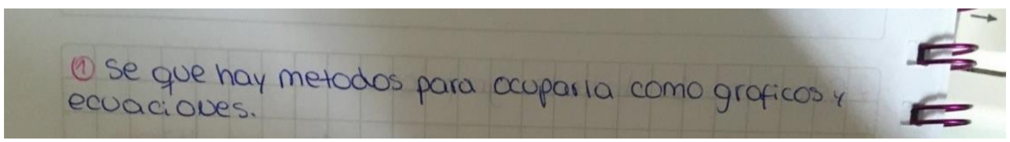


Evaluación

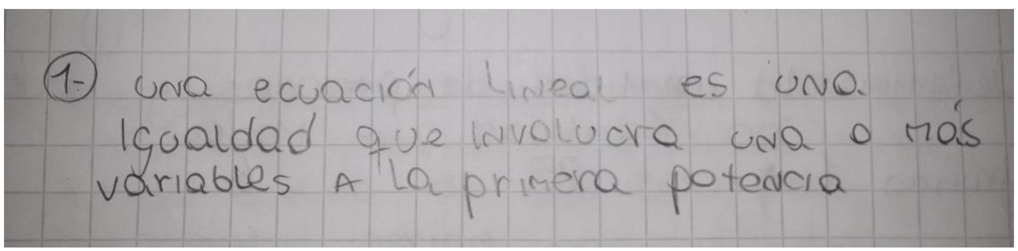
① por lo que entiendo la ecuación lineal es un ejercicio de ecuaciones que solo involucra sumas y restas



lo que yo entiendo por Ecuaciones Lineales, es que contienen sumas, restas, y que nos sirven ya sea en matemáticas, Economía, etc.



① Se que hay metodos para ocuparla como graficos y ecuaciones.



1- una ecuación lineal es una Igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia

1) Los que tienen incognita

no sé cómo se hace :)

1_ No sé lo que es pero por el nombre supongo que trata de ecuaciones graficadas Lineal o algo así.

-> Sistema de ecuación Lineal es como una ecuación.

1. SUPONGO QUE RESOLVER EJERCICIOS POR LINEAS

Evaluación

1 por lo que entiendo la ecuación lineal es un ejercicio de ecuaciones que solo involucra sumas y restas

CUESTIONARIO

1_ no recuerdo, pero si lo repasamos volveré a acordarme.

1) Siendo sincero no lo se :c

2. ¿En qué situaciones u objetos concretos podemos identificar sistemas de ecuaciones?

Añadir archivo

Ver carpeta

② No se ¨̈

no lo sé

No lo sé

2) En los ~~[illegible]~~ problemas matematicos

2) en problemas matematicos.

-> Lo podemos encontrar en problemas con ecuaciones.

2. SISTEMA DE ECUACIONES SUPONGO QUE EN TODO LO QUE DEBAMOS HACER CALCULO, POR ECUACIONES

② se puede usar en la ecuación cuadrática pero ahí entra en el juego las raíces ($\sqrt{}$)

2.- Cuando queremos saber el valor de algo.

2) en los sistemas lineales

3. Rosa ganó $1379 vendiendo 25 barras de chocolate a dos precios distintos. Si la barra de chocolate blanco y negro tienen un valor de $60 y $49 respectivamente. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa esta situación?

Añadir archivo

Ver carpeta

-> No lo se.

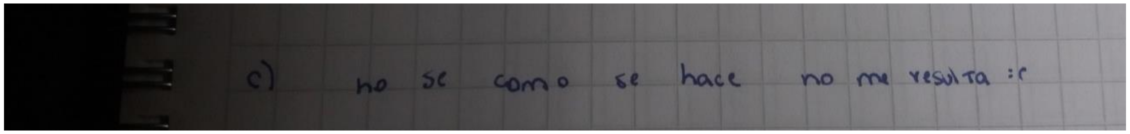
no lo sé

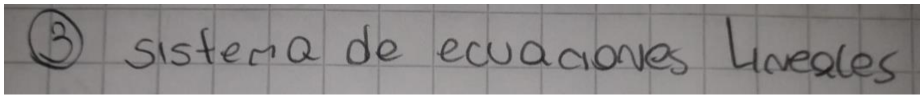
3) no se, me compliqué

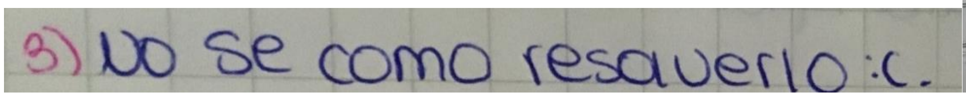
3. SUMA O MULTIPLICACIÓN? NO ESTOY SEGURA

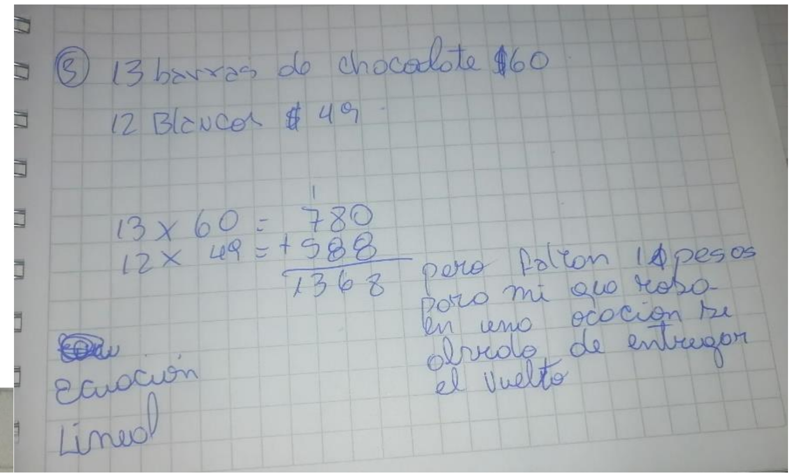
3.- 25 = 1379
Chocolate blanco = $60
Chocolate negro = $49
R\ no se como se representaría.

1379 -> 25 / 2 precios
60
49
$(X \cdot 60) + (Y \cdot 49) = 1379$
$X + Y = 25$ barras









Implementación 2:

Pregunta abierta ¿Qué entiendes por sistema de ecuaciones lineales?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	A		**Es un problema matematicos en donde puede haber . Suma, resta, multiplicaciones, divisiones . Potencia etc.**
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		Como un sistema, compuesto por más partes, de una ecuación que debería tener un incognita?
24/06/2021	B		Tendrá que ver por los componentes?
24/06/2021	C		
24/06/2021	C		una ecuación que tiene sumas y restas de una variable a la primera potencia
24/06/2021	D		**es un conjunto de ecuaciones lineales, definidas sobre un cuerpo o un anillo**
24/06/2021	F		Una ecuación en donde ambas variables son múltiples o sumadas
24/06/2021	M		**Nada**
24/06/2021	s		no me acuerdo
24/06/2021	Y		**Nose**

Estadísticas de la Encuesta

31% **Sin respuesta**

69% **Free Text**

Pregunta abierta ¿En qué situaciones u objetos concretos podemos identificar sistemas de ecuaciones?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		la verdad no sé porque falto a clases por problemas familiares
24/06/2021	A		**En trayectorias de un auto, cuando van en distinta aceleracion**
24/06/2021	B		Objetos no se, pero una situación sería en la ingeniería.
24/06/2021	C		no lo sé
24/06/2021	C		**Graficar sistemas de movimientos?**
24/06/2021	D		Cuando una ecuación tiene dos incógnitas
24/06/2021	F		**No se**
24/06/2021	N		Ni idea
24/06/2021	s		**creo que cuando hay sumas restas con letras y numeros?**
24/06/2021	Y		No lo sé

Estadísticas de la Encuesta

23% **Sin respuesta**

77% **Free Text**

Implementación 3:

Pregunta abierta ¿Qué entiendes por sistema de ecuaciones lineales?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
01/07/2021	B		**si me acuerdo a verla visto pero no me acuerdo como resolverla**
01/07/2021	D		**involucra una o mas variables a la primera potencia**
01/07/2021	D		**Una ecuacion lineal es una ecuacion con mas de una variable y no tiene productos entre ella**
01/07/2021	F		No sé lo que es
01/07/2021	jc		**la estudie pero no la recuerdo**
01/07/2021	K		**conjunto de ecuaciones lineales, definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo**
01/07/2021	L		es una que involucra una y más variables ! solamente sumas y restas ? bueno no me acuerdo muy bien
01/07/2021	M		Un modo de ecuación el cual sigue un método predeterminado
01/07/2021	O		Lo ví en algún momento y por lo que recuerdo un poco es un sistema de ecuaciones que va paso a paso y son super largas jaja y los últimos número son siempre iguales
01/07/2021	S		**Esta relacionado con un sistema lineal**

Estadísticas de la Encuesta

Pregunta abierta ¿En qué situaciones u objetos concretos podemos identificar sistemas de ecuaciones?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
01/07/2021	B		en un plano cartesiano y en algún mapa
01/07/2021	D		**No recuerdo**
01/07/2021	D		**No recuerdo muy bien**
01/07/2021	F		**No recuerdo haberlo visto**
01/07/2021	jc		**no los recuerdo**
01/07/2021	K		**no recuerdo**
01/07/2021	L		**no se llevar a cabo un ejemplo de ejemplar alguna situacion**
01/07/2021	M		En álgebra
01/07/2021	O		En la vida en si se pueden ocupar ecuaciones más que nada en los estudios de ingeniería, matemática y en lo largo de la vida igual

Estadísticas de la Encuesta

Anexo I. Respuestas de los estudiantes a la situación de aprendizaje.

Implementación 1:

Pregunta abierta a. Utilizando la segunda ley de Newton. ¿Qué ecuación(es) podemos formular?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
11/06/2021	A		**La tension menos el peso, lo cual esto nos dara igual a la masa por la aceleracion.. esto sera 0**
11/06/2021	C		
11/06/2021	c		**Fn m . a**
11/06/2021	F		T-P=M la aceleración no esta por que esta en equilibrio y queda nula
11/06/2021	N		Tension × peso = 0
11/06/2021	R		Formula= Mxa m= F/a
11/06/2021	R		**F**
11/06/2021	R		
11/06/2021	s		Se podria decir t-p= que nos daria la masa de dicho objeto
11/06/2021	S		M*a= 0
11/06/2021	s		t-p= m
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

Pregunta abierta b) ¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
11/06/2021	A		**Se puede decir que estaria en estado nulo ya que es el resultado entre el peso y la tension**
11/06/2021	C		**El movimiento ya es nulo**
11/06/2021	c		especificar cuál es su punto de aplicación, su módulo, la dirección y el sentido
11/06/2021	F		si la aceleración es cero , la multiplicación de todo eso que en cero
11/06/2021	N		Que al multiplicar la aceleración que es 0 ya que está sin movimiento la masa queda nula
11/06/2021	R		Cuerpo es igual a la masa y según la ecuación es tensión menos peso y como no hay movimiento da resultado 0
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		
11/06/2021	s		**que su movimiento seria nulo ya que ambas fuerzas ejercen entre si manteniendo el objeto en equilibrio**
11/06/2021	S		**El movimiento es nulo**
11/06/2021	s		**el movimiento es 0 o sea que es nulo o no hay movimiento**
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

Pregunta abierta a) Si M tiene mayor masa que m, ¿Qué ocurre con el sistema?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
11/06/2021	A		**Por un tema de logica, el cuerpo al pesar mas bajaria y el que pesa menos subiria**
11/06/2021	C		**Que M tendria mas peso**
11/06/2021	c		tendría mas peso
11/06/2021	F		a simple vista la M mayor tiene mas peso que la m menor y bajaría con el peso de la M
11/06/2021	N		La M tiene más peso que la m haciendo que la m suba y la M baje más como una balanza
11/06/2021	R		**La polea M bajaria mucho mas que m y tendria mas peso en el lado de M**
11/06/2021	R		la polea giraría hacia M
11/06/2021	R		
11/06/2021	s		**m grande tendria mas peso entonces la polea no se mantendria en equilibrio**
11/06/2021	S		En el cuerpo rosado existe mucha más masa que en el cuerpo
11/06/2021	s		**la M mas larga tiene mas peso por lo tanto se carga hacia ese lado**
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

17% **Sin respuesta**

83% **Free Text**

Pregunta abierta b) En base a la respuesta obtenida en (b), ¿Cuál objeto tira del otro?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
11/06/2021	A		**M tira a la m**
11/06/2021	C		**La M tira mas por que tiene mas peso**
11/06/2021	c		**la m tira hacia la m chica para bajo u.u**
11/06/2021	F		**que la M mayuscula como tiene mas peso se lleva a la m minuscula t**
11/06/2021	N		**M tira de m**
11/06/2021	R		**M tira el peso de m, por lo cual M baja**
11/06/2021	R		**M tira de m**
11/06/2021	R		
11/06/2021	s		M Grande tiraria de m pequeña
11/06/2021	S		**M roja tira a m rosa**
11/06/2021	s		**la m mas larga porque tiene mas peso**
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

17% **Sin respuesta**

83% **Free Text**

Pregunta abierta c) Considerando (b) y (c). Plantee ecuaciones que permitan encontrar la aceleración del sistema. Utilice la segunda ley de Newton F_(n)=m·a

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
11/06/2021	A		**Hay que considerar el peso y la tension, esto sera igual a la masa por la aceleracion....Obviamente necesitamos el valor de estos...**
11/06/2021	C		
11/06/2021	c		t x p = m x a
11/06/2021	F		T-P=MXA Fn=MXA estas dos servirían
11/06/2021	M		T-p=m×a P-t = M
11/06/2021	R		a= v/t
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		
11/06/2021	s		t - p = masa . aceleracion la masa de M seria mayor que la de m entonces tendria movimiento ya que no serian igual su masa
11/06/2021	S		Tension - peso= Masa
11/06/2021	s		t-p = m*a
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

Pregunta abierta d) ¿Es posible plantear las ecuaciones como un sistema? Argumente.

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
11/06/2021	A		**Si, ya que, todo tiene un proceso ... en este caso las ecuaciones**
11/06/2021	C		**Sii**
11/06/2021	cı		**si, para que**
11/06/2021	Fı		si, pero depende de la situación y del problema
11/06/2021	M		Si, ya que ayuda a diferenciar la fuerza, y calcular la aceleración y masa que tienen kis
11/06/2021	R		Si, para calcular ya sea la aceleración o otras cosas
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		
11/06/2021	sa		Si, por que podemos sacar varios datos sobre alguna ecuación
11/06/2021	Sı		
11/06/2021	sc		si es posible porque así es mas fácil ordenar nuestros datos y llegar algún resultado
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

Pregunta abierta e) ¿El sistema tiene solución desde el punto de vista físico? Argumente.

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
11/06/2021	A		**Si porque depende de la tension y la aceleracion**
11/06/2021	C		**Depende de la acelaracion**
11/06/2021	c		cuando las gráficas se intersecan en un punto
11/06/2021	F		la solución es la aceleración
11/06/2021	N		Si, ya que se busca encontrar la tensión y la aceleracion
11/06/2021	R		**Si, ya sea para conocer el peso que ejerce o para encontrar el punto de tension**
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		**si, la tension y la aceleracion**
11/06/2021	s		si por que podríamos evidenciar su aceleracion y tension
11/06/2021	S		
11/06/2021	s		si porque así se puede calcular la tensión y la aceleración
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

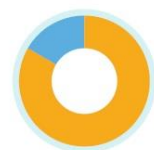
25% **Sin respuesta**

75% **Free Text**

Pregunta abierta f) ¿Qué estrategia utilizaría para la resolución del sistema?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
11/06/2021	A		**depende de el calculo... ya que para calcular la incognita se debe de cambiar de lugar, dependiendo de esta se divide o multiplica .etc**
11/06/2021	C		
11/06/2021	c		método de reducción
11/06/2021	F		que la tención sean iguales y con el método de reducción
11/06/2021	N		Hay que tener rn cuenta la tension para asi encontrar la aceleració
11/06/2021	R		Primero tenemos que conocer la masa, la tensión y luego calcularlo ya sea t-p
11/06/2021	R		**metodo de reduccion**
11/06/2021	R		**sumar las**
11/06/2021	s		**podriamos utilizar la formula o evidenciar que cuerpo tiene mas masa**
11/06/2021	S		Quitaría los
11/06/2021	s		hay que conocer la masa y la tensión para poder calcular
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta



17% **Sin respuesta**

83% **Free Text**

Pregunta abierta g) ¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente.

Fecha	Seudónimo	Otro⍰	Respuesta
11/06/2021	A		Porque depende del signo que tengan
11/06/2021	C		
11/06/2021	ci		pq puede reducir le presion arterial en aproximadamente igual
11/06/2021	Fi		que ay veces que la tencion es negativo y la otra positiva y ahí queda en cero
11/06/2021	M		Por qué en una fuerza la tensión va positiva y en la otra negativa, esto hace que sea t-t
11/06/2021	R		Si, se podría reducir la tensión si ambos ejercen la misma fuerza o no hacen nada.
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		porque tienen signos distintos
11/06/2021	s		que ambas objetos tengan igual de masa para que ocurra un equilibrio
11/06/2021	S		Porque ambos son iguales
11/06/2021	sc		una es positiva y otra negativa entonces seria 0
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

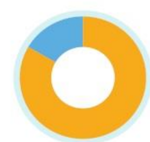
25% Sin respuesta

75% Free Text

Pregunta abierta h) Desde un punto de vista físico, ¿Qué significa que la tensión tenga signos distintos?

Fecha	Seudónimo	Otro⍰	Respuesta
11/06/2021	A		Que toma un valor negativo y otro positivo dependiendo de que lado se vea
11/06/2021	C		Quw a
11/06/2021	c		que tienen otras direcciones
11/06/2021	F		que hay un cuerpo positivo y el otro negativo y de eso queda en cero
11/06/2021	M		Por qué hay un punto medio que sería el 0 y un lado se hace fuerza para el lado negativo y el otro positivo, o mejor hacia abajo neg y arriba post
11/06/2021	R		De que en cuerpo negativo no hace acelera ya que es negativo o ejerce pero para el lado negativo, y bueno el positivo acelera
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		significa que las fuerzas tienen distintas direcciones
11/06/2021	s		que las partes positivas tiran hacia un lado y las negativas en contra de ella
11/06/2021	S		Que ambos cuerpos son distintos ya que uno está ejerciendo fuerza y el otro no
11/06/2021	s		que la parte positiva esta tirando a un lado y la negativa esta tirando también pero hacia el otro lado
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta



17% Sin respuesta

83% Free Text

Pregunta abierta a) ¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
11/06/2021	A		**Se caen ambos y se elimina la tension de estos**
11/06/2021	C		**El cuerpo que tiene mas peso hara mas el peso para caer**
11/06/2021	c		**se van a caer los dos y queda la m con el peso**
11/06/2021	F		que los dos van a caer al suelo pero la que lleva mas peso llega mas rápido al suelo
11/06/2021	M		El cuerpo que cae mas rápido sería M ya que tenie más peso
11/06/2021	R		**Por la fuerza de gravedad caerian ambos**
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		**ambos caerian pero la M caeria mas rapido por la fuerza de gravedad que se ejerceria**
11/06/2021	s		La M mayor se iria solo a su lado ya que no existiría una fuerza negativa
11/06/2021	S		El cuerpo M rojo caerá con más rapidez ya que tiene más fuerza y m rosa tomará más tiempo en caer
11/06/2021	s		**la m que queda va a tener todo el peso porque no va haber un peso que le este haciendo peso contrario**
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta

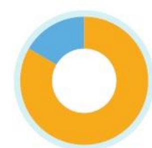
17% **Sin respuesta**

83% **Free Text**

Pregunta abierta b) ¿Qué ocurre si M = m? Fundamente.

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
11/06/2021	A		**Ocurre el equilibrio**
11/06/2021	C		**Amos pesos va a estar a la misma altura**
11/06/2021	c		se mantendría
11/06/2021	F		que si las dos serian igual estarían en equilibrio
11/06/2021	M		Sería una balanza equilibrada
11/06/2021	R		**Si ambos pesos son iguales se mantendria el equilibrio**
11/06/2021	R		
11/06/2021	R		**se mantendrian en equilibrio y estarian al mismo nivel**
11/06/2021	s		**ocurre un equilibrio ya que ambas M serian iguales**
11/06/2021	S		Amos tendrían el mismo peso y se mantendrían en equilibrio
11/06/2021	s		estarían haciendo equilibrio, como una balanza con el mismo peso las dos
11/06/2021	V		

Estadísticas de la Encuesta



17% **Sin respuesta**

83% **Free Text**

Implementación 2:

Pregunta abierta

a. Utilizando la segunda ley de Newton. ¿Qué ecuación(es) podemos formular?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	**A**		T-p=0
24/06/2021	**A**		
24/06/2021	**A**		
24/06/2021	**A**		T - P = 0
24/06/2021	**B**		Me perdí un poco
24/06/2021	**B**		
24/06/2021	**C**		
24/06/2021	**C**		No lo sé
24/06/2021	**D**		Fn= suma de las fuerzas: tensión + Peso _ Tensión x peso= 0
24/06/2021	**F**		Fn= T•P=0
24/06/2021	**N**		No lo entiendo
24/06/2021	**S**		**e nose**
24/06/2021	**Y**		-F + P

Estadísticas de la Encuesta

31% **Sin respuesta**

69% **Free Text**

Pregunta abierta

b) ¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	**A**		**Que esta quieto .. inmobil**
24/06/2021	**A**		está inmóvil
24/06/2021	**A**		
24/06/2021	**A**		**Que no se mueve, esta quieto**
24/06/2021	**B**		El cuerpo está en equilibrio y que la magnitud está en cero?
24/06/2021	**B**		
24/06/2021	**C**		
24/06/2021	**C**		**La fuerzas son iguales**
24/06/2021	**D**		
24/06/2021	**F**		que ambos van en dirección contraria y que están quietos
24/06/2021	**N**		**No se mueve**
24/06/2021	**S**		**que no se mueve anashe**
24/06/2021	**Y**		**Esta en equilibrio**

Estadísticas de la Encuesta

31% **Sin respuesta**

69% **Free Text**

Pregunta abierta a) Si M tiene mayor masa que m, ¿Qué ocurre con el sistema?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	A		**Pierde el equilibrio .. va a todo el peso en la M**
24/06/2021	A		Se mueve hacia la M mayúscula por el peso mayor que m
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		Pierde el equilibrio ps, se iría para un lado, para donde pese mas
24/06/2021	B		**Pierde el equilibrio**
24/06/2021	B		**Se me mueve o se equilibra por el peso**
24/06/2021	C		
24/06/2021	C		**Fuerza peso diferente, como lo dije en le chat**
24/06/2021	D		
24/06/2021	F		la fuerza que ejerce M es más, por lo que el cuerpo no está en equilibrio y genera movimiento
24/06/2021	M		
24/06/2021	s		**M tiene mas precion por lo cual esta bajando y no esta en equilibrio haciendo que m aumente su t y vayan hacia un lado**
24/06/2021	Y		**Se mueve**

Estadísticas de la Encuesta

31% **Sin respuesta**

69% **Free Text**

Pregunta abierta b) En base a la respuesta obtenida en (b), ¿Cuál objeto tira del otro?, ¿Cuál tira con mayor fuerza?

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	A		**Es como un valance el que pesa mas es el que baja .. y por lo tanto la M es la que pesa mas ..**
24/06/2021	A		**M tiene mayor peso por lo tanto m sube ya que tiene menor peso**
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		**El que pesa mas, tira mas fuerte como sube y baja?**
24/06/2021	B		**M**
24/06/2021	B		
24/06/2021	C		
24/06/2021	C		M tira al m y con más fuerza,M es mayor y por lo tanto siempre estará cargada a ella y no al contrario
24/06/2021	D		
24/06/2021	F		M tira con más fuerza, ya que su base es la mayor
24/06/2021	M		
24/06/2021	s		**M tira tira de m haciendo que la m suba y M baje**
24/06/2021	Y		**M tira de m, haciendo que m se eleve y M baje**

Estadísticas de la Encuesta

38% **Sin respuesta**

62% **Free Text**

Pregunta abierta c) Considerando (b) y (c). Plantee ecuaciones que permitan encontrar la aceleración del sistema. Utilice la segunda ley de Newton F_(n)=m·a

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	A		T-p= x a P-t=m x a
24/06/2021	A		P - T = m x a T - P = m x a????
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		T - Pm=m*A PM- T = m*A
24/06/2021	B		A=PM/Fn
24/06/2021	B		
24/06/2021	C		
24/06/2021	C		a= f/M
24/06/2021	D		
24/06/2021	F		a=M•fn a=m•fn
24/06/2021	M		
24/06/2021	s		
24/06/2021	Y		PM • Y = M • a

Estadísticas de la Encuesta

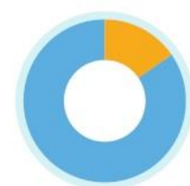
38% Sin respuesta

62% Free Text

Pregunta abierta d) ¿Es posible plantear las ecuaciones como un sistema?¿Cuáles serían susincógnitas? Argumente.

Fecha	Seudónimo	Otro	Respuesta
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		P - X= m*Y X- p
24/06/2021	B		
24/06/2021	B		
24/06/2021	C		
24/06/2021	C		
24/06/2021	D		
24/06/2021	F		
24/06/2021	M		
24/06/2021	s		M
24/06/2021	Y		

Estadísticas de la Encuesta



85% Sin respuesta

15% Free Text

Pregunta abierta g) ¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente.

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		Porque hay dos ecuaciones y dos variables
24/06/2021	B		
24/06/2021	B		
24/06/2021	C		
24/06/2021	C		
24/06/2021	D		
24/06/2021	F		
24/06/2021	N		
24/06/2021	s		
24/06/2021			

Estadísticas de la Encuesta

Pregunta abierta a) ¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		
24/06/2021	A		
24/06/2021	B		
24/06/2021	B		
24/06/2021	C		
24/06/2021	C		los cuerpos caen, y la aceleración
24/06/2021	D		
24/06/2021	F		
24/06/2021	M		
24/06/2021	s		
24/06/2021 Yojairo			

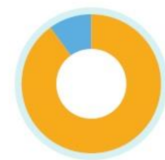
Estadísticas de la Encuesta

Implementación 3:

Pregunta abierta a. Utilizando la segunda ley de Newton. ¿Qué ecuación(es) podemos formular?¿Qué valores conocemos?

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
01/07/2021	B		T-P=mx0 los valores son T=tencion P=peso
01/07/2021	D		
01/07/2021	D		T - P
01/07/2021	F		T-p T-p=0
01/07/2021	j		**la masa del cuerpo y la grabedad?**
01/07/2021	K		t-p
01/07/2021	L		**no entiendo bien si es masa x peso ?**
01/07/2021	M		La tensión menos el peso es igual a cero
01/07/2021	C		Fn=m1•A ese sería una ecuación porque los demás valores no los conocemos y el único valor que conocemos es la masa que es 1

Estadísticas de la Encuesta



10% **Sin respuesta**

90% **Free Text**

Pregunta abierta b) ¿Qué podemos concluir acerca de esta ecuación y el estado del cuerpo?

Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
01/07/2021	B		el cuerpo esta en un estado de equilibrio por eso su aceleración es 0
01/07/2021	D		
01/07/2021	D		**Se encuentra en un equilibrio perfecto, por eso no hay aceleracion**
01/07/2021	F		Podemos concluir que la aceleración es 0 ya que está en equilibrio. No se encuentra con ningún movimiento
01/07/2021	j		**que al estar en equilibro es 0**
01/07/2021	K		no esta en movimiento por eso no tiene aceleración
01/07/2021	L		**no tiene aceleracion**
01/07/2021	M		Que tensión - peso es igual a cero ya que el cuerpo está en equilibrio por lo tanto no tiene aceleración
01/07/2021	C		Que el cuerpo está en estado de equilibrio y no tiene aceleración y por eso está en 0

Estadísticas de la Encuesta

10% **Sin respuesta**

90% **Free Text**

Pregunta abierta a) Si M tiene mayor masa que m, ¿Qué ocurre con el sistema?

Fecha	Seudónimo	Otro⍰	Respuesta
01/07/2021	B		
01/07/2021	D		
01/07/2021	D		M produce una aceleracion con direccion a fuerza G
01/07/2021	F		El peso mayor (M) baja y hace levantar al peso menore (m)
01/07/2021	jc		el de la m minuscula por que se ejerce el peso y lebantas el peso de la masa que ase que se vuelva liviano
01/07/2021	K		que m sube por tener menos peso y M baja por mayor peso
01/07/2021	L		pucha la verdad no entiendo mucho profe
01/07/2021	M		M baja ya que tiene mallor masa que m
01/07/2021	O		m minúscula subiría porque tiene masa menor al tener mayor peso cae y el menor sube

Estadísticas de la Encuesta

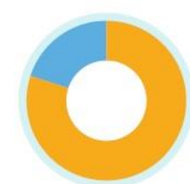
20% Sin respuesta

80% Free Text

Pregunta abierta b) En base a la respuesta obtenida en (b), ¿Cuál objeto tira del otro?, ¿Cuál tira con mayor fuerza?

Fecha	Seudónimo	Otro⍰	Respuesta
01/07/2021	B		"M" tira a "m" con una mayor masa
01/07/2021	D		
01/07/2021	D		M tira con mayor fuerza Por mayor peso, Entonces tiene mayor aceleracion y arrastra a m por que tiene menos peso
01/07/2021	F		M tira a m, M al tener el peso mayor tira de el menor
01/07/2021	jc		la M mayuscula por q tiene la fuerza de grabedad mas el peso del M
01/07/2021	K		M
01/07/2021	L		
01/07/2021	M		M ya que tiene mallor masa que m y eso hace que tenga mallor fuerza
01/07/2021	O		El M mayúscula tira con más fuerza ya que tiene más masa y peso

Estadísticas de la Encuesta



20% Sin respuesta

80% Free Text

Pregunta abierta c) Observando el diagrama, plantee ecuaciones que puedan encontrar la aceleración del sistema. Use la segunda ley de Newton F _(n) = m · a

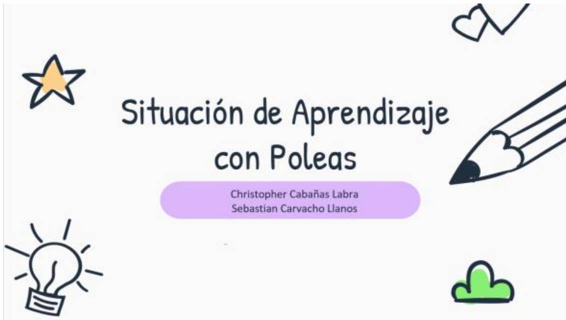
Fecha	Seudónimo	Otro?	Respuesta
01/07/2021	B		pM-t=M*a y t-pm=m*a
01/07/2021	D		
01/07/2021	D		**El peso de la letra M logra hacer la aceleracion necesaria para que la tension de la cuerda mueva a la m**
01/07/2021	F		PM + Pm= Fn
01/07/2021	jo		**me confundi profe ? me complique en las ecuaciones**
01/07/2021	K		serian P-T=Mxa y al reves T-P=mxa
01/07/2021	L		
01/07/2021	M		T-Pm= Pmxa PM-T=PMxa
01/07/2021	C		Sería pM - t= M•a y t-m=m•a

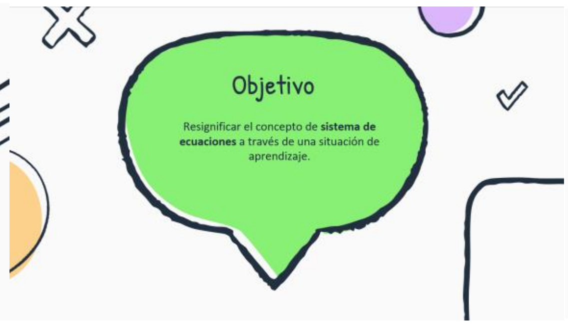
Estadísticas de la Encuesta

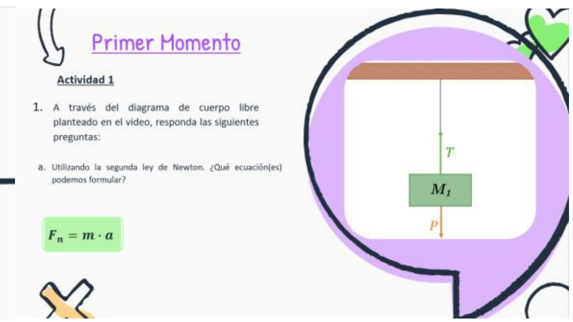
30% **Sin respuesta**

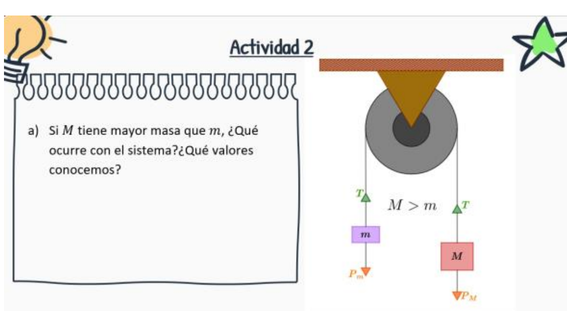
70% **Free Text**

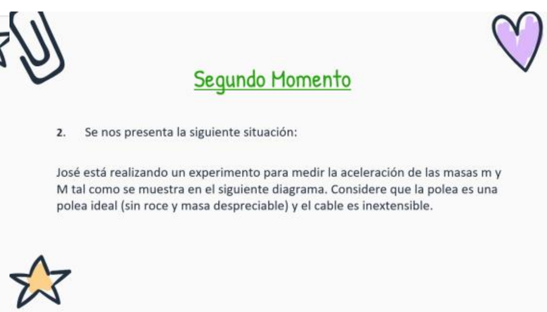
Anexo J. PowerPoint complementario a la situación de aprendizaje.

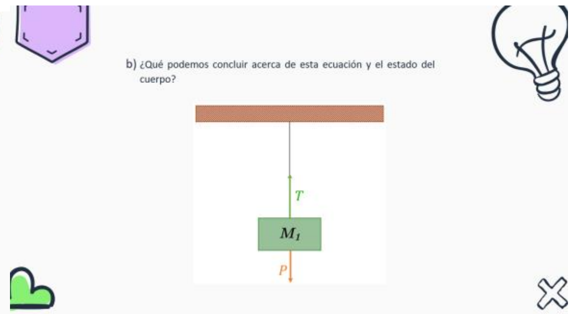


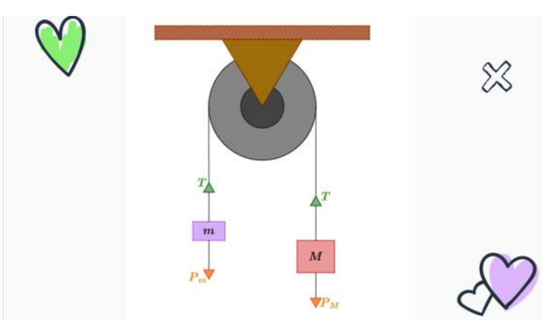


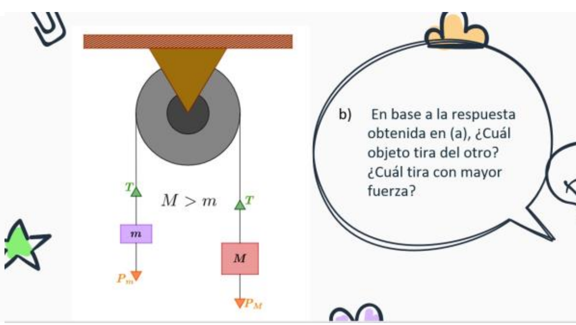


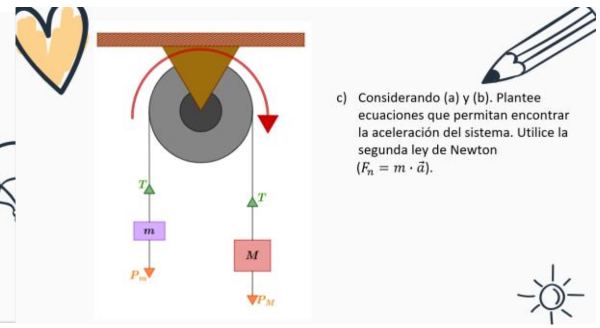


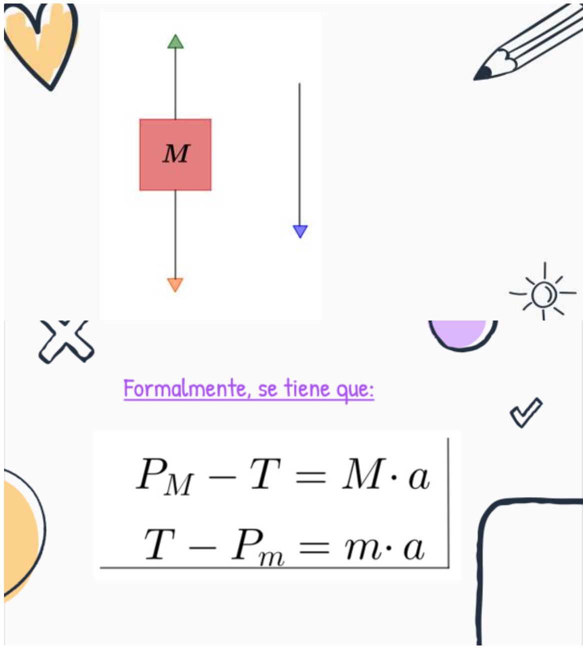


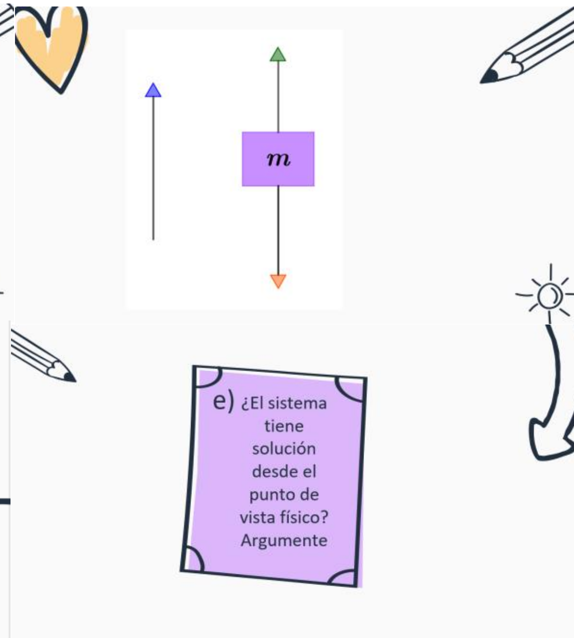


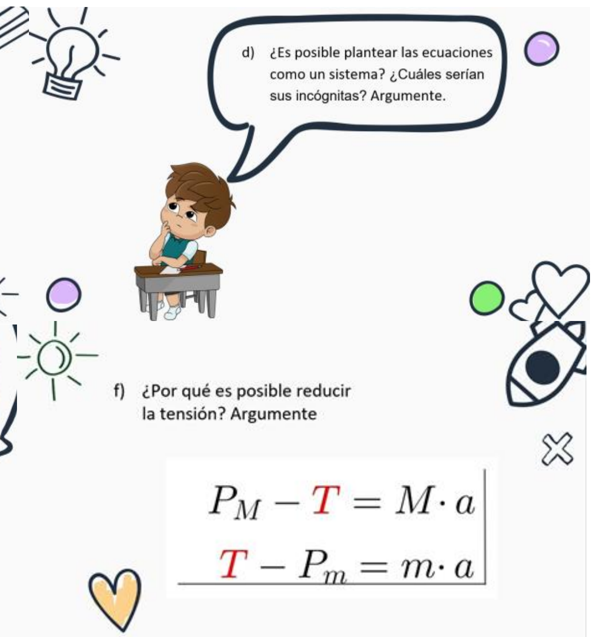


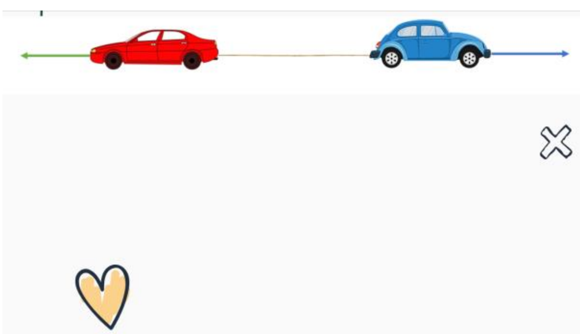


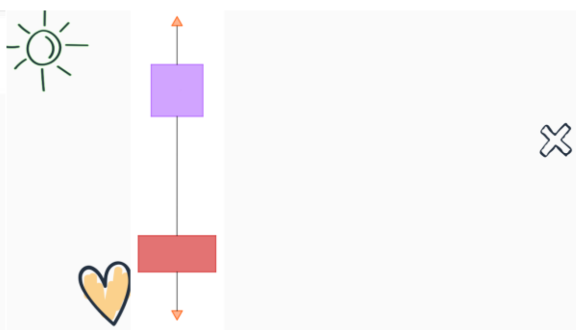


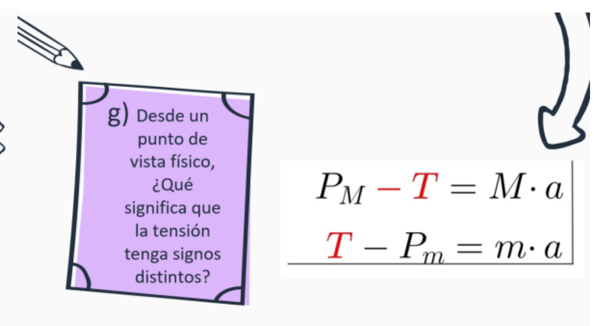

M
Formalmente, se tiene que:
$$P_M - T = M \cdot a$$
$$T - P_m = m \cdot a$$


m
e) ¿El sistema tiene solución desde el punto de vista físico? Argumente


d) ¿Es posible plantear las ecuaciones como un sistema? ¿Cuáles serían sus incógnitas? Argumente.
f) ¿Por qué es posible reducir la tensión? Argumente
$$P_M - T = M \cdot a$$
$$T - P_m = m \cdot a$$



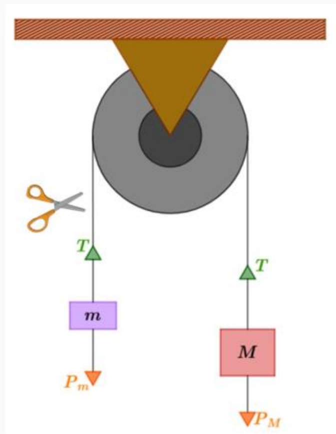



g) Desde un punto de vista físico, ¿Qué significa que la tensión tenga signos distintos?
$$P_M - T = M \cdot a$$
$$T - P_m = m \cdot a$$

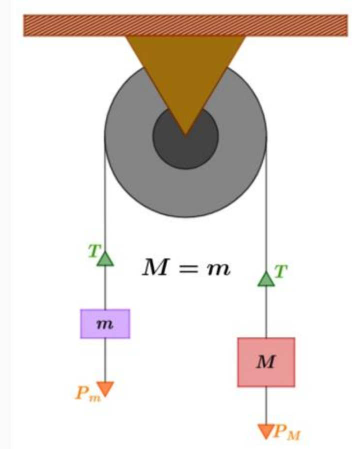
Supongamos:

Actividad 3

a) ¿Qué ocurre si cortamos la cuerda? Fundamente.



b) ¿Qué ocurre si $m = M$? Fundamente.



Anexo K: Cierre de situación de aprendizaje.

Implementación 1:

1. ¿Qué entiendes por sistema de ecuaciones y en que elementos de la vida cotidiana se pueden encontrar?

12 respuestas

Que es una fórmula fácil de entender y rápida de poder resolver, en el una lámpara, fuerzas de un auto, balanza, etc.

es un sistema para calcular la aceleracion,peso de algún objeto que este en equilibrio o desequilibrio y en por ejemplo construcciones, artefactos, etc

El sistema de ecuación es como un conjunto de ecuaciones simultáneas, en la vida real constantemente estamos usando ecuaciones. Un sencillo ejemplo: Supón que quieres comprar 9 refrescos y en el negocio te dicen que cuestan en total 72 pesos. Para saber cuanto cuesta cada refresco planteamos una ecuación.... 9 R = 72 (Donde R son los refrescos) Despejamos la R y nos queda R = 72/9 R = 8

puedes ser como un conjunto de cifras que conforman un problema matematico

Segun la clase que tuvimos lo ponemos ver en una balanza o en una construcción y un equilibrio entre 2 objetos

Es sacar o encontrar de alguna manera el valor de una incógnita, y este se puede aplicar en la vida cotidiana cuando compras y sacas su valor en un negocio o supermercado

El sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que tienen mas de una incognita, se pueden encontrar al tratar de cotizar cosas al comprar y calculos en cuanto a ahorros

se que entra en la ptu y tiene 3 tipos de solución, por reducción, sustitución e igualación. en la vida cotidiana para mi no sirve para nada, a no ser que quieras entrar a la U, en ese caso debes aprenderlo por la prueba de admisión

por sistema de ecuaciones recuerdo que hay dos, las lineales y equivalentes, y que sirven para resolver dos incógnitas en una misma ecuación o ejercicio

Hola mire por lo que entendí que hay una formula que es F=M*A pero luego se le agrega la tensión y el peso , y esto es super común de ver por ejemplo cuando uno en el colegio tirar la cuerda , cuando esta en una balanza o un candelabro se hace una fuerza y ahi es donde se tiene un ganador por así decirlo

es un conjunto de ecuaciones con más de una incógnita que conforman un problema matemático que consiste en encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas operaciones y se pueden encontrar en en la vida diaria siempre nos topamos con ecuaciones como, cuanto dinero gastaré, Si compro tal cosa cuanto me queda, El valor de algo es tantas veces mi presupueato. Que siempre que este involucrada una incognita estos en precencia de una ecuación.

Implementación 2:

```
01:17:15.995,01:17:18.995
ALEJANDRO ANTONIO GALLARDO AGUILERA: la vela de un barco?

01:17:25.523,01:17:28.523
SEBASTIAN EDUARDO MORAGA FIGUEROA: niños tirando de una cuerd

01:17:26.929,01:17:29.929
SEBASTIAN EDUARDO MORAGA FIGUEROA: a

01:18:22.258,01:18:25.258
ALEJANDRO ANTONIO GALLARDO AGUILERA: cuando los amarran e inmovilizan para avanzar hacia una dirección

01:18:23.516,01:18:26.516
SEBASTIAN EDUARDO MORAGA FIGUEROA: sistema de ecuaciones? xd

01:18:57.202,01:19:00.202
DENISSE ALEJANDRA PAZ VILCHES GALAZ: Polea
```

Implementación 3: