



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DE GUÍA DOCENTE PARA EL CONTENIDO Y RESOLUCIÓN DE
ACTIVIDADES SUGERIDAS POR EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN EN LOS
CONTENIDOS DE ESTADÍSTICA INFERENCIAL PARA EL ELECTIVO
PROBABILIDADES E ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INFERENCIAL PARA III° O
IV° MEDIO.

TESINA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES:

FRANCISCA ARRIAGADA FUENTES
FRANCISCO ARENAS ESPINOSA

PROFESORA GUÍA:

GIOVANNA VINCENZA TICCHIONE
SANTIAGO DE CHILE, JULIO DE 2021



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DE GUÍA DOCENTE PARA EL CONTENIDO Y RESOLUCIÓN DE
ACTIVIDADES SUGERIDAS POR EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN EN LOS
CONTENIDOS DE ESTADÍSTICA INFERENCIAL PARA EL ELECTIVO
PROBABILIDADES E ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INFERENCIAL PARA III° O
IV° MEDIO.

TESINA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES:

FRANCISCA ARRIAGADA FUENTES
FRANCISCO ARENAS ESPINOSA

PROFESORA GUÍA:

GIOVANNA VINCENZA TICCHIONE
SANTIAGO DE CHILE, JULIO DE 2021

2021, Francisca Arriagada Fuentes y Francisco Arenas Espinosa.

Se autoriza la reproducción total o parcial de este material, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, siempre que se haga referencia bibliográfica que acredite

Dedicatoria

Dedicamos este logro a nuestros seres queridos que han influenciado nuestro camino y que día a día nos ayudan a ser mejores personas y profesionales.

A nuestros profesores quienes nos han formado y nos han ayudado a forjar nuestra identidad docente, en particular, a la profesora Giovanna Ticchione.

Por ustedes nos encontramos en esta etapa final, listos para ser los docentes que anhelamos ser.

Agradecimientos

*A mi familia por el apoyo incondicional en esta odisea de perseguir mi vocación .
A mi pololo Nicolás, por estar siempre ahí conmigo dándome ánimos y motivándome para seguir
adelante y verme feliz.*

*A mi compañera Francisca, por la empatía, paciencia y apañe durante todo el difícil proceso de tesina.
Finalmente, a la profesora Giovanna Ticchione por todo el acompañamiento, consejos y oportunidades
que me dio durante la carrera, aportando muchísimo para ser el docente que soy hoy en día.*

Francisco Arenas Espinosa

*A mi familia quienes han estado siempre presentes apoyándome.
A Enrique y Yennifer, quienes han sido pilares importantes en mis últimos años de universidad y en la
pandemia.*

*A mis compañeros de universidad quienes me tuvieron que soportar por varios años y siguen conmigo.
A todos quienes estuvieron apoyándome en mis momentos más oscuros y difíciles.*

A Dania, que gracias a ella estoy aquí y me ha ayudado a darme cuenta de todo lo que he logrado.

A mi compañero Francisco, por todo el apañe al trabajar conmigo y por haber terminado esto.

Finalmente, a mí por haber logrado todo lo que en su momento me propuse.

Gracias totales.

Francisca Arriagada Fuentes.

Tabla de Contenidos

Introducción.....	1
Capítulo I: Antecedentes y Problemática	3
1.1 Problemática	3
1.2 Planteamiento del problema	8
1.3 Estado actual del problema.....	8
1.4 Objetivo de la Investigación	11
1.4.1 Objetivo General.....	11
1.4.2 Objetivos Específicos	11
1.5 Relevancia y Justificación.	12
1.5.1 Relevancia teórica.....	12
1.5.2 Relevancia social.	12
1.5.3 Relevancia práctica.....	12
Capítulo II: Marco Teórico.....	13
2.1 Situaciones de enseñanza para el aprendizaje.	13
2.2 Contenidos correspondientes a la unidad de inferencia del electivo Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° Medio.....	16

2.2.1 Intervalos de confianza.....	16
2.2.2 Test de Hipótesis.	18
2.3 Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK).....	22
2.3.1 Subdominios del Conocimiento Matemático (MK).	23
2.3.2 Subdominio del Conocimiento Didáctico del Contenido.	25
2.4 Programa del electivo de Probabilidad y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV medio. Unidad 4: Estadística Inferencial.....	27
Capítulo III: Marco Metodológico.....	45
3.1 Caracterización de la muestra.....	46
3.2 Instrumento.....	48
3.3 Procedimiento.....	50
3.4 Análisis de Datos.....	50
Capítulo IV: Representación de los Resultados y Discusión.....	51
4.1 Resultados de la Encuesta.....	51
4.2 Material de actividades: Guía para el docente.....	57
Capítulo V: Conclusiones y Reflexiones.....	86
Referencias bibliográficas.	91
Tablas y figuras.....	94
Anexos.....	95

Anexo 1. Resultados encuesta realizada a docentes para evaluar conocimientos respecto de los contenidos del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.	96
Anexo 2. Desglose de cursos malla Universidad Católica de Valparaíso 1983.	103
Anexo 3. Encuesta “Percepción del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° Medio.	105
Anexo 4. Programa de estudio para el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.	118

Importante: En la presente investigación se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el profesor”, “el estudiante”, “el alumno”, “el compañero” y sus respectivos plurales junto a sinónimos equivalentes en el contexto educativo para referirse a hombres, mujeres u otros géneros, debido a la saturación gráfica y dificultad en la lectura que produce el uso de nomenclaturas como “o/a”, “los/las” y otras.

Resumen

A partir del año 2020 entra en vigor la última actualización curricular para los niveles de III° y IV° medio, para la Formación Diferenciada Humanista Científico. Particularmente los contenidos a tratar en esta investigación se relacionan con el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para los niveles mencionados con anterioridad.

Al considerar el programa de estudio y considerando que existen nuevos contenidos declarados por el Ministerio de Educación, los cuales no presentan antecedentes sobre su enseñanza y con el objetivo de proponer una guía docente para el contenido, resolución e identificación de errores de actividades sugeridas por el Ministerio de Educación de los contenidos que presentan mayor debilidad por parte de los docentes en ejercicio para la enseñanza de los contenidos del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial planteado en la actualización curricular 2020 para los niveles de III° o IV° medio. Se realiza un estudio a una muestra de docentes de matemáticas titulados de diferentes universidades del país, aplicándose una encuesta como herramienta de recopilación de datos. A partir de los resultados obtenidos por el instrumento, los cuales fueron determinados de acuerdo con la percepción y el manejo de los nuevos contenidos que los docentes declaran deficientes, se propone una bajada de contenidos y desarrollo de las actividades planteadas por el Ministerio de Educación que están destinadas a los profesores de matemáticas quienes puedan implementar el presente electivo teniendo un apoyo con la finalidad de acompañar y complementar el ejercicio docente y la correcta conducción de la educación Estadística.

Finalmente, el estudio concluye la necesidad de la actualización didáctica de los docentes en el área de estadística inferencial y de cómo los docentes se encuentran preparados para llevar la enseñanza de los contenidos de esta área.

Palabras Claves: *Bases Curriculares, Programa de estudio, Probabilidades, Estadística Inferencial, Intervalo de confianza, Test de Hipótesis.*

Introducción

El nuevo currículum de III° y IV° medio es la finalización de un proceso de reformas curriculares que se extendió durante casi toda la última década. La promulgación en 2009 de la Ley General de Educación (LGE) fue un hito fundamental en materia curricular, dado que estableció que el currículum nacional debía organizarse en bases curriculares formadas por objetivos de aprendizaje que integrasen conocimientos, habilidades y actitudes que desarrollar en los estudiantes. A partir de entonces se inició un proceso de reforma curricular que gradualmente ha transformado los procesos de enseñanza-aprendizaje en todos los niveles, al centrar el foco en aprendizajes significativos y profundo, con un fuerte énfasis en el desarrollo de habilidades y actitudes. En el año 2012 entran en vigor las Bases Curriculares de Educación Básica (1° básico a 6° básico), mientras que en el 2015 las de Educación Media (7° a II° medio). En 2016 se promulgaron las Bases Curriculares para la formación diferenciada técnico profesional y en 2018 las de Educación Parvularia.

Dado el contexto mencionado con anterioridad, entre los años 2018 y 2019 se finalizó la elaboración y aprobación de las nuevas Bases Curriculares para III° y IV° medio, lo cual finalizó el proceso de reforma curricular de la década (Consejo Nacional de Educación, 2019). La nueva propuesta se inscribe en la misma lógica que las actualizaciones de las Bases Curriculares mencionadas anteriormente en cuanto a ofrecer un currículum moderno, pertinente a los intereses de los jóvenes de hoy en día, con un profundo desarrollo de habilidades y actitudes, orientado a responder las demandas y desafíos del siglo XXI.

Así, el nuevo currículum considera un nuevo plan diferenciado científico-humanista que integra lo planteado con anterioridad. Un primer cambio es duplicar el tiempo destinado a este plan, donde previa la actualización se consideraban 9 horas semanales, mientras que ahora considera un total de 18 horas semanales. Un segundo cambio ha sido la flexibilidad del sistema de electividad, de tal manera que los estudiantes puedan, durante los dos años que dura este ciclo, tener oportunidades para elegir y profundizar de acuerdo con sus intereses, pero también explorar diferentes áreas si es que así lo desean. Así, el nuevo plan diferenciado humanista-científico ofrece esta apuesta por evitar la rigidez de planes cerrados como se hacía anteriormente, ya que esto fuerza a los estudiantes a tomar una decisión temprana respecto de su futuro académico o profesional siendo que no todos cuentan con esa claridad al finalizar II° medio.

Con este plan el estudiante elige las asignaturas donde desea profundizar dada una gama de electivos

elaborada por el establecimiento, el cual debe considerar la opinión de los estudiantes, en conjunto con una serie de variables de funcionamiento del propio establecimiento. La oferta debe considerar al menos dos de las tres áreas en que se organizan las 27 asignaturas de profundización que incluye este plan y deberá ofrecer un mínimo de seis por año.

Es así que se asegura que el estudiante cuente con mayores opciones de electividad, profundización y exploración, lo que conlleva también a una gran responsabilidad por parte de todos los actores involucrados. Por una parte, la capacidad de los directores en tomar en cuenta la opinión de sus estudiantes, y por otra, la responsabilidad por parte de estos en la toma de decisiones respecto a su trayectoria.

A partir de lo planteado con anterioridad, se decide llevar a cabo la implementación de una encuesta de percepción a los docentes de matemáticas en ejercicio respecto a los contenidos a tratar en el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para los niveles de III° o IV° medio, para lograr identificar los contenidos en con bajo o nulo manejo por parte de los docentes para guiar un buen proceso de enseñanza-aprendizaje de estos. Así, la presente investigación propone como producto, en primer lugar, una transposición didáctica de los contenidos, acorde al nivel en el que estos serán tratados para lograr el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para que los estudiantes sean capaces de afrontar problemáticas relacionadas con la estadística en la vida cotidiana. En segundo lugar, identificar errores y desarrollar a modo de “guía para el docente”, las actividades planteadas por el ministerio de educación en el programa de estudio del electivo.

Capítulo I: Antecedentes y Problemática

1.1 Problemática

Al año 2019 se realiza un ajuste en el programa curricular de matemáticas en tercero y cuarto medio, el cual debe ser implementado con obligación entre los años 2020 y 2021. En dicha reforma curricular, se agregaron cuatro nuevos electivos de matemáticas, entre ellos el electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial (MINEDUC, 2019). Asociado a este, surge una amplia gama de dificultades en su implementación, entre ellas, la deficiente formación docente, donde el Dr. Francisco Rodríguez afirma que

“Estudios a nivel nacional e internacional proporcionan antecedentes que los profesores en formación y en activo no han adquirido durante su paso por la formación inicial docente los conocimientos conceptuales y habilidades afines a este eje. Presentando porcentajes de logro descendidos en la descodificación de situaciones problemáticas de tipo textual, en representaciones gráficas y asimismo entregando argumentaciones poco plausibles afines a los saberes estadísticos donde intervienen conceptos básicos de estadística y probabilidad. Lo que evidencia que la formación en esta temática es todavía una tarea pendiente a nivel país como lo ratifican los bajos resultados obtenidos por los profesores en formación en la Evaluación Nacional Diagnóstica.” (Alvear, 2021)

Considerando lo anterior, a la fecha existen universidades que cuentan con solo una asignatura de estadística en toda su formación inicial.

Tabla N°1: Desglose de cursos del eje datos y azar por universidad.

Universidad	Carrera	Cursos del eje datos y azar
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE)	Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática con Menciones	<ul style="list-style-type: none"> • Estadística Descriptiva • Elementos de Probabilidad • Fundamento del Cálculo de Probabilidades • Elementos de Inferencia Estadística
Universidad Católica del Norte (UCN)	Pedagogía en Matemática en Educación Media	<ul style="list-style-type: none"> • Estadística y Probabilidades I • Estadística y Probabilidades II
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV)	Pedagogía en Matemática	<ul style="list-style-type: none"> • Estadística 1 • Estadística 2
Universidad de Concepción (UDEC)	Pedagogía en matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Estadística • Inferencia y Muestreo
Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC)	Pedagogía en Educación Media en Matemática	<ul style="list-style-type: none"> • Introducción a la estadística • Estadística y probabilidad
Universidad de Chile (UCH)	Pedagogía en Educación Media en Matemáticas y Física	<ul style="list-style-type: none"> • Probabilidad y Estadística I • Probabilidad y Estadística II

Universidad de Santiago de Chile (USACH)	Pedagogía en Matemática y Computación	<ul style="list-style-type: none"> • Probabilidades Estadísticas • Estadística
Universidad de Santiago de Chile (USACH)	Pedagogía en Física y Matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Estadística y Probabilidades en educación
Universidad católica del Maule (UCM)	Pedagogía en matemáticas y Computación	<ul style="list-style-type: none"> • Análisis de Datos • Modelos probabilísticos
Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH)	Pedagogía en matemáticas e informática Educativa	<ul style="list-style-type: none"> • Estadística Descriptiva y Probabilidades • Estadística Inferencial
Universidad Alberto Hurtado (UAH)	Pedagogía en matemática	<ul style="list-style-type: none"> • Estadística Descriptiva • Probabilidades • Estadística Inferencial

Otra complicación que tiene la implementación del electivo es la dificultad de los contenidos por sí mismos, que en algunos casos requieren de herramientas más avanzadas de estudios superiores para poder comprenderlos en su totalidad.

Todo lo anteriormente señalado se sustenta en los resultados obtenidos al aplicar una encuesta previa, donde se evaluó a docentes respecto de los contenidos que abarca el electivo (Ver Anexo 1), planteando ejercicios sugeridos en el programa de estudio. Los resultados obtenidos fueron deficientes a partir de los contenidos de variable aleatoria hasta test de hipótesis ya que la mayoría de los docentes señala no haber estudiado estos contenidos durante su formación inicial o no recordarlos, respondiendo erróneamente los ítems relacionados a estos contenidos o simplemente no respondiendo.

En el área de la formación inicial docente, dado que la cantidad de contenidos planteados en el currículum escolar para el eje de datos y azar, incluyendo el nuevo electivo, es considerablemente grande, es necesario revisar el plan de estudio que presentan las distintas universidades para la carrera de pedagogía en matemáticas, con el fin de observar cuánta importancia les dan a dichos contenidos.

Respecto al análisis para los docentes en ejercicio, es sumamente difícil acceder a las mallas curriculares antiguas como para hacer un estudio completo, no obstante, fue posible estudiar un caso, accediendo a la concentración de notas de una docente en ejercicio titulada el año 1983 (ver anexo 2), lo que permite evidenciar que, en esa época, dentro de la formación inicial docente, al menos en una universidad, los cursos de estadística no estaban presentes en ningún semestre.

Luego si se analiza la carreras actuales y considerando la cantidad de asignaturas, no sus créditos, se observa que de los 11 planes de estudio revisados, solo dos universidades que imparten la carrera de pedagogía en matemáticas dictan 3 o más cursos del eje datos y azar (UMCE con 4 cursos y UAH con 3), ocho universidades dictan solo dos cursos (UCN, PUCV, UDEC, UC, UCH, USACH, UCM, UCSH) y finalmente, incluso hay una universidad que dicta solamente un curso, la USACH en su carrera de Pedagogía en física y matemáticas.

La escasa cantidad de cursos impartidos sobre el eje datos y azar por las distintas universidades en los planes de estudio de sus carreras de matemáticas, se ven reflejados en los resultados de la prueba de Evaluación Nacional Docente (END) 2019 entregados por el Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP, 2019), en su sección de conocimientos disciplinarios y didácticos, donde se destaca que para el parámetro de Estadística e inferencia (Estándar 21) a nivel nacional se arroja un 36% de respuestas correctas.

Por otro lado, el nuevo electivo planteado de Probabilidades y Estadística Descriptiva e inferencial, aborda, tal como su nombre lo indica, tres ejes del área de la estadística: probabilidades, estadística descriptiva y estadística inferencial. Entrando en los contenidos en sí a tratar en el electivo, lo planteado en los *objetivos 1 y 2*:

“OA 1: Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA 2: Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales” (MINEDUC, 2019)

Son objetivos y contenidos establecidos que se imparten hace años en la asignatura común de matemáticas, por lo que es lógico pensar que se deben profundizar en el electivo. Luego, lo planteado en los objetivos 3 y 4

“OA 3: Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA 4: Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.” (MINEDUC, 2019)

Son objetivos y contenidos que se abordan por primera vez a nivel escolar. Dichas tareas, tanto de profundización de los contenidos estadísticos ya vistos, como la de enseñar los nuevos contenidos planteados, no resultan sencillas, en primer lugar, por la capacidad requerida del profesor para guiar el aprendizaje de dichos contenidos, que como se muestra en el antecedente anterior, no es la ideal, y en segundo lugar, puesto que la revisión en profundidad de los contenidos, en particular los relacionados con probabilidades y estadística inferencial, implica una alta dificultad teórica, ya que para la mayoría de las deducciones de teoremas límites, distribuciones de variable aleatoria, intervalos de confianza y test de hipótesis son necesarias herramientas de cálculo (límites, derivadas, integrales, sumatorias, series), es decir, se requiere de teoría que escapa del nivel escolar, lo que, una vez más, viene a complejizar la labor del docente para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

También, cabe destacar que el Ministerio de Educación liberó el programa de estudios completo de dicho electivo, el cual estaba sujeto a cambios, recién en octubre de 2020, meses después de que el electivo se implementara, planteando 4 actividades por unidad, lo cual sigue siendo una cantidad insuficiente de material didáctico que los docentes tienen a su disposición para guiarse en la labor de enseñar nuevos contenidos a nivel escolar. En febrero de 2021 el Ministerio de Educación liberó el programa de estudio vigente el cual sigue presentando 4 actividades por unidad, las cuales no se encuentran desarrolladas.

1.2 Planteamiento del problema

Por todo lo descrito anteriormente, llegamos a la siguiente interrogante, ¿Cómo brindar apoyo a los docentes en ejercicio que imparten o impartirán el electivo, a cubrir sus propias falencias en el manejo de los contenidos a tratar en este, para propiciar una correcta labor al guiar los procesos de aprendizaje, sobreponiéndose a los obstáculos de transponer los nuevos contenidos a nivel escolar utilizando metodologías activas, para así desarrollar las habilidades matemáticas pertinentes descritas en las bases curriculares?

1.3 Estado actual del problema

Como la problemática es bastante puntual y reciente, no se encontraron investigaciones específicas al respecto. Sin embargo, se puede notar que todos los antecedentes convergen a un tema en específico, el cómo se realizan y gestionan las reformas curriculares en el sistema educativo chileno.

El desencuentro entre reformas educacionales y docentes es un problema crónico que viene de muchos años en Chile. Debido a esto se ha ido generando lo que se conoce como un diálogo sordo entre los distintos actores de la comunidad educativa, el cual se ha ido “resolviendo” con estrategias unilaterales de información o comunicación, con técnicas de negociación de conflicto. Medidas las cuales no sirven, debido a que el problema persiste (Torres, 2010).

Ahora bien, los cambios educativos han sido una necesidad desde hace muchos años junto con el reconocimiento de la diferencia entre los sistemas escolares y los requerimientos de la sociedad de hoy en día. Hasta el día de hoy, a pesar de las distintas reformas educativas que se han planteado no se ha podido lidiar con esta brecha.

Para entender el rol docente y la relación con los procesos de reformas junto con el cambio educativo es necesario caracterizar lo qué es y cuáles son algunos procesos de la reforma tradicional.

A continuación, se nombran algunos elementos que Rosa Torres caracteriza dentro de la reforma tradicional:

- Reformas desde afuera: Existen dos planos
 - a. Como bien dice el nombre, se pretende cambiar un sistema desde fuera, es decir, los cambios que se hacen son sin considerar el contexto o necesidades de las instituciones

escolares o educativas. Se intenta generar un cambio a partir de instancias centralizadas y alejadas de la realidad

- b. Como señala Torres (2010), los parámetros teóricos y prácticos para la reforma se buscan fuera de cada sociedad nacional, es decir dichos parámetros están alejados de la realidad educativa chilena, pues los parámetros están dados por países de Europa o de Estados Unidos.
- Reformas desde arriba: Hay una disociación entre reformadores y reformados. Aquí, la participación docente o la participación de los distintos actores de la escuela (padres, estudiantes, apoderados, la sociedad en su conjunto) no tienen cabida dentro de estas reformas, pues únicamente son los reformadores quienes tienen voz y voto dentro de los cambios que se van generando. “Se cuestiona la pedagogía bancaria en el aula, pero se mantiene en definitiva la gran pedagogía bancaria en el modelo mismo de la reforma” (Torres, 2010) y entiéndase como educación bancaria a aquella educación donde el estudiante se ve como un recipiente al cual llenar de conocimientos, siendo el docente el “ente pensante”.
 - Reformas tecnocráticas y vanguardistas: La reforma se juzga a partir de categorías técnicas, de la consistencia y la coherencia de ideas en un papel, las cuales no necesariamente son pertinentes o viables dentro del contexto educativo chileno. Finalmente se concluye que, si la reforma tiene problemas, estos problemas serán de ejecución y nunca de diagnóstico, planificación o diseño, es decir, la culpa de que la reforma no funcione nunca será de los reformadores, sino de los reformados.
 - Reformas escolares: Lo que conocemos como reformas educativas no son más que una reforma escolar, puesto que esta está pensada para modificar el sistema formal, dejando fuera otros sistemas educativos tales como la comunidad, la familia, el trabajo, etc. “El sistema escolar se visualiza como un sistema cerrado, sin contacto con el mundo exterior e incluso con otros sistemas de aprendizaje, aun cuando la retórica del cambio alude expresamente a la necesidad de abrir la escuela al entorno y construir puentes con esos otros sistemas y modalidades de aprendizaje” (Torres, 2010).
 - Reformas intra-escolares: Al hablar de intra-escolares se hace referencia a infraestructura, equipamiento, planes y programas de estudios, gestión interna, etc. Las reformas atienden de forma marginal la demanda educativa, su problemática, opiniones, necesidades e intereses respecto de la educación. Como es sabido, dependiendo del sector donde se encuentre la escuela

esta va a disponer de ciertos recursos, siendo algunas ricas en estos y otras escuelas con un gran déficit de recursos, los cuales, a la hora de generar un cambio dentro de la escuela se estrellan con limitaciones materiales, desinformación e incomprensión de los padres y apoderados. “Al no incluirse esfuerzos expresos por incorporar a la población en el proceso de cambio, y por calificar dicha participación, particularmente entre los sectores más pobres, se reproduce un círculo vicioso que hace que los sectores expuestos a la educación de peor calidad sean los que menos calidad exigen y los que menos esperan del sistema escolar, tanto para sus hijos como para sí mismos” (Torres, 2010)

- Reforma como evento y no como proceso: La reforma se plantea como un evento con una duración determinada, marcada por la lógica, la administración o el financiamiento en vez de por la lógica y los plazos de la educación. Plantear esta reforma dentro de un corto plazo impide asumir la complejidad requerida para una intervención eficaz sobre la realidad que asegure aprendizaje y rectificación en la marcha, en otras palabras, se esperan objetivos ambiciosos en un tiempo récord.
- Reformas a prueba de evaluación: Cada reforma es diferente a la anterior, siempre más novedosa, original y funcional, no obstante, no permite una sistematización y evaluación de lo ya hecho. Los informes de labores son pobres en autocrítica, con un nulo aporte constructivo a la administración siguiente, se describe lo hecho en términos de un recuento exitoso. Por otro lado, Torres (2010) describe que, una sociedad desinformada y ajena al proceso y la propia débil cultura evaluativa dentro del ámbito educativo, no le piden a la reforma y a los reformadores información pública ni rendición de cuentas.
- Reformas a prueba de docentes: A través del tiempo se ha visto a los docentes como los desafiantes de este sistema educacional y sus reformas, esto debido a que las reformas han priorizado la inversión en cosas, como infraestructura, tecnología educativa, etc. antes que en las personas como capacitación docente, bienestar docente, entre otras cosas, así la reforma se ha ido caracterizando por un dualismo en torno a los docentes: en la teoría se valoriza la tarea del docente, sin embargo en la praxis existe negligencia, desprecio y desconfianza; se ve a los docentes como los principales responsables de los problemas educativos, sin embargo, también son los principales responsables de la mejoría en la calidad de la educación. Se ve a los docentes tanto como obstáculo como protagonistas del cambio.

Ahora bien, las reformas educativas son medidas que se anuncian sin previa consulta ni cuentan, dentro de los reformadores, con los docentes, por lo que estos deben ser aplicadores obedientes de lo que

dictaminan otros quienes no están dentro del aula. Además, “la capacitación docente va a la cola de la reforma respecto de otras inversiones y medidas consideradas prioritarias, se piensa como instrumental a las necesidades de la reforma antes que, al desarrollo profesional de los docentes, y se caracteriza por un enfoque corrector y rehabilitador, que pone eternamente en duda el saber docente, su validez y legitimidad” (Torres, 2010).

1.4 Objetivo de la Investigación

1.4.1 Objetivo General

- Proponer una guía docente para el contenido, resolución e identificación de errores de actividades sugeridas por el Ministerio de Educación de los contenidos que presentan mayor debilidad por parte de los y las docentes en ejercicio para la enseñanza de los contenidos del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial planteado en la actualización curricular 2020 para los niveles de III° o IV° medio.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Identificar los contenidos que presentan mayores dificultades por parte de los docentes para la enseñanza respecto al electivo de probabilidades en los niveles de III° o IV° medio según la actualización curricular para el año 2020.
- Bajar los contenidos que presentan mayores dificultades por parte de los docentes para la enseñanza de los contenidos del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, a modo de guía para el docente.
- Resolver una selección de actividades sugeridas por el MINEDUC para el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial a tratar en los niveles de III° o IV° medio, a modo de guía para el docente.
- Identificar errores en los contenidos y actividades presentadas en el programa de estudio para el electivo.

1.5 Relevancia y Justificación.

1.5.1 Relevancia teórica.

La investigación servirá, en primer lugar, para dar a conocer el cómo los docentes de matemáticas se enfrentan a los cambios curriculares de esta magnitud, los cuales involucran un amplio espectro de conocimientos, algunos de bastante dificultad y que son implementados en un corto periodo de tiempo, sin considerar una extensa gama de variables que dificultan su ejecución en el aula, como la preparación de los docentes, la madurez de los alumnos para enfrentar contenido de un nivel de dificultad superior, recursos de las instituciones para implementarlo, entre otros. Por esto, es de suma importancia el cómo se perciben estos cambios y el cómo les afecta a los docentes en su vida laboral y personal.

1.5.2 Relevancia social.

También, esta investigación posee relevancia en el ámbito social debido a que se evidenciará qué tan preparados se encuentran los docentes y la forma en la que estos enfrentarán el nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial influye directamente sobre los alumnos y sobre el futuro de estos, al eventualmente no cumplirse todos y de buena forma los objetivos planteados, generando problemas en cómo los alumnos asimilan los conocimientos entregados por sus profesores, pudiendo influir también en su futuro ingreso a la universidad al tratarse de contenidos a evaluar en las futuras pruebas de selección universitaria.

1.5.3 Relevancia práctica.

Finalmente, esta investigación posee también implicancias prácticas, ya que al visibilizar todas las realidades anteriormente expuestas, da paso a la posibilidad de generar material de apoyo tanto para los docentes, para que puedan guiarse, tanto en contenido, como en la forma de enseñar este contenido para así impartir el electivo de la mejor manera posible, como para los alumnos, para que tengan a su disposición material adecuado para ejercitar con la dificultad que corresponde a su nivel, lo que es totalmente necesario ya que al tratarse de contenido de nivel universitario que posee un alto nivel de complejidad, la gama de ejercicios disponibles en la bibliografía del programa de estudio no está pensada para el nivel escolar.

Capítulo II: Marco Teórico.

2.1 Situaciones de enseñanza para el aprendizaje.

El proceso de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas es considerado usualmente como una tarea compleja, abstracta y que involucra la toma de decisiones en la cual intervienen diferentes saberes (Ball, Thames y Phelps, 2008; Escudero y Sánchez, 2007). Supone que, para lograr la buena enseñanza, los docentes se involucran como personas en la tarea, con todas sus capacidades y sus valores. De otra manera, como señala el centro de perfeccionamiento, experimentación e investigación pedagógicas(CPEIP) en 2008, no lograrían la interrelación empática con sus alumnos, que hace insustituible la tarea docente, por lo que, según el marco de la buena enseñanza, publicado por el CPEIP en 2008, es necesario que el profesor/a posea un profundo conocimiento y comprensión de la disciplina en conjunto del contexto estudiantil para que de esta manera pueda generar situaciones de enseñanza que den paso a aprendizajes de calidad.

La importancia de enseñar con el fin de que el estudiante logre el aprendizaje correspondiente radica en el hecho de que los criterios que lo componen apuntan a la misión primaria de la escuela: generar oportunidades de aprendizaje y desarrollo para todos sus estudiantes (CPEIP, 2008). De esto, el docente adquiere especial relevancia ya que es este quien organiza situaciones interesantes y productivas para que los y las estudiantes puedan tomar conciencia y sean parte activa de su propio proceso de aprendizaje. Salvador Llinares señala:

“Un aspecto de la competencia docente es “mirar de manera profesional” la enseñanza de las matemáticas. Mirar de manera profesional debe ser entendido como poder identificar lo que es relevante para el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes e interpretarlo para fundamentar la toma de decisiones de acción según los objetivos planteados.” (Llinares 2016)

De lo planteado por Llinares(2016), el profesor debe ser capaz de reconocer los hechos que pueden ser relevantes en el aula para explicar el aprendizaje de las matemáticas tomando un rol de orientador, donde pueda lograr, desde los objetivos planteados, que los y las estudiantes se involucren de forma comprometida y asumiendo una postura autónoma en la construcción de conocimientos, habilidades y logrando así, una relación de los contenidos con sus conocimientos previos, experiencias, intereses, etc. Para que esto ocurra de manera beneficiosa para los y las estudiantes es necesaria la retroalimentación

constante por parte del docente para asegurarse de que los educandos estén comprendiendo los contenidos y así sean capaces de colocar en práctica lo aprendido.

En consecuencia, las situaciones de enseñanza para el aprendizaje logran la construcción de aprendizajes significativos y propician el desarrollo de competencias y habilidades en los y las estudiantes mediante la resolución de situaciones o problemas simulados o de la vida cotidiana. Una situación de enseñanza para el aprendizaje se comprende como aquellas actividades educativas diseñadas por el/la docente en el que se ejecutan una serie de actividades de enseñanza, aprendizaje y evaluación con el objetivo de potenciar en el estudiante la construcción autónoma y responsable de competencias genéricas y específicas en un ambiente participativo y dialógico (González, González-Tirados y López, 2011).

González et al. (2011) describen las características de las situaciones de aprendizaje desde un punto de vista profesional en la universidad del siguiente modo:

Tabla N°2: Características de las situaciones de aprendizaje profesional en la Universidad

Características de las situaciones de aprendizaje profesional en la Universidad	
Situaciones de aprendizaje profesional	Su objetivo esencial es potenciar la autodeterminación del estudiante en el desempeño profesional.
	Se desarrollan en ambientes profesionales reales o simulados.
	Parten del reconocimiento del estudiante como sujeto y del profesor como orientador en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
	Exigen una comunicación dialógica entre profesores y estudiantes.
	Parten del reconocimiento de la necesaria unidad de las competencias genéricas y específicas en el proceso de formación profesional

FUENTE: Recuperado de “Diseño de situaciones de aprendizaje que potencien competencias profesionales en la enseñanza universitaria”, por González, V. M., González-Tirados, R. M., y López, A., 2011, *Magister: Revista miscelánea de investigación*, (24), p. 125.

De lo anterior, las situaciones de aprendizaje en el proceso de formación profesional deben contemplar tareas que estimulen la asunción de una postura autónoma, crítica y comprometida con la calidad del desempeño, que oriente la actuación del estudiante en la solución de problemas en el ejercicio de la profesión a partir de la movilización e integración de sus recursos cognitivos y motivacionales expresados en la conducta de manera coherente, con eficiencia, autocrítica, flexibilidad y perseverancia (González, 2009)

El CPEIP, en el año 2019 afirma que:

“Para desarrollar interacciones pedagógicas efectivas, es preciso mediar entre los/as estudiantes y las metas de aprendizaje que nos proponemos. Será apropiado considerar situaciones de aprendizaje desafiantes y que los motiven a participar activamente en su aprendizaje. Para ello es necesario tener en cuenta sus características y el contexto de la escuela; así también, gestionar espacios en que ellos/as interactúen y colaboren entre sí, en pos de una meta de equipo, respetando las diferencias y aprendiendo de sus compañeros/as. Además, hemos de considerar y utilizar las intervenciones de los/as estudiantes en las clases y aprovecharlas positivamente para el aprendizaje.” (CPEIP,2019)

En ese sentido, la metodología de enseñanza para el aprendizaje debe ser activa con orientación al desarrollo de los y las estudiantes mediante la aplicación de distintas estrategias de enseñanza-aprendizaje que puedan promover un aprendizaje significativo en los educandos.

De esta forma, las situaciones de enseñanza-aprendizaje se pueden abordar desde diversas perspectivas, individuales, en pareja o equipos. Según el CPEIP, todo dependerá de cómo el docente organice estas situaciones considerando los saberes e intereses de los estudiantes y proporcionando los recursos adecuados para cada situación.

2.2 Contenidos correspondientes a la unidad de inferencia del electivo Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° Medio.

2.2.1 Intervalos de confianza.

Con una estimación puntual de un parámetro no es posible saber que tan cercano se encuentra este del valor real del parámetro se encuentra, dado que no proporciona información sobre la precisión y confiabilidad de la estimación. Por tanto, para involucrar estos factores, surge la noción de intervalo de confianza, tal como la señala Meyer (1992) en su libro Probabilidad y Aplicaciones estadísticas:

“Suponga que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ se supone conocida, mientras que μ es el parámetro desconocido. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de X y \bar{X} el promedio muestral. Sabemos que \bar{X} tiene distribución $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Por tanto, $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ tiene una distribución $N(0,1)$. Considerar

$$\begin{aligned} 2\Phi(z) - 1 &= P\left(-z \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq z\right) \\ &= P\left(\bar{X} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

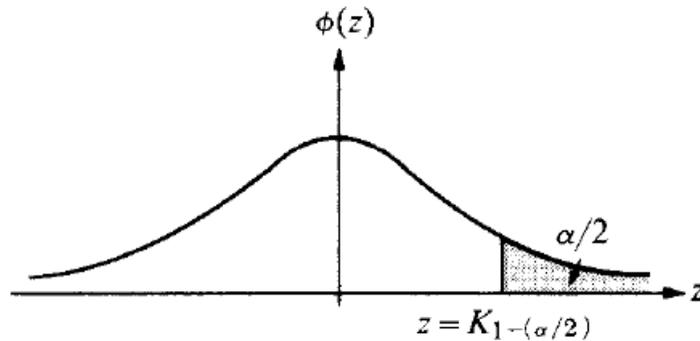
Esta última proposición probabilística debe interpretarse muy cuidadosamente. No significa que la probabilidad del parámetro μ que cae en el intervalo mencionado sea igual a $2\Phi(z) - 1$; μ es un parámetro y está o no en el intervalo anterior. En su lugar, lo anterior debería interpretarse como sigue: $2\Phi(z) - 1$ es igual a la probabilidad que el intervalo aleatorio $\left[\bar{X} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ contenga a μ . A tal intervalo, se le llama intervalo de confianza para el parámetro μ .”

(Meyer, 1992, p.401).

Dado que z es arbitrario, suele elegirse de manera tal que la probabilidad anterior sea $1 - \alpha$, donde α representa el nivel de significancia elegido por el investigador. Así, z se define por la relación $\Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ y según Meyer (1992), a dicho z , se denota como $K_{1-\frac{\alpha}{2}}$, o según otros autores, comúnmente como $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, el cual es obtenido de las tablas de probabilidad de la distribución normal,

cumplíendose que $\Phi\left(K_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Figura N°1



Por tanto, en resumen, un intervalo de confianza para la media poblacional al $(1 - \alpha)100\%$ de confianza es $\left[\bar{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}} \right]$, donde \bar{X} es el promedio de los datos de la muestra aleatoria seleccionada, σ es la desviación estándar de los datos de la población, que se supone conocida, n es el tamaño de la muestra aleatoria y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el factor de confianza, extraído de la tabla de la distribución normal, dependiente de α que es el nivel de significancia o error determinado por el investigador, usando normalmente entre un 1% y un 10%.

Es pertinente mencionar que, algunos autores establecen el intervalo de confianza para la media como $\left[\bar{X} + \frac{Z_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} - \frac{Z_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} \right]$, lo cual también es válido dada la simetría de la distribución normal. Pero, incluso hay algunos autores, como Jay Devore (2008) y Walpole(2007), quienes utilizan la expresión $\left[\bar{X} - \frac{Z_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{Z_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} \right]$, la cual, deja los límites de los intervalos al revés. Esto es porque, en sus textos, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ no lo definen de la forma usual como el valor de la variable que acumula (hacia abajo) una probabilidad de alpha medios, sino que, dicho valor, lo definen de forma contraria, como el valor de la variable que deja por encima una probabilidad de alpha medios, lo que explica los cambios de signo.

Cabe destacar lo mencionado por Meyer(1992) respecto a la interpretación del intervalo de confianza, dado que efectivamente, μ al ser un parámetro de una población, es un número real fijo y no tiene asociada una distribución de probabilidad.

Por otro lado, notemos también que, en los límites del intervalo de confianza para la media, la cantidad sumada y restada del estimador muestral \bar{x} , es exactamente la misma y se define según Walpole(2007) como el error muestral en la estimación, denotado como e . Luego $e = \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}$, que, despejando n , queda como $n = \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{e}\right)^2$, expresión útil para un investigador que quiera determinar el tamaño de muestra adecuado para estimar la media poblacional considerando un error muestral y nivel de confianza determinados en una población finita.

Tal como destaca Walpole (2007), es importante saber que, al tomar muestras diferentes de la misma población, tendremos valores distintos de \bar{X} y, por tanto, obtendremos diversos intervalos de confianza para un mismo parámetro. También, que mientras más grande sea el valor de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ que se elija, más anchos se harán los intervalos, sacrificando precisión y, por tanto, se aumenta la confianza en que la muestra particular seleccionada va a producir un intervalo que contenga el parámetro desconocido μ .

2.2.2 Test de Hipótesis.

Se sabe que un parámetro desconocido, como la media μ de los datos de una población puede ser estimado por un solo número (estimación puntual) o por un intervalo completo de valores aceptables (estimación por intervalos de confianza). Sin embargo, estimar no siempre será el objetivo de una investigación, sino que a veces, solo se quiere determinar la veracidad de alguna de dos conjeturas o afirmaciones contradictorias, utilizando información muestral. A este método se le llama Pruebas o Test de Hipótesis. Formalmente, Walpole(2007) define una hipótesis estadística como una aseveración o conjetura con respecto a una o más poblaciones. De forma similar, Jay Devore (2008) la define como una pretensión o aseveración sobre el valor de un parámetro, como, por ejemplo, la media del diámetro interno de un cierto tipo de tubo de PVC es $\mu = 0,75 \text{ cm}$.

Walpole(2007) asevera que la prueba de hipótesis se formula en torno a la llamada Hipótesis Nula, comúnmente denotada como H_0 , la cual hace referencia a cualquier hipótesis sobre el parámetro desconocido que se quiera probar. El rechazo de dicha hipótesis conduce al no rechazo de una Hipótesis alternativa, denotada comúnmente H_1 o H_a . También, se enfatiza en la función de cada una de ellas, acotando que, por lo general, H_1 representa la pregunta que se quiere responder, la teoría que debe probarse. Así, la hipótesis nula H_0 anula o se opone a H_1 y suele ser el complemento lógico para H_1 .

Walpole(2007) plantea la siguiente situación sobre el veredicto de un jurado:

H_0 : El acusado es inocente ; H_1 : El acusado es culpable

Acota que, en esta situación, dado que una acusación proviene de una sospecha de culpabilidad, esta es representada en la hipótesis alternativa, y por tanto, la hipótesis nula se establece en oposición a esta, y se mantiene a menos que se apoye H_1 con evidencia “más allá de una duda razonable”, enfatizando que, en caso de no rechazar H_0 , no aseguramos inocencia, si no que la evidencia fue insuficiente para lograr condena, de forma que el jurado no necesariamente acepta H_0 , solo no la rechaza, es decir, solo es posible probar la falsedad de H_0 , apoyando H_1 , pero no su veracidad.

Luego de definidas ambas hipótesis, Jay Devore (2008) establece el procedimiento para la prueba de la siguiente forma:

- i) Establecer un estadístico de prueba, es decir, una función de los datos muestrales en los cuales ha de basarse la decisión de rechazar o no rechazar H_0
- ii) Establecer una **región de rechazo**, es decir, el conjunto de todos los valores de estadístico de prueba por los cuales H_0 sería rechazada.

Por tanto, la hipótesis nula será rechazada si y solo si el valor del estadístico de prueba calculado cae en la región de rechazo.

Dada la influencia de las probabilidades al momento de tomar una decisión en las pruebas de hipótesis, existe chance de cometer errores. Puede suceder que: La hipótesis nula H_0 sea rechazada cuando esta es verdadera o que no sea rechazada cuando es falsa. Así, Jay Devore (2008) define como **error tipo I** a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera, denotado como α , correspondiente al nivel de significancia y como **error tipo II** a la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando esta es falsa, denotado como β .

Caso particular: Prueba de hipótesis sobre la media de una población cuando la desviación estándar es conocida.

En la línea de los pasos planteados por Jay Devore (2008) para plantear una prueba de hipótesis, se debe:

- i) Definir las hipótesis Nula y Alternativa
- ii) Establecer el estadístico de prueba
- iii) Establecer la región de rechazo

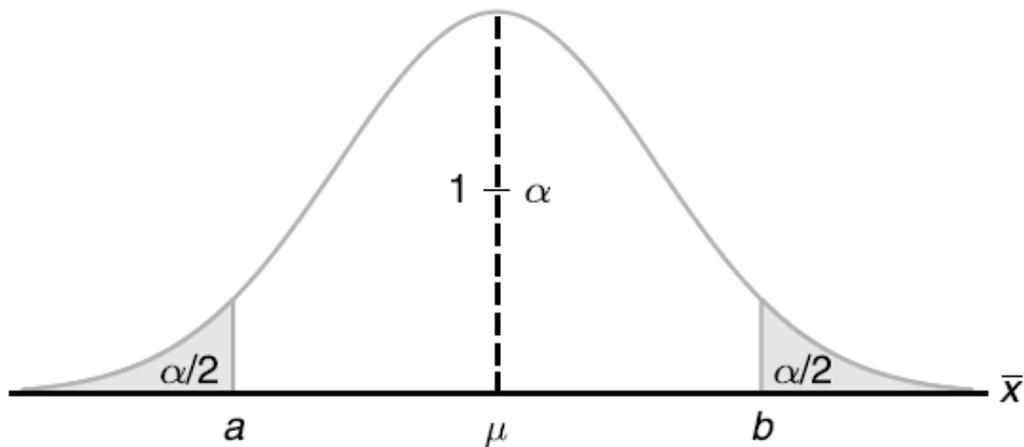
En la definición de las hipótesis, encontramos 3 casos:

- a) $H_0 : \mu = \mu_0$; $H_a : \mu \neq \mu_0$
- b) $H_0 : \mu = \mu_0$; $H_a : \mu > \mu_0$
- c) $H_0 : \mu = \mu_0$; $H_a : \mu < \mu_0$

La letra a) hace referencia a lo que se define como prueba de hipótesis bilateral o a dos colas, mientras que b) y c) son pruebas de hipótesis unilaterales o a una cola.

En el primer caso, donde $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_a : \mu \neq \mu_0$, se quiere dejar una región de aceptación de probabilidad $1 - \alpha$, equivalente a dejar una región de rechazo con probabilidad α , es decir $\frac{\alpha}{2}$ para cada lado de a y b la siguiente forma.

Figura N°2



Tal como señala Walpole (2007), es posible notar la similitud del planteamiento de la prueba de hipótesis bilateral con el intervalo de confianza para la media y, por tanto, es posible utilizarlo para definir tanto el estadístico de prueba como la región y criterio de rechazo. Se sabe que \bar{X} tiene distribución $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Por tanto, $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ tiene una distribución $N(0,1)$. Entonces, se puede plantear que la probabilidad de que $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ se encuentre entre a y b es $1 - \alpha$. Esto es $P\left(a \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq b\right) = 1 - \alpha$. Al igual que en el intervalo de confianza, a y b son respectivamente $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, definidos de la manera usual como el valor de la variable estandarizada que acumula $\frac{\alpha}{2}$ de probabilidad en el caso de a y $1 - \frac{\alpha}{2}$ de probabilidad para el caso de b. Luego:

$$P\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Es posible notar que, bajo el supuesto de la hipótesis nula de que $\mu = \mu_0$, entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ tiene una distribución $N(0,1)$ y luego debiese ocurrir obligatoriamente que

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Si dicha igualdad no ocurre, es decir, que la probabilidad señalada es distinta a $1 - \alpha$, significa que hay evidencia muestral suficiente para afirmar que $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ no tiene distribución $N(0,1)$ y, por tanto, que $\mu \neq \mu_0$, llevando a rechazar H_0 , favoreciendo H_1 . Entonces, utilizando como estadístico de prueba a $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$, es posible definir como regiones de rechazo aquellas donde están los valores del estadístico de prueba que hacen que no se cumpla la relación anterior, los cuales son $Z < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ y $Z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, lo que es equivalente a decir $|Z| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

En el caso b), al igual que en a), se quiere dejar una región de no rechazo de probabilidad $1 - \alpha$, equivalente a dejar una región de rechazo con probabilidad α , pero en este caso, al ser una hipótesis unilateral y plantear $H_a : \mu > \mu_0$, se deja esa región de rechazo en la cola derecha de la distribución. Luego, similar a lo anterior, como \bar{X} tiene distribución $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ tiene una distribución $N(0,1)$. Esto quiere decir que $P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq Z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$. Por tanto, debiese ocurrir que, bajo el supuesto de la hipótesis nula $\mu = \mu_0$, $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \leq Z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$, de lo contrario, podemos afirmar que dicha hipótesis no es verdadera, rechazándola. Así, se puede establecer la región de rechazo como aquellos valores del estadístico de prueba $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ que no cumplen dicha relación y esto es, $Z > Z_{1-\alpha}$.

Finalmente, para el caso c), análogamente, se desea dejar una región de no rechazo de probabilidad $1 - \alpha$, equivalente a dejar una región de rechazo con probabilidad α , pero esta vez, considerando la hipótesis alternativa $\mu < \mu_0$, dicha región queda en la cola izquierda de la distribución. Análogamente, como \bar{X} tiene distribución $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ tiene una distribución $N(0,1)$. Esto quiere decir que $P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \geq Z_\alpha\right) = 1 - \alpha$. Por tanto, debiese ocurrir que, bajo el supuesto de la hipótesis nula $\mu = \mu_0$, $P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \geq Z_\alpha\right) = 1 - \alpha$, de lo contrario, es posible afirmar que dicha hipótesis no es verdadera, rechazándola. Así, se puede establecer la región de rechazo como aquellos valores del

estadístico de prueba $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ que no cumplen dicha relación y esto es, $Z < Z_\alpha$.

2.3 Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK).

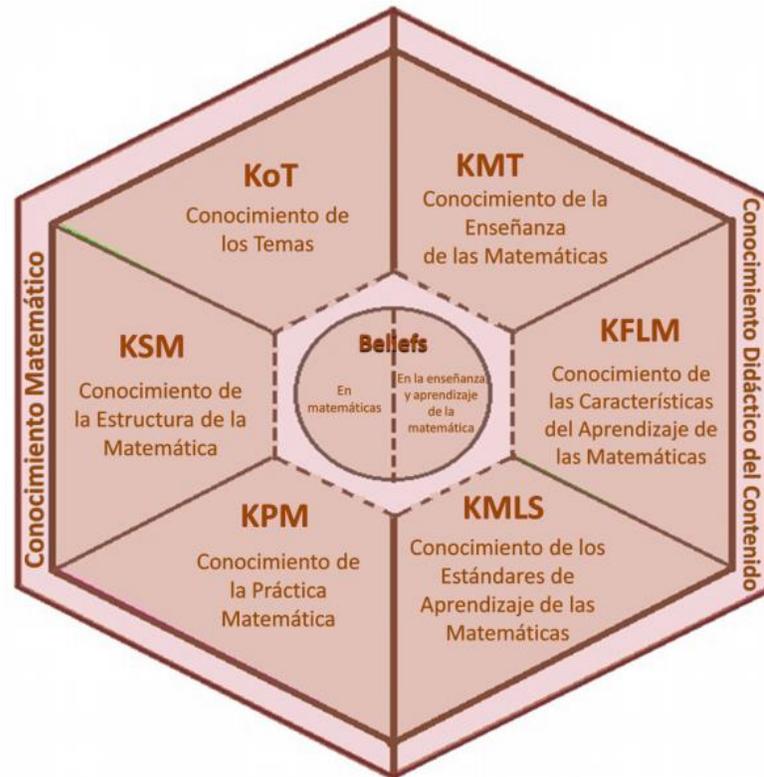
El MTSK, sigla en inglés para Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (Conocimiento especializado del profesor de matemáticas) es un modelo teórico didáctico y a su vez, una herramienta metodológica para analizar prácticas pedagógicas, desarrollado en 2013 por Carrillo, Flores, Climent, Contreras, Aguilar, Escudero y Montes, grupo de investigación sobre didáctica de las matemáticas de las universidades de Huelva y Granada, a partir de problemáticas detectadas en la delimitación entre los subdominios y sus indicadores en el modelo MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) propuesto por Ball, Thames y Phelps en 2008.

“Un modelo para analizar el conocimiento de un profesor referido a una disciplina específica, en nuestro caso las matemáticas, debe entender el carácter especializado en su totalidad y no solo en una de las partes y, además, tener a las matemáticas, entendida como objeto de enseñanza y aprendizaje, como elemento nuclear” (Carrillo et al. 2017).

Es así como Carrillo et al. (2017) reconocen que un profesor, en particular, de matemáticas, no puede solo poseer conocimiento matemático, así como no solo puede poseer conocimiento didáctico, sino que debe incorporar ambos en su totalidad. Es por ello, que en su modelo MTSK, proponen lineamientos y directrices sobre el qué deben dominar los profesores de matemáticas, y sobre el cómo deben hacerlo, estableciendo para esto, dos categorías o dominios. Estos son el MK, sigla en inglés para Mathematical Knowledge, referido al Conocimiento matemático, y el PCK, sigla en inglés para Pedagogical Content Knowledge, referido al conocimiento didáctico del contenido.

Dentro de los dominios o categorías, se encuentran 6 subdominios, los cuales se visualizan en la siguiente figura.

Figura N° 3:



2.3.1 Subdominios del Conocimiento Matemático (MK).

2.3.1.1 Conocimiento de los temas (KoT).

Carrillo et al. (2017) dividen el Conocimiento de los Temas en 5 categorías o indicadores. Estas son: Definiciones, Fenomenología y aplicaciones, Propiedades y Fundamentos, Registros de representación y finalmente, Procedimientos.

En primer lugar, Carrillo et al. (2017) señalan que es importante conocer las definiciones de un objeto matemático, como, por ejemplo, que una fracción se puede definir como el cociente de dos números enteros o como el representante de una relación de equivalencia en \mathbb{Q} . Sin embargo, no solo se puede contar con conocer definiciones, sino que se debe incorporar sus usos y aplicaciones para darles sentido al momento de enseñar, lo que corresponde a la categoría de Fenomenología y Aplicaciones.

Luego, para complementar las dos categorías anteriormente mencionadas, Carrillo et al. (2017) introducen la categoría Propiedades y sus Fundamentos, la cual hace relación con conocer las características de un determinado concepto o definición matemática, otorgando conocimiento, como, por ejemplo, que “la densidad de los números racionales en los reales permite dar una aproximación tan precisa como se desee a cualquier número racional” (Carrillo et al. 2017).

Luego, en la categoría de Registros de representación, se involucran las diferentes formas que el profesor de matemáticas utiliza para comunicar un objeto matemático, esto es, forma gráfica, algebraica, simbólica, etc. Por ejemplo, en el caso de fracciones, expresar estas como fracciones irreducibles, fracciones equivalentes, fracciones impropias, numerador, denominador.

Finalmente, dentro del KoT se encuentra la categoría de Procedimientos, que implica que el profesor de matemáticas no solo debe conocer los algoritmos de determinados procedimientos matemáticos, sino que, profundizar y saber el porqué de estos, sus deducciones y/o demostraciones y estar conscientes de que existen, en diversos casos, múltiples procedimientos alternativos para resolver un mismo ejercicio o problema. Por ejemplo, como señalan Carrillo et al. (2017), siguiendo con el tema de las fracciones, saber por qué cuando se dividen dos fracciones, se multiplica en cruz, así como también reconocer que existen procedimientos alternativos, como, por ejemplo, transformar en multiplicación invirtiendo la segunda fracción, o bien, encontrar fracciones equivalentes a las dadas, con igual denominador, y solo dividir sus numeradores.

2.3.1.2 Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM).

Carrillo et al. (2017) argumentan que el conocimiento de conexiones entre objetos matemáticos es la esencia del KSM, declarando a modo de ejemplo el caso en el estudio de los números racionales, acotando que forman parte del KSM las conexiones entre los contenidos matemáticos que de alguna forma permiten conectar las distintas aristas del contenido, como las conexiones que se establecen entre fracciones, decimales y porcentajes, relaciones entre fracciones y razones y proporciones, o conectando con otro tema, como por ejemplo la conexión entre las fracciones y las probabilidades, para el cálculo y comparación de estas.

De forma específica, se identifican 4 tipos de conexiones. Estos son: *Conexiones de simplificación*, las cuales hacen referencia a ver contenidos complejos de una manera elemental o superficial, *Conexiones*

de complejización, las que hacen referencia a revisar y proyectar un contenido elemental hacia una versión más avanzada o profundizada del mismo, *Conexiones de contenidos Transversales*, en donde se relacionan entre sí contenidos que comparten ciertos rasgos y características, como es el caso de las relaciones de equivalencia y figuras geométricas congruentes y finalmente las *Conexiones Auxiliares*, que funcionan como vehículo entre un objeto matemático y otro, como ayuda tanto en la conceptualización, como en la resolución.

2.3.1.3 Conocimiento de la práctica Matemática (KPM).

Según Carrillo et al. (2017), el Conocimiento de la práctica Matemática (KMP) involucra el conocimiento de las distintas formas de proceder, características del trabajo matemático, incluidos los aspectos de comunicación, argumentación y demostración, así como también el conocimiento sobre qué significa definir, las características de la definición y su papel en la construcción del conocimiento matemático (Carrillo et al. 2017), como por ejemplo, reconocer el contraejemplo como vía para invalidar una conjetura, o el conocimiento de las condiciones necesarias en una proposición matemática para justificarla o reconocerla como verdadera.

2.3.2 Subdominio del Conocimiento Didáctico del Contenido.

2.3.2.1 Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT).

En este subdominio del PCK, Carrillo et al. (2017) identifican tres categorías o indicadores. Estas son: *Recursos materiales*, acotando la importancia y utilidad de los diversos recursos para enseñar, pero acotando que no es el recurso en sí lo principal, si no el conocimiento del potencial de este y la actividad matemática que encierra, como, por ejemplo, material concreto para visualizar la diferencia entre números enteros. También se encuentra como categoría, *Ejemplos y Actividades de Enseñanza*, diferenciándola de la categoría anterior, como el sentido o la dirección que se le da a dichos recursos o materiales, es decir, la intencionalidad por parte del docente en el uso de estos, para abordar distintos objetos matemáticos. Finalmente, se encuentra la categoría de *Teorías personales o institucionales de enseñanza*, la cual hace referencia al conocimiento y aplicación de los distintos modelos o teorías didácticas referentes al aprendizaje de las matemáticas, como Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau o la Teoría Antropológica de lo Didáctico y Transposición Didáctica de Chevallard, entre otras.

2.3.2.2 Conocimiento de las características del Aprendizaje de las Matemáticas (KLFM).

Dentro del KLFM, Carrillo et al. (2017) distinguen 4 categorías. Estas son: *Formas de Aprendizaje*, la cual hace referencia al conocimiento previo del profesor sobre el cómo aprenden matemáticas sus estudiantes, referente a la naturaleza misma del contenido matemático a tratar e incluyendo conocimiento de estructuras o teorías sobre el desarrollo cognitivo de los estudiantes, tanto como en matemáticas, como en el aprendizaje en general. En segundo lugar, se encuentra *Fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje*, considerando como necesario en el docente de matemáticas tener conocimiento pleno y tratamiento de los errores, obstáculos, dificultades y capacidades potenciales de sus estudiantes vinculados a las matemáticas, global o específicamente. En tercer lugar, encuentra la categoría de *Formas de interacción de los alumnos con el contenido*, referente a las estrategias personales en cómo enfrentar las matemáticas por parte de los estudiantes, como un conocimiento de carácter proposicional vinculado a la producción en Educación Matemática (Carrillo et al. 2017). Finalmente, se encuentra la cuarta categoría, *Concepciones de los estudiantes sobre Matemáticas*, relativa a las expectativas e intereses que suelen tener los estudiantes en relación con los contenidos matemáticos.

2.3.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Según señalan Carrillo et al. (2017), es necesario que el profesor de matemáticas conozca lo que está establecido institucionalmente que debe aprenderse del contenido matemático en cada nivel educativo, es decir, el currículum en matemáticas, con tal de poder tomar decisiones sobre el qué y cómo organizar y secuenciar el contenido matemático en los distintos niveles escolares. Así, establecen una diferencia entre tres categorías. Estas son: *Contenidos matemáticos a enseñar*, que involucra el conocimiento de los estándares educativos, en este caso, el currículum en matemáticas planteado por el MINEDUC, *Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado* y *Secuenciación de diversos temas*, haciendo referencia sobre la importancia de que el docente sea capaz de identificar los contenidos de modo tal de establecer una secuenciación conceptual y procedimental lógica de los contenidos establecidos en el currículum.

2.4 Programa del electivo de Probabilidad y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV medio. Unidad 4: Estadística Inferencial.

En esta sección, se visualizan las secciones más importantes de la introducción y unidad 4 del programa de estudio. Para revisarlo en toda su extensión, dirigirse a Anexos 4.



Estructura del programa

Propósito de la unidad

Resume el objetivo formativo de la unidad, actúa como una guía para el conjunto de actividades y evaluaciones que se diseña en cada unidad. Se detalla qué se espera que el estudiante comprenda en la unidad, vinculando los contenidos, las habilidades y las actitudes de forma integrada.

Objetivos de Aprendizaje (OA)

Definen los aprendizajes terminales del año para cada asignatura. En cada unidad se explicita los Objetivos de Aprendizaje a trabajar.

Las actividades de aprendizaje

El diseño de estas actividades se caracteriza fundamentalmente por movilizar conocimientos, habilidades y actitudes de manera integrada, que permitan el desarrollo de una comprensión significativa y profunda de los Objetivos de Aprendizaje. Son una guía para que el profesor o la profesora diseñen sus propias actividades de evaluación.

Programa de Estudio Unidad 1

UNIDAD 1 ¿QUÉ DICEN LOS GRÁFICOS? ANÁLISIS CRÍTICO DE LA INFORMACIÓN

PROPÓSITO DE LA UNIDAD

Desde un nivel se procura que los estudiantes resuelven problemas con involucro elige la representación gráfica más adecuada para describir tendencias de datos recopilados. Se espera que interpreten y relacionen diferentes maneras de representar información de forma manual y mediante el uso de herramientas digitales y que a partir del análisis crítico de la información que toman decisiones y los argumentos. Algunos ejemplos que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿De qué manera la elección de un tipo de gráfico está determinada por el fenómeno o los datos que se necesita representar? ¿Por qué la toma de decisiones depende del tipo de gráfico utilizado?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

CONOCIMIENTO Y COMPRENSIÓN

OA1 Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de caja y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA2 Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA3 Argumentar, utilizando lenguaje verbalístico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una afirmación, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA4 Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Programa de Estudio Unidad 1

ACTIVIDAD 1: Modelar cambios con funciones en Chile Evidencia: el caso del agua

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD

En esta actividad los estudiantes comprenderán que para estudiar en cierta forma es necesario reconocer, representar, interpretar y comunicar gráficamente la información. Los datos estadísticos que se trabajan son fuentes de análisis la situación y decisiones con una alta capacidad de hacer inferencias y tomar decisiones pertinentes en el caso de situaciones problemáticas. Para esto, los estudiantes trabajarán de forma colaborativa y se orientarán por las situaciones que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual y para el desarrollo del estudiante.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

OA1 Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de caja y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA2 Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA3 Argumentar, utilizando lenguaje verbalístico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una afirmación, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA4 Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

La siguiente es una evidencia de un caso representativo de cómo medio de años que los que se ven a los estudiantes de un caso real. El caso muestra el promedio de años que vive la gente de personas nacidas en un mismo año, a las condiciones de mortalidad de la región a la que se le está evaluando se muestran constantes. La siguiente tabla, elaborada por el Instituto Nacional de Estadística (INEC), muestra los experimentos de vida de Chile desde 1991 hasta la estimación para 2021.

Indicadores de evaluación

Detallan uno o más desempeños observables, medibles, específicos de los estudiantes que permiten evaluar el conjunto de Objetivos de Aprendizaje de la unidad. Son de carácter sugerido, por lo que el docente puede modificarlos o complementarlos.

Orientaciones para el docente

Son sugerencias respecto de cómo desarrollar mejor una actividad. Generalmente indican fuentes de recursos que se puede adquirir (vínculos web), material de consulta y lecturas para el docente, y estrategias para tratar conceptos, habilidades y actitudes.

Recursos

Se especifica todos los recursos necesarios para desarrollar la actividad. En especial, es relevante incorporar recursos virtuales y de uso de TIC, dado el enfoque de aprendizaje para la comprensión profunda y el de las Habilidades para el Siglo XXI.

Actividades de evaluación sumativa de la unidad

Son propuestas de evaluaciones de cierre de unidad, que contemplan los aprendizajes desarrollados a lo largo de ellas. Mantienen una estructura similar a las actividades de aprendizaje.

Programa de Estudio Unidad 1

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
OA2 Reflexionar sobre el efecto estético de las obras leídas, evaluando: <ul style="list-style-type: none">• Cómo la obra dialoga con los experiencias personales del lector y sus puntos de vista sobre diversas problemáticas de ser humano (afectos, valores éticos, conflictos, etc.).• Cómo los recursos y técnicas literarias de la obra inciden en el efecto estético producido.	<ul style="list-style-type: none">• Relacionan las obras leídas y su experiencia personal.• Describen el efecto estético producido con el uso de determinados recursos en la obra literaria.• Explican su experiencia de lectura y parte del efecto estético que les produce la obra y la conexión de esta con su mundo personal como lector.
OA6 Producir textos (orales, escritos o audiovisuales) coherentes y cohesionados, para comunicar sus análisis e interpretaciones de textos, desarrollar posturas sobre temas, explorar creativamente con el lenguaje, entre otros propósitos: <ul style="list-style-type: none">• Aplicando un proceso de escritura* según sus propósitos, el género discursivo seleccionado, el tema y la audiencia.• Adecuando el texto a las convenciones del género y a las características de la audiencia (conocimientos, intereses, convenciones culturales). *El proceso de escritura incluye las etapas de planificación, elaboración, edición y revisión.	<ul style="list-style-type: none">• Desarrollan una postura, interpretación o análisis fundamentado a partir de conexiones con otras lecturas, discusiones en clases, experiencias personales, etc.• Construyen texto que ajustan en distintos momentos del proceso, a partir de su propósito comunicativo y de la comunicabilidad del texto.• Aplican estrategias al desarrollar el proceso de escritura en función de su propósito comunicativo y del manejo por comunicar.• Organizan sus ideas e información por medio de distintos recursos, según las propósitos de escritura y el género discursivo.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

ESCRITURA DE UN COMENTARIO LITERARIO

Los estudiantes leen un fragmento de un texto literario, puede ser un cuento, un poema o un fragmento de novela. Realizan el análisis, identificando uno o efecto estético de los recursos empleados por el autor, para luego elaborar una interpretación. La interpretación se fundamenta en el análisis realizado.

Es importante, para realizar el comentario, tener presente una estructura semejante a la que se ha utilizado durante la unidad en las diversas actividades, así como la presentada para trabajar la lectura complementaria en clases. Primero localizar el texto, luego, analizar los recursos lingüísticos o literarios empleados por el autor, y proponer para ello una interpretación.

SECUENCIA

Objetivos de Habilidades para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Habilidades

Resolver problemas

- a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
- b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

Argumentar y Comunicar

- c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
- d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Modelar

- e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
- f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

³ No es necesario seguir un orden lineal al enseñar el proceso de investigación; se puede trabajar cada uno de los Objetivos de Aprendizaje en forma independiente.

Representar

- g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
- h. Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema a solucionar.

Habilidades digitales

- i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.
- j. Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.
- k. Analizar y evaluar el impacto de las tecnologías digitales en contextos sociales, económicos y culturales.
- l. Conocer tanto los derechos propios como los de los otros, y aplicar estrategias de protección de la información en ambientes digitales.

Objetivos de Aprendizaje para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Conocimiento y comprensión

1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.
2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.
3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.
4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

Visión global del año

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
¿Qué dicen los gráficos? Análisis crítico de la información	Media muestral, dispersión y correlación	Situaciones o fenómenos que se modelan por medio de las distribuciones binomial y normal	Inferencia estadística
Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje
OA 1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.	OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.	OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal. OA b. Resolver problemas que	OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con

<p>OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información</p>	<p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitati</p>	<p>impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitati va confiable a través de la web.</p>	<p>base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.</p> <p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje</p>
<p>Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación, febrero 2021</p>		<p>28</p>	
<p>Programa de Estudio Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial - 3° y 4° medio Formación Diferenciada</p>			
<p>matemática/cuantitati va confiable a través de la web.</p> <p>Actitudes</p>	<p>va confiable a través de la web.</p> <p>Actitudes</p>	<p>Actitudes</p>	<p>simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.</p> <p>Actitudes</p>

<p>Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.</p>	<p>Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.</p> <p>Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.</p>	<p>Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.</p> <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p>	<p>Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.</p> <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p>
<p>Tiempo estimado: 10 semanas</p>	<p>Tiempo estimado: 9 semanas</p>	<p>Tiempo estimado: 10 semanas</p>	<p>Tiempo estimado: 9 semanas</p>

Unidad 4

Unidad 4: Hacer inferencia estadística

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden cómo se puede inferir información desde una muestra cuando la población está “distribuida normalmente”. Por ejemplo: cómo construir un intervalo de confianza para que la media poblacional se encuentre dentro de dicho intervalo con un cierto nivel de precisión previamente dado. O bien, plantear pruebas de hipótesis para aprobar o rechazar una predicción en torno a parámetros específicos de la población. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿En qué condiciones estadísticas es confiable la información? ¿Cuáles son las condiciones de significatividad que afectan la toma de decisiones?

Objetivos de Aprendizaje

OA 4.

Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actividad 1: Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan en términos generales el uso de la estadística inferencial y cómo estimar parámetros de una población a partir de estadísticos de muestras de esa población. Con ello, pueden estimar, por ejemplo, la media de una población, con intervalos de confianza de mayor o menor precisión entregando un nivel de confianza según lo requerido o lo deseado.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

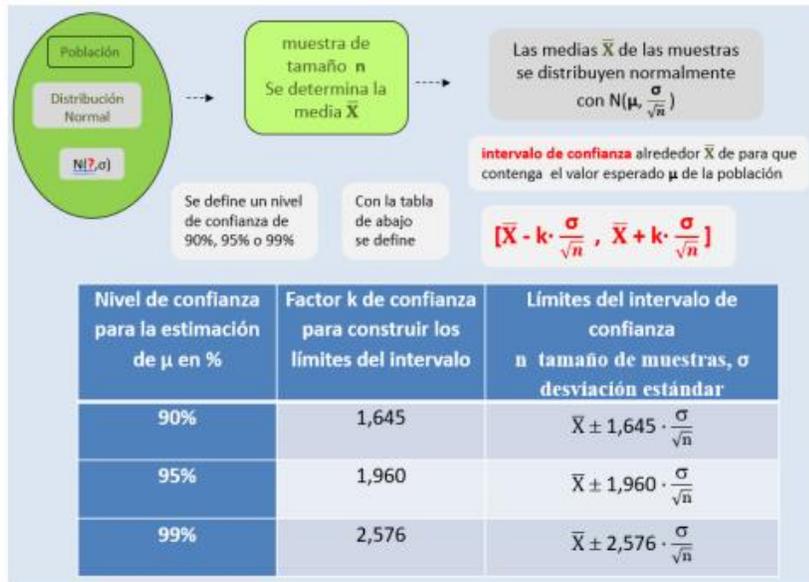
Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

Se sugiere un trabajo colaborativo para las siguientes actividades.

INTRODUCIR EL CONCEPTO DE UN INTERVALO DE CONFIANZA

1. Observen el siguiente esquema, que presenta en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial a partir de muestras de una población determinada.



2. El nivel de confianza se puede expresar también como $1 - \alpha$, donde $\alpha = 0,1$ o bien $\alpha = 0,05$ o bien $\alpha = 0,01$. Además, el factor k corresponde al puntaje según una normal estándar $Z\alpha/2$.
Por ejemplo: si $\alpha = 0,05$, se tiene que $\alpha/2 = 0,025$ y el puntaje $Z\alpha/2$ [según una tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo)] es $-1,96$, que corresponde al valor más cercano de $0,025$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475

3. Del mismo modo que para el nivel de confianza de 0,95, comprueben en la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo), los puntajes $Z\alpha/2$ para los niveles de confianza de 0,90 y 0,99.
- a. A partir de lo anterior, completen la tabla:

$1 - \alpha$	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$	Intervalo de confianza
0,90	0,05		
0,95	0,025	1,960	$\left[\bar{X} - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,005		

- b. Compartan ideas acerca de los parámetros de la población y los estadísticos de las muestras. ¿Sobre qué se quiere inferir o estimar algún valor y cómo? Argumenten.
- c. Si una población se distribuye normalmente $N(\mu, \sigma)$, ¿cómo se distribuyen las medias de las muestras de tamaño "n" extraídas de dicha población?
- d. En sus propias palabras, ¿qué es un intervalo de confianza para la media "desconocida" de una población de la cual sí se conoce su desviación estándar? Expliquen.
- e. ¿En qué influye el nivel de confianza a la hora de fijar un intervalo para la media de la población? Argumenten.

- f. ¿Cómo se puede interpretar la expresión $Z\alpha/2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y cómo influye en ella el tamaño “n” de la muestra? Argumenten.

UN EJEMPLO

Después de una década sin recopilar datos, se quiere determinar aproximadamente el valor esperado μ de la estatura entre las mujeres de una población. Se saca una muestra de 100 mujeres, con una estatura media de $\bar{X} = 154\text{cm}$. Se conoce la desviación estándar de esa medición: $\sigma = 6\text{cm}$ y se estima que no ha cambiado.

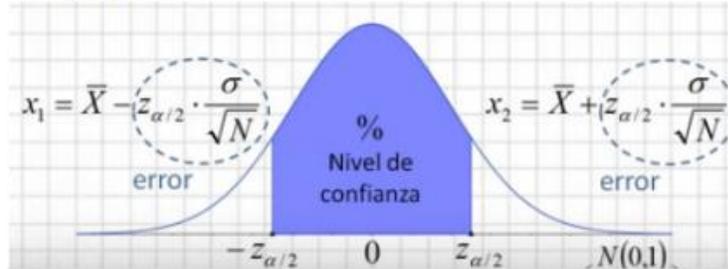
- A partir de la muestra poblacional, describan el procedimiento que determina un intervalo de confianza para estimar el valor esperado poblacional μ .
- Determinen el intervalo de confianza alrededor de la media muestral \bar{X} con un nivel de 95% de confianza, que contenga el valor esperado μ de la población.
- Si la media muestral $\bar{X} = 154\text{ cm}$ hubiera resultado de una muestra de 400 mujeres, ¿qué influencia tendría en el intervalo de confianza? Argumenten.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere comenzar esta unidad con un diagnóstico y repaso de los temas vistos antes y, además, incentivar la noción de confianza. Para ello, los jóvenes los estudiantes elaboran esquemas sobre la ubicación que le darían a las personas que les merecen mayor y menor confianza. Como el tema es muy personal, conviene que los trabajos sean anónimos. Lo ideal es poner al sujeto en el medio, a su alrededor a las personas con mayor grado de confianza y más lejos a medida que va disminuyendo esa confianza. Aunque no es una analogía para el intervalo de confianza, les permitirá acercarse al concepto y comparar con las características específicas para calcular intervalos de confianza.
- Cabe explicarles que, en la estadística descriptiva, se puede describir poblaciones con variables aleatorias; según el contexto, se elige mayoritariamente una variable aleatoria binomial o una variable aleatoria normal. Al conocer los parámetros poblacionales como “n” y “p” en el caso de la binomial, y “ μ ” y “ σ ” en el caso de la normal, se puede determinar probabilidades referidas a muestras de dichas poblaciones.
- Por su parte, la estadística inferencial aplica la siguiente propiedad de cada variable aleatoria normal: Se considera todas las medias \bar{X} de muestras del mismo tamaño “n” de una población normalmente distribuida con media “ μ ” y desviación estándar “ σ ”. Se puede constatar que la distribución de las medias muestrales \bar{X} sigue una variable aleatoria normal con el valor esperado “ μ ” de la población, pero con una desviación reducida “ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ” que depende del tamaño “n” de las muestras.
- En la práctica se toma una muestra del tamaño “n” de la población, se determina la media \bar{X} de la muestra y se construye un “intervalo de confianza” alrededor de la media muestral \bar{X} ; así se tiene “confianza” en que el valor esperado “ μ ” de la población se encuentre dentro de este

intervalo. Finalmente, con un nivel de confianza deseado, se determina el largo del intervalo utilizando la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo).

- Se recomienda discutir con ellos acerca del error (E) asociado a la estimación de la media mediante intervalos de confianza. Si se considera un nivel de confianza $1 - \alpha$, en términos de probabilidad se tiene que $P(\bar{X} - E \leq \mu \leq \bar{X} + E) = 1 - \alpha$, donde el error queda expresado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Esto se puede apreciar en el siguiente esquema:



- Por ende, una expresión para determinar el tamaño "n" de las muestras acorde al error que se quiere cometer es $E = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$.
- Dado que uno de los objetivos de la unidad 4 es OA 4 –Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis–, se sugiere compartir con los jóvenes la siguiente propuesta de rúbrica para que evalúen el proceso argumentativo de forma general:

Criterios	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Caracterizan los datos entregados según la variable del problema.	Identifican la cantidad de datos de la muestra y el problema con una distribución normal.	Identifican la cantidad de datos de la muestra.	Mencionan una cantidad que se relaciona con otro problema.
	Identifican el promedio y la desviación estándar en el problema.	Identifican el promedio o la desviación estándar en el problema.	Escriben información numérica.
Establecen la hipótesis o conjetura que defenderán con argumentos, buscando datos en la información entregada u otras fuentes.	Elaboran una hipótesis, basándose en los datos del problema o de otras fuentes relacionadas.	Elaboran una hipótesis, basándose parcialmente en los datos del problema.	Escriben una frase.

Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis para apoyar la argumentación.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis apoyando la argumentación asociada al problema.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis.	Realizan cálculos.
Relacionan los resultados para defender las posturas o hipótesis iniciales.	Relacionan los resultados mediante un hilo conductor, para concluir la postura o hipótesis.	Utilizan los resultados para concluir la postura o hipótesis.	Presentan los resultados.
Comparan resultados para cambiar de posición si es necesario.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis y la cambian o reafirman, según corresponda.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis.	Presentan una hipótesis asociada a otros resultados.

8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

- Identifican los elementos principales en una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.
- Resuelven problemas en los que deben hacer una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Sitio de Economía y Finanzas que relaciona estas ciencias con la estadística. Universidad Complutense de Madrid.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://economipedia.com/definiciones/intervalo-de-confianza.html>
- Documento con la teoría de probabilidades y estadística. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.dm.uba.ar/materias/probabilidades_estadistica_C/2011/1/PyEC142011.pdf
- Curso de Inferencia de una población más bibliografía. Documento del Departamento de Estadística de la Universidad Carlos III, Madrid.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/aaribas/eng/docs/estII/tema1esp.pdf>
- Intervalos de confianza y otros temas de la inferencia estadística en la página de Minitab, software estadístico con una prueba gratis para su uso.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/what-is-a-confidence-interval/>

Actividad 2: Inferencias en diferentes contextos usando intervalos de confianza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes puedan obtener intervalos de confianza para realizar inferencias sobre la media de una población en diferentes contextos. Para ello, deben identificar –a partir de la información entregada– los elementos que permiten establecer un intervalo para la media de la población, según el nivel de confianza requerido.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 12 horas pedagógicas

Actividad 3: Elaborar una hipótesis y comprobar o rechazar en diferentes contextos

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan cómo hacer inferencias; para ello, elaboran pruebas de hipótesis que permitan “aceptar o rechazar” cierta información, considerando cierto nivel de confianza y un error de probabilidad. A diferencia de la estimación de la media poblacional por medio de intervalos de confianza en torno a la media muestral, aquí se establece intervalos de confianza en torno a la media poblacional, para probar si la media muestral está o no contenida en los intervalos de confianza y aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 12 horas pedagógicas

Actividad 4: Elaborar y comprobar o rechazar una hipótesis

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan algo más sobre pruebas de hipótesis; por ejemplo: en relación con la existencia de errores. En estadística inferencial, se considera principalmente dos tipos de errores: Tipo I, rechazar incorrectamente la hipótesis nula (aunque sea verdadera) y Tipo II, aceptar erróneamente la hipótesis nula (aunque sea falsa). Ambos tienen consecuencias en la vida diaria y en todas las investigaciones científicas. Así, en el ámbito escolar, los jóvenes pueden aproximarse a la manera de trabajar científicamente.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

Capítulo III: Marco Metodológico.

La presente investigación está pensada en tres etapas para el cumplimiento de los objetivos planteados. La primera etapa considera la elaboración de la encuesta titulada “*Percepción del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° medio*”. La segunda etapa considera el análisis de la información recopilada luego de aplicar la encuesta, mientras que la tercera etapa contempla la creación de una guía para los docentes que consiste en la bajada y explicación de los contenidos de inferencia estadística, en particular, intervalos de confianza y test de hipótesis, en base al programa de estudio publicado por el MINEDUC, en conjunto del desarrollo de las actividades planteadas dentro del programa y evidenciar los errores y dificultades que presentan estas dentro del electivo Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° medio.

Según lo referido por Hernández R, et al. (2014) en el texto “Metodología de la Investigación”, el estudio se estructura con un enfoque cualitativo dado que posee las siguientes características:

- i. La recolección de datos comprende en su mayoría a la variable de percepción y, por tanto, está orientada a proveer de un mayor entendimiento de los significados y experiencias de las personas.
- ii. El análisis de los datos tiene como finalidad comprender a las personas, procesos, eventos y sus contextos.
- iii. No se siguió un proceso definido claramente. Los planteamientos iniciales no son tan específicos como en un enfoque cuantitativo y la pregunta de investigación no se ha definido por completo, pudiendo variar.

El alcance del estudio es de tipo descriptivo, referente a lo planteado por Hernández R, et al. (2014), dado que se busca especificar las propiedades, características y perfiles de una muestra de docentes de matemáticas en torno al análisis de percepción.

Respecto a la temporalidad del estudio, esta es de corte transversal ya que tiene como propósito describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un lugar y momento determinado (Hernández R, et al., 2014).

3.1 Caracterización de la muestra.

La muestra está constituida por 28 docentes de la Región Metropolitana en ejercicio de la asignatura Matemáticas para los niveles desde 7° básico a IV° medio, quienes provienen de 15 universidades a lo largo del país. Dentro de la muestra utilizada, la universidad con más representatividad respecto a la formación docente es la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación teniendo 28,57% de los encuestados proveniente de ella.

Hernández R, et al. (2014) afirma: *“La muestra es, en esencia, un subgrupo de la población. Digamos que es un subconjunto de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus características al que llamamos población”*. (p.175)

En las muestras no probabilísticas, la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino de causas relacionadas con las características de la investigación o los propósitos del investigador. (Hernández R, et al., 2014)

La muestra seleccionada es no probabilística, pues fue por conveniencia, ya que es considerado no aleatorio (Hernández R, et al., 2014), el acceso a la muestra fue con facilidad. Este tipo de muestreo avala a procedimiento sin fórmula, es decisión grupal para realizar e implementar en la muestra de estudio.

El medio de aplicación de la encuesta *“Percepción del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° medio”* fue a través de la plataforma en línea Google Forms, la implementación de la encuesta comenzó en una primera etapa mediante el contacto a docentes egresados de la UMCE, quienes actualmente están realizando clases en aula. En una segunda etapa se realizó el contacto con profesores de matemáticas en grupos de la plataforma Facebook para así tener una muestra grande y con docentes de diversa formación.

El detalle de las universidades de egreso de los profesores de matemáticas pertenecientes a la muestra observada se presenta a continuación.

Tabla N° 3: Universidades de procedencia de los docentes encuestados.

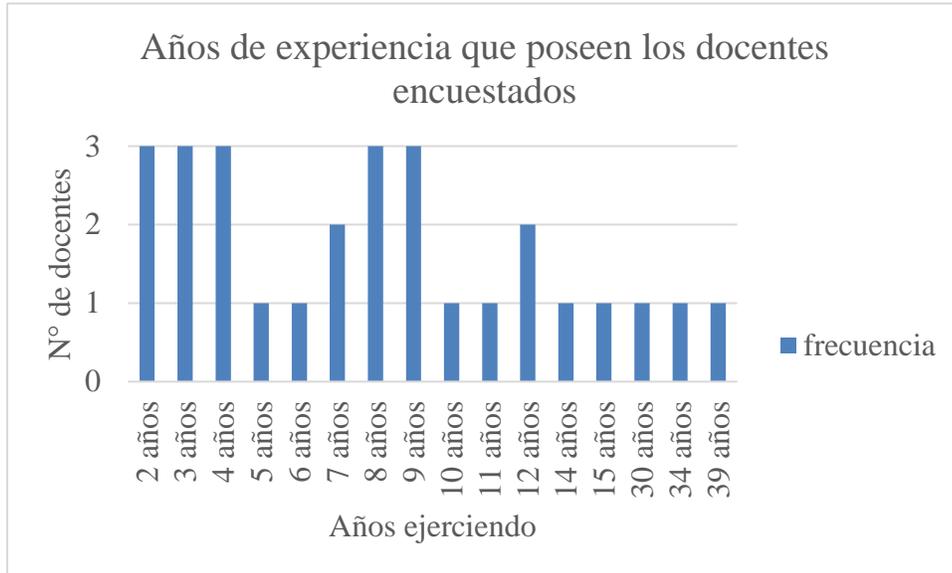
Universidad de procedencia	Encuestados	
	Frecuencia	Porcentaje
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación	8	28,57%
Pontificia Universidad Católica de Chile	1	3,57%
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	3	10,71%
Universidad Central	1	3,57%
Universidad de Chile	4	14,29%
Universidad SEK	2	7,14%
Universidad Andrés Bello	1	3,57%
Universidad Católica del Norte	1	3,57%
Universidad Alberto Hurtado	1	3,57%
Universidad de Santiago de Chile	1	3,57%
Universidad Mayor	1	3,57%
Universidad Técnica del Estado	1	3,57%
Universidad de Valparaíso	1	3,57%
Universidad de Las Américas	1	3,57%
Universidad de La Serena	1	3,57%

La distribución de los años de ejercicio para los diferentes docentes que constituyen la muestra permite señalar que el rango del tiempo en ejercicio varía entre 2 y 39 años. Dentro del total de profesores encuestados, los años de egreso fueron entre 1982 y 2019. La mayoría de los docentes concentran sus

años de experiencias entre los 2 a 4 años y de 8 a 9 años, en estos cinco casos son 3 profesores.

El siguiente gráfico presenta la cantidad de años de experiencia que tienen los docentes de matemáticas encuestados.

Gráfico N°1: Años de experiencia que poseen los docentes encuestados.



La evidencia recolectada y las características de la muestra utilizada en la encuesta ayuda en las decisiones tomadas con respecto al análisis profundo del estudio de los datos y lograr generar un apoyo para los docentes.

3.2 Instrumento

Para la recolección de datos, se utilizó la encuesta titulada “*Percepción del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e inferencial para III° o IV° medio*” (anexo N°3) para determinar la percepción sobre el manejo que poseen los profesores sobre los contenidos del electivo de probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio, según la actualización curricular para el año 2020. Este instrumento se encuentra dividido en tres secciones:

- Sección 1: Identificación.
- Sección 2: Conocimientos sobre el nuevo electivo.
- Sección 3: La enseñanza del contenido.

Cada sección contiene una cantidad de preguntas definidas y una caracterización, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla N° 4: Cantidad de preguntas definidas y una caracterización

Sección	Descripción	Cantidad de preguntas
Sección 1: Identificación	La presente sección tiene como objetivo la caracterización del docente participante del estudio	3
Sección 2: Conocimientos sobre el nuevo electivo	La presente sección tiene como objetivo saber cuán informado/a se encuentra respecto al nuevo electivo de probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para los cursos de III° o IV° medio.	4
Sección 3: Enseñanza del contenido	La presente sección tiene como objetivo saber qué tan preparados están los docentes para guiar el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos que aborda el electivo	9

3.3 Procedimiento

En base a la información recopilada en la encuesta sobre la percepción de los docentes tanto de su manejo de los contenidos a enseñar en el electivo, como de qué tan preparados se sienten para conducir la enseñanza en este (Anexo 3), se consideran los dos contenidos más deficientes, los que corresponden a intervalos de confianza y test de hipótesis.

Luego de la selección de los contenidos, se procede a identificar el material publicado por el MINEDUC, para plantear una propuesta de bajada de los contenidos, identificar errores y resolver de manera clara y ordenada, en forma de “guía docente” a las actividades propuestas.

Tabla N° 5: Características del material para el docente

Intervalo de Confianza	Transposición de los contenidos
	Aplicación de los contenidos bajo situaciones de enseñanza
	Desarrollo y corrección de las actividades planteadas por el ministerio
Test de Hipótesis	Transposición de los contenidos
	Aplicación de los contenidos bajo situaciones de enseñanza
	Evidenciar los errores y dificultades halladas dentro de las actividades

3.4 Análisis de Datos

Para el análisis de los datos obtenidos a partir de la encuesta se utilizó un estudio descriptivo y exploratorio en cada una de las preguntas mediante el uso de tablas de frecuencias y gráficos. Los datos fueron tabulados en el programa Excel, las preguntas presentes en la encuesta fueron estudiadas en base a dos naturalezas: dicotómicas o cualitativas y se definieron ciertos criterios para establecer si las respuestas manifestadas por los docentes incidirán o no en el desarrollo de las actividades planteadas por el MINEDUC. Además, se consideraron las justificaciones, comentarios y respuestas abiertas para el desarrollo de estas actividades.

Capítulo IV: Representación de los Resultados y Discusión.

4.1 Resultados de la Encuesta

A continuación, se presenta un análisis de la encuesta realizada considerando las respuestas y preguntas más relevantes para cada uno de los ítems. Es importante aclarar que las primeras preguntas cumplen la función de caracterizar a los profesores de matemáticas pertenecientes a la muestra en estudio.

A partir de las respuestas obtenidas se concluye que del total de docentes encuestados un 67,9% conoce el nuevo programa del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para los cursos de III° o IV° medio para el año 2020. Además, el 64,3% de los docentes encuestados declara tener conocimiento sobre los objetivos de aprendizaje declarados en el programa de estudio del electivo y un 53,6% declara que está informado sobre las habilidades a desarrollar en cada una de las unidades del programa.

Es importante destacar que de la muestra un 57,1% se siente preparado para impartir el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° medio.

A partir del análisis se expuso la relación entre los contenidos presentes en el programa del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° medio y su estudio en la formación universitaria de los docentes en pregrado. Los porcentajes que representan las respuestas declaradas se desglosan de la siguiente manera:

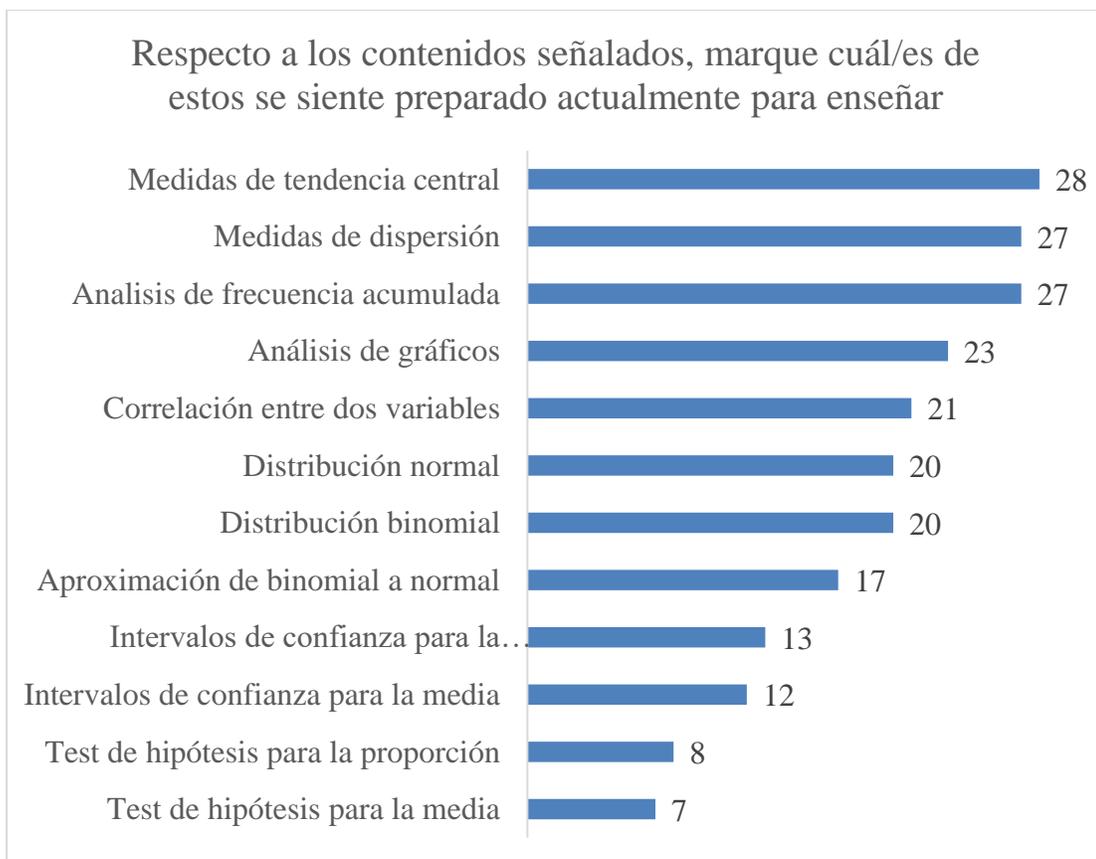
- 82,1% estudió Análisis de histogramas, polígonos de frecuencia, diagramas de cajón y nube de puntos.
- 92,9% estudió análisis de frecuencia acumulada.
- 96,4% estudió medidas de tendencia central.
- 92,9% estudió medidas de dispersión.
- 89,3% estudió correlación muestral entre dos variables.
- 85,7% estudió distribución binomial.
- 85,7% estudió distribución normal.
- 82,1% estudió aproximación de distribución binomial a normal.
- 78,6% estudió intervalos de confianza para proporción bajo supuesto de normalidad.

- 75% estudió intervalos de confianza para la media bajo supuesto de normalidad.
- 57,1% estudió test de hipótesis para proporción bajo supuesto de normalidad.
- 53,6% estudió test de hipótesis para media bajo supuesto de normalidad.
- 3,6% no vio contenidos de estadística en su formación inicial.

Con la información expuesta con anterioridad por los docentes encuestados se puede afirmar entonces que al menos el 53,6% declara haber estudiado en su formación inicial docente todos los contenidos presentes en las bases curriculares del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, no obstante, un 57% señala que se siente preparado para impartir dicho electivo.

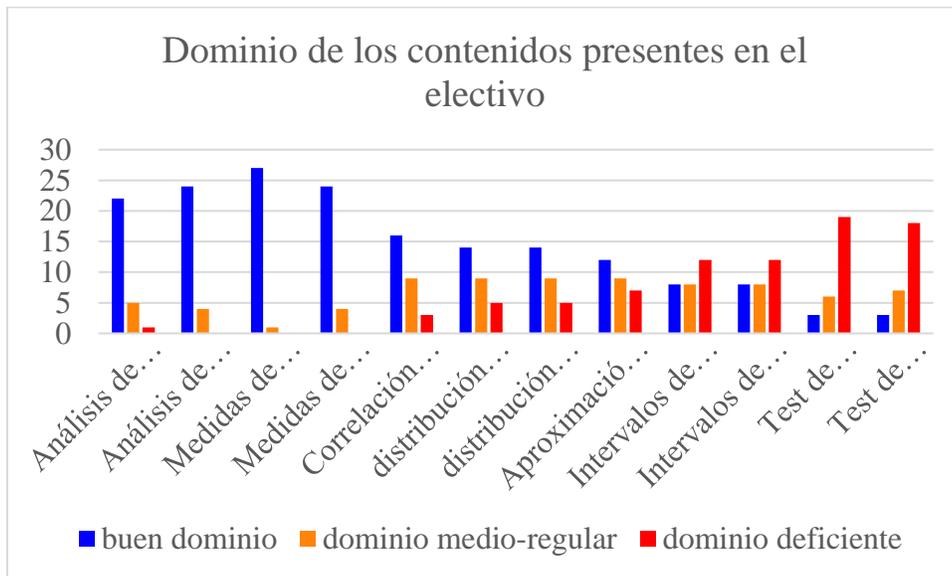
Respecto a la percepción de los docentes sobre en qué contenidos se sienten preparados para guiar un correcto proceso de enseñanza, se declara lo expuesto en el siguiente gráfico.

Gráfico N°2: Contenidos los cuales los docentes están preparados para enseñar.



De lo anterior, es posible señalar que menos del 50% de los encuestados se siente preparado para conducir un buen proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos relacionados a estadística inferencial, siendo estos los contenidos que abarca la unidad 4 del programa del electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial. Lo cual se traduce y evidencia en el manejo que dicen tener los docentes en los contenidos presentes en este electivo.

Gráfico N°3: Dominio de los contenidos presentes en el electivo.



Estos resultados muestran como el dominio de los docentes va descendiendo a medida que avanza el programa del electivo, llegando a niveles críticos en el área de la estadística inferencial, donde en intervalos de confianza, tanto para la media como para la proporción, solo un 28,6%, correspondiente a 8 docentes, declara tener un buen dominio del tema, contrastado con el 42,9%, correspondiente a 12 docentes, que declara poseer un dominio deficiente, y para test de hipótesis, resultados aún más críticos, con solo un 10.7% ,correspondiente a 3 docentes, declarando un buen dominio para test de hipótesis para media y proporción, contrastado con el 69.9%, correspondiente a 19 docentes, que declara dominio deficiente en test de hipótesis para la proporción y un 64.3%, correspondiente a 18 docentes, que declara dominio deficiente en test de hipótesis para la media.

Respecto a los contenidos que los docentes señalaron no sentirse preparados para enseñarlos, la manera en la que los abordarán para poder guiar un proceso de enseñanza se presenta en la siguiente tabla:

Tabla N° 6: Aspectos sobre cómo abordar los contenidos para enseñarlos en el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

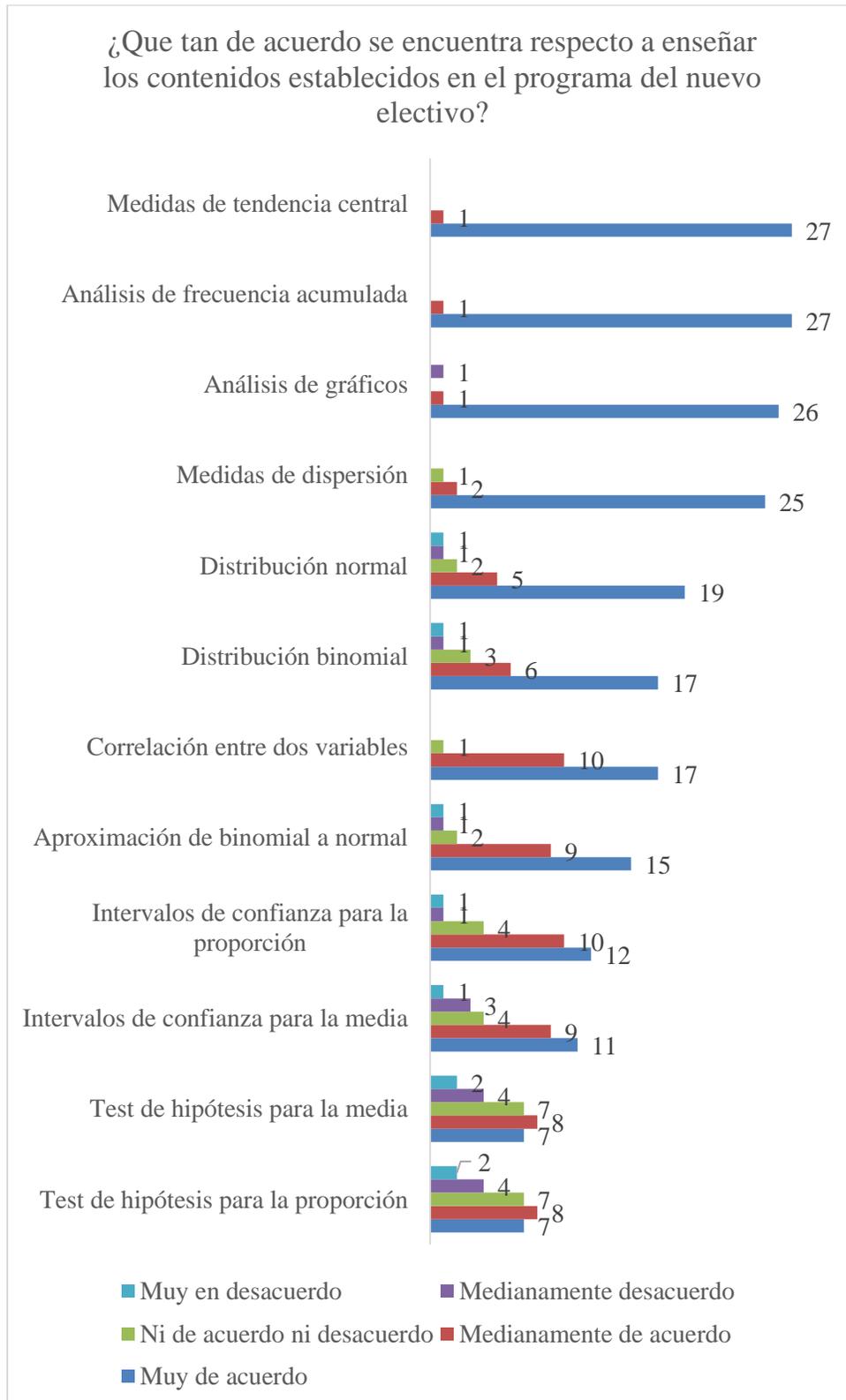
¿Cómo piensa abordar los contenidos en los que no se siente preparado para impartir?		
Aspecto	Cantidad	Porcentaje
Tomar clases particulares	1	3,6%
Estudiar solo/a	25	89,3%
Asistir a capacitaciones	10	35,7%
No tengo un plan para afrontarlo	1	3,6%
Estudiar con un colega	2	7,1%
Hacer nada mientras no me toque aplicar el electivo	1	3,6%

Con los datos expuestos anteriormente es posible señalar que de los docentes encuestados al menos el 89% de ellos prefiere estudiar solo para poder abordar la preparación de la enseñanza de los contenidos para los que no se siente preparado. Cabe destacar que los encuestados podían marcar más de una opción de respuesta para dicha pregunta, es decir, los aspectos no son excluyentes. Además, al menos el 35% de los docentes prefiere asistir a capacitaciones para poseer mejores herramientas para preparar la enseñanza de los contenidos, sin excluir el hecho de que estudiarán solos o utilizar otra metodología de aprendizaje para abordar los contenidos que no se sienten preparados. Cabe destacar que hay un 7,1% que no tiene un plan para abordar los contenidos que no manejan.

Además, un 82,1% de los encuestados realizó el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial en el año 2020, mientras que el año 2021 a un 89,3% de los encuestados se les asignó este electivo dentro de su carga horaria.

Respecto a la pertinencia de incorporar cada uno de estos contenidos a nivel escolar, es evidente que, en los contenidos del inicio del programa, prácticamente el 100% de los docentes manifiestan estar totalmente de acuerdo con enseñarlos a nivel escolar, pero a medida que se avanza en el programa, comienzan a dudar sobre qué tan de acuerdo están con enseñar estos contenidos, decantándose por alguna de las otras opciones, lo cual se visualiza en el siguiente gráfico.

Gráfico N°4: Contenidos los cuales están de acuerdo a enseñar en el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.



Se les preguntó también a los encuestados de dónde planean extraer material para planificar/preparar/hacer las clases del nuevo electivo. A continuación, se presenta la tabla que resume las respuestas:

Tabla N°7: Sitios donde los docentes planean extraer material de apoyo para preparar las clases del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

¿De dónde planea extraer material para planificar/preparar/hacer las clases del nuevo electivo?		
Aspecto	Cantidad	Porcentaje
Material entregado por el MINEDUC	21	75%
Textos de estadística, probabilidades e inferencia	25	89,3%
Material propio	14	50%
Otro	5	17,9%

Es posible observar que el 75% de los encuestados señalan extraer material para planificar las clases del nuevo electivo, no obstante, cabe señalar que el material entregado por el ministerio corresponde a actividades para desarrollar con los estudiantes. Los docentes no han recibido material necesario y suficiente por parte del ministerio donde puedan extraer una bajada escolar de los contenidos y los sitios web recomendados no son de fuentes confiables o no se relacionan con la forma en la cual el MINEDUC desea abordar las actividades, es decir, la información entregada por los sitios web recomendados no son acorde a las actividades que plantean.

Finalmente, en la encuesta se les ofreció a los docentes un espacio opcional para expresarse respecto a cómo cada uno se siente respecto a estos cambios en las bases curriculares planteadas por el Mineduc, introduciendo un nuevo electivo, y con esto, nuevos contenidos, obteniendo 23 de 28 respuestas. Entre las declaraciones, es posible identificar sentimientos comunes como sentirse poco preparados, inseguros, dudas sobre como recibirán el contenido los alumnos, dudas por falta de información por parte del MINEDUC, entre otras. Algunos de los comentarios más representativos son los siguientes:

“Con respecto a algunos contenidos desafiado, pero considero que entrega una base mucho más sólida a los y las estudiantes para afrontar la educación superior, ya que en la mayoría de las carreras aparece algún ramo de estadística”

“Encuentro que es un gran desafío, pero se debe tener cuidado y conciencia de la base que tienen los estudiantes”

El resto de los comentarios obtenidos en esta pregunta abierta se encuentran en la sección anexos.

4.2 Material de actividades: Guía para el docente

El material de actividades tiene como finalidad apoyar al docente en los contenidos relacionados con la última unidad del programa del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para los niveles de III° y IV° medio. El contenido de este material de actividades posee la siguiente estructura:

Intervalos de confianza:

- Transposición de los contenidos.
- Aplicación de los contenidos bajo situaciones de enseñanza.
- Desarrollo de las actividades planteadas por el ministerio.

Test de hipótesis:

- Transposición de los contenidos.
- Aplicación de los contenidos bajo situaciones de enseñanza.
- Correcciones de las actividades planteadas por el ministerio.

Objetivo de aprendizaje:

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

Estimación por Intervalos de Confianza

Un intervalo de confianza corresponde a un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra al cual pueda pertenecer el parámetro θ a estimar, con cierta probabilidad llamada *nivel de confianza*, que denotamos $1 - \alpha$.

Esto es:

$$P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha$$

$$IC(\theta) = [L_1, L_2]$$

Observación: Se espera que $(1 - \alpha)100\%$ de los intervalos contengan a θ

Método del pivote para construir un intervalo de confianza

1. Encuentre la función pivotal $Q = f(\theta, \hat{\theta})$
2. Hallar la distribución muestral de Q
3. Dado α , hallar a y b tal que: $P(a \leq Q \leq b) = 1 - \alpha$
4. Despejar θ dentro del intervalo

Intervalo de Confianza para la media poblacional, con varianza conocida

Sea X_1, \dots, X_n muestras aleatorias de una población $N(\mu, \sigma^2)$ El parámetro μ no se conoce y es estimado por \bar{x}

Construcción del intervalo de confianza

Sea $Q = f(\mu, \bar{X}) = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$

Hallar a y b tal que:

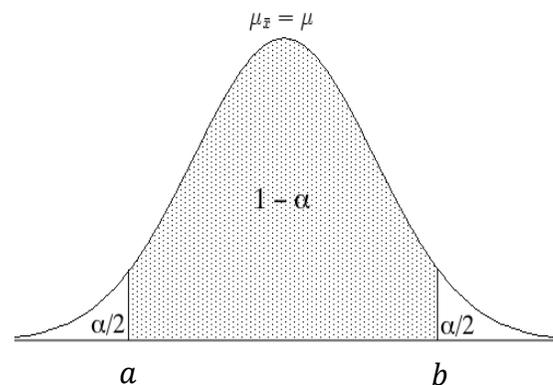
$$P(a < Q < b) = 1 - \alpha$$

Como $Q = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$

$$P\left(a < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} < b\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sigma \cdot a}{\sqrt{n}} - \bar{x} < -\mu < \frac{\sigma \cdot b}{\sqrt{n}} - \bar{x}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{x} - \frac{\sigma \cdot a}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x} - \frac{\sigma \cdot b}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



$$\Leftrightarrow P\left(\bar{x} - \frac{\sigma \cdot b}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - \frac{\sigma \cdot a}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P(Z \leq a) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow a = Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$P(Z \leq b) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow b = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Observaciones:

$$a = -b$$

$$b = -a$$

Observación:

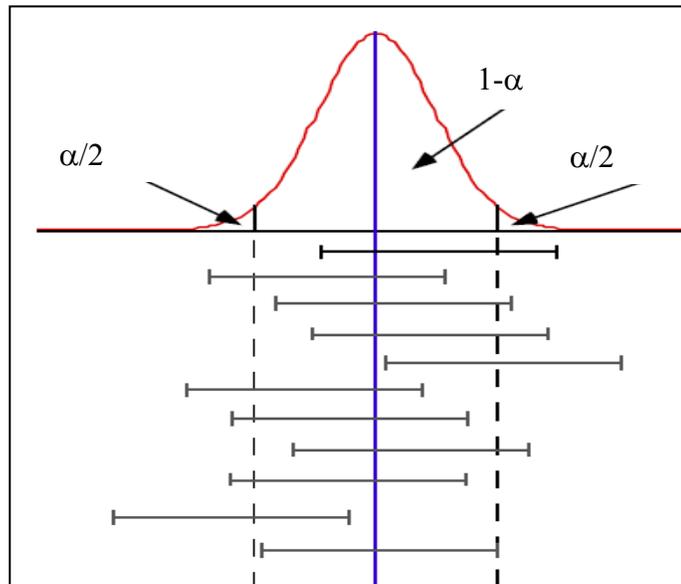
- $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ se le conoce como error muestral en la estimación o margen de error (ϵ)

En resumen, el intervalo de confianza para estimar a μ , con una confianza del $(1 - \alpha)100\%$ está dado por:

$$IC(\mu) = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Observaciones:

- Se dice que un intervalo de confianza es más preciso cuando es menos amplio.
- Una vez calculado el intervalo de confianza para una muestra de datos, éste contiene o no al verdadero valor del parámetro.



$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \mu \quad \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo de aplicación de intervalo de confianza para la media

Fuente: Elaboración propia.

Se sabe que la edad de los pacientes adolescentes diagnosticados con SARS-CoV2 y que no presentan secuelas luego de la recuperación es una variable aleatoria que distribuye normal y posee una desviación estándar de 3 años.

En un estudio se pretende estimar la edad promedio de los pacientes adolescentes (14 – 23 años) diagnosticados con SARS-CoV2 y que no presentan secuelas luego de la recuperación. Para ello se dispone de una muestra de 100 pacientes los cuales presentan una media de 19 años. Calcular e interpretar el intervalo de confianza al 95% para la edad media de adolescentes recuperados sin secuelas por el SARS-CoV2.

Desarrollo:

Paso 1: Escribir los datos entregados

X: Edad, en años, de los pacientes adolescentes diagnosticados con SARS-CoV2 y que no presentan secuelas luego de la recuperación

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 19 \text{ años}$$

$$\sigma = 3 \text{ años}$$

$$1 - \alpha = 0,95 \Leftrightarrow \alpha = 0,05$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$$

Paso 2: Escribir los datos en la fórmula entregada

$$IC(\mu) = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [18,412, 19,588]$$

Paso 3: Concluir

Con un 95% de confianza, es posible afirmar que la edad media de los adolescentes recuperados sin secuelas por el SARS-CoV2 estará contenida en el intervalo $[18,412, 19,588]$, es decir, entre 18 y 20 años aproximadamente.

Actividad 1: Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza

Propósito:

Mediante el desarrollo de esta actividad, se espera que los estudiantes comprendan en términos generales el uso de la estadística inferencia y cómo estimar parámetros de una población a partir de estadísticos de muestras de esa población. Con ello, los estudiantes pueden, por ejemplo, estimar la media de una población, con intervalos de confianza de mayor o menor precisión o nivel de “confianza” según se dese.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web

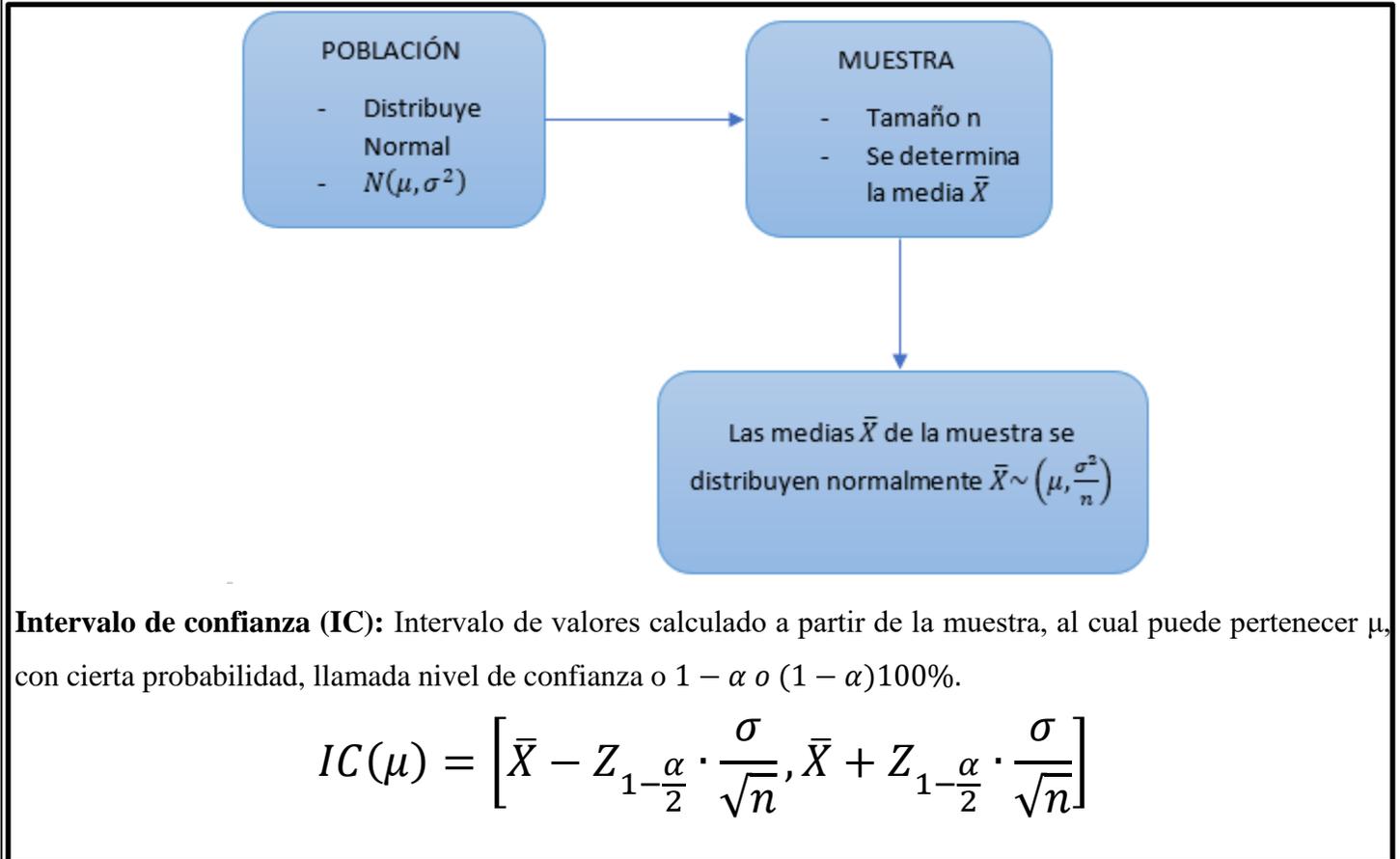
Actitudes

- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

INTRODUCIR EL CONCEPTO DE UN INTERVALO DE CONFIANZA

1. Observen el siguiente esquema, donde se muestra en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial a partir de muestras que son tomadas de una población determinada.



Intervalo de confianza (IC): Intervalo de valores calculado a partir de la muestra, al cual puede pertenecer μ , con cierta probabilidad, llamada nivel de confianza o $1 - \alpha$ o $(1 - \alpha)100\%$.

$$IC(\mu) = \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Nivel de confianza para la estimación de μ en %	$1 - \alpha$	α	$1 - \frac{\alpha}{2}$	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$IC(\mu)$
90%	0,90	0,10	0,95	$Z_{0,95} = 1,65$	$\left[\bar{x} - 1,65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
95%	0,95	0,05	0,975	$Z_{0,975} = 1,96$	$\left[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

99%	0,99	0,01	0,995	$Z_{0,995} = 2,576$	$\left[\bar{x} - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
-----	------	------	-------	---------------------	---

2. El nivel de confianza, como ya vimos, se puede expresar también como $1 - \alpha$, donde $\alpha = 0,1$, o bien $\alpha = 0,05$ o bien $\alpha = 0,01$. Además $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ corresponde al puntaje según la distribución normal estandarizada.

Por ejemplo, si $\alpha = 0,05$ se tiene que $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975$

Según la distribución normal estándar debemos encontrar z tal que $P(Z \leq z) = 0,975$ o bien $Z_{0,975}$

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5279	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5675	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693

1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808

De lo anterior obtenemos que $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$

3. Del mismo modo que para el nivel de confianza de 0,95, comprueben en la tabla de la distribución normal estándar (ver anexo) los puntajes $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ para los niveles de confianza de 0,90 y 0,99.

a) Acorde a lo anterior, complete la tabla

$1 - \alpha$	α	$1 - \frac{\alpha}{2}$	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$IC(\mu)$
0,90	0,10	0,95	1,65	$\left[\bar{X} - 1,65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1,65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,95	0,05	0,975	1,96	$\left[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,01	0,995	2,576	$\left[\bar{X} - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

- b) Compartan ideas acerca de los parámetros de la población y los estadísticos de las muestras ¿Sobre qué se quiere inferir o estimar algún valor y cómo? Argumenten.

Respuesta (R.) El único parámetro poblacional entregado corresponde a la varianza o desviación estándar, mientras que los datos obtenidos de la muestra son la cantidad de datos entregados (n) y el estimador \bar{x} . Queremos inferir sobre el parámetro μ ; saber entre qué valores se encuentra, con cierto nivel de confianza, mediante un intervalo de confianza.

- c) Si una población se distribuye normalmente $N(\mu, \sigma^2)$ ¿Cómo se distribuyen las medias de las muestras de tamaño “n” extraídas de dicha población?

R. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, las medias muestrales de tamaño “n” distribuyen con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$.

- d) En sus propias palabras, ¿Qué es un intervalo de confianza para la media “desconocida” de una población de la cual sí se conoce su desviación estándar?

R. Corresponde a un intervalo de valores, calculado a partir de los datos de la muestra y la desviación estándar o varianza de la población, al cual puede pertenecer la media poblacional, con cierta probabilidad llamada nivel de confianza.

e) ¿En qué influye el nivel de confianza a la hora de fijar un intervalo para la media de la población?

R. El nivel de confianza influye en la amplitud del intervalo. Mientras mayor sea el nivel de confianza mayor será la amplitud del intervalo de confianza y viceversa.

f) ¿Cómo puede ser interpretada la expresión $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y cómo influye en ella el tamaño “n” de la muestra?

R. $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \varepsilon$, donde ε corresponde al error muestral en la estimación o margen de error

Mientras más grande sea el tamaño de la muestra, menor será el margen de error generando así un intervalo con menor amplitud y, en consecuencia, generando un intervalo más preciso donde pertenezca la media poblacional.

UN EJEMPLO

Después de una década sin recopilación de datos, se quiere determinar aproximadamente el valor esperado μ de la estatura entre las mujeres de una población. Se saca una muestra de 100 mujeres de la población, registrando una estatura media de $\bar{x} = 154 \text{ cm}$. De la medición anterior se conoce la desviación estándar $\sigma = 6 \text{ cm}$ y se estima que no ha cambiado.

a) Describan, a partir de la muestra poblacional, el procedimiento que determina un intervalo de confianza para estimar el valor esperado poblacional μ .

R.

Datos:

X: Estatura, en cm, de las mujeres de cierta población

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 154 \text{ cm}$$

$$\sigma = 6 \text{ cm}$$

Con los datos obtenidos tenemos lo necesario para crear el intervalo de confianza para la media:

$$IC(\mu) = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = \left[154 - \frac{6}{\sqrt{100}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, 154 + \frac{6}{\sqrt{100}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = \left[154 - \frac{6}{10} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, 154 + \frac{6}{10} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

De lo anterior, con una confianza del $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, la media poblacional de la estatura de las mujeres de cierta población estará contenida en el intervalo $\left[154 - \frac{6}{10} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, 154 + \frac{6}{10} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$.

- b) Determinen e interpreten el intervalo de confianza al 95% para la estatura media (μ) de las mujeres de cierta población.

R.

Datos:

X: Estatura, en cm, de las mujeres de cierta población

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 154 \text{ cm}$$

$$\sigma = 6 \text{ cm}$$

$$1 - \alpha = 0,95$$

$$\alpha = 0,05$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Con los datos obtenidos tenemos lo necesario para crear el intervalo de confianza para la media:

$$IC(\mu) = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\Rightarrow IC(\mu) = \left[154 - \frac{6}{\sqrt{100}} \cdot 1,96, 154 + \frac{6}{\sqrt{100}} \cdot 1,96 \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = \left[154 - \frac{6}{10} \cdot 1,96, 154 + \frac{6}{10} \cdot 1,96 \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [154 - 0,6 \cdot 1,96, 154 + 0,6 \cdot 1,96]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [154 - 1,176, 154 + 1,176]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [152,824, 155,176]$$

Interpretación: Con una confianza del 95%, la media poblacional se encuentra entre 152,824 y 155,176 centímetros.

c) Si la media muestral $\bar{x} = 154 \text{ cm}$ hubiera resultado de una muestra de 400 mujeres ¿Qué influencia tendría en el intervalo de confianza?

R.

Datos:

X: Estatura, en cm, de las mujeres de cierta población

$$n = 400$$

$$\bar{x} = 154 \text{ cm}$$

$$\sigma = 6 \text{ cm}$$

$$1 - \alpha = 0,95$$

$$\alpha = 0,05$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$\Rightarrow IC(\mu) = \left[154 - \frac{6}{\sqrt{400}} \cdot 1,96, 154 + \frac{6}{\sqrt{400}} \cdot 1,96 \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = \left[154 - \frac{6}{20} \cdot 1,96, 154 + \frac{6}{20} \cdot 1,96 \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [153,412 ; 154,588]$$

Por lo tanto, la influencia que tiene es que el intervalo posee una menor amplitud.

Actividad 2: Inferencias en diferentes contextos usando intervalos de confianza

Propósito:

Mediante el desarrollo de esta actividad, se espera que los estudiantes puedan obtener intervalos de confianza para realizar inferencias sobre la media de una población en diferentes contextos. Para ello deben identificar, desde la información entregada los elementos que permiten establecer un intervalo para la media de la población, según el nivel de confianza requerido.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 12 horas pedagógicas

Páginas 159 a 168 del programa del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

ALIMENTACIÓN SALUDABLE

1. Para una campaña de alimentación saludable, diferentes casinos distribuyen su plato de hamburguesa de garbanzos, lenteja, quínoa, el cual, si su masa es menor que 500 gr, será gratis para sus clientes. Los consumidores están informados

Conexión Interdisciplinaria Ciencias para la Ciudadanía OA e, 3° y 4° medio.

de esta promoción. Los casinos se quieren asegurar de que ese plato no pese menos de 500 gr para no entregar comida gratis; para ello, quieren tener una confianza alta. Con el dato histórico de las muestras se requiere predecir lo que pasará con un alto grado de confianza. Asumiendo una distribución normal de las masas, la información histórica es la siguiente:

- *La media muestral de las masas* $(\bar{x}) = 610 \text{ g}$
- *La desviación estándar poblacional* $(\sigma) = 12 \text{ gr}$
- *Cantidad de los datos de la muestra* $(n) = 36 \text{ hamburguesas}$
- *Nivel de confianza* = 95%

- a) Encuentre el intervalo para la media de la masa poblacional en este problema acorde al nivel de confianza solicitado.

R. X: Masa, en gramos, de las hamburguesas de un casino.

$$\Rightarrow IC(\mu) = \left[610 - Z_{0,975} \cdot \frac{12}{\sqrt{36}} ; 610 + Z_{0,975} \cdot \frac{12}{\sqrt{36}} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = \left[610 - 1,96 \cdot \frac{12}{6} ; 610 + 1,96 \cdot \frac{12}{6} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [610 - 3,92 ; 610 + 3,92]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [606,08 ; 613,92]$$

- b) Interpreta este intervalo. ¿Se cumple el objetivo estadístico del casino? Argumente.

R. Dada una muestra de 36 hamburguesas y con un 95% de confianza se puede afirmar que la media de la masa poblacional de las hamburguesas se encuentra entre 606,08 gr y 613,92 gr. Por lo tanto, se cumple el objetivo estadístico del casino.

c) Determina el error para el intervalo de confianza en este caso. ¿Cómo se interpreta dicho error? Argumenta.

R.

$$\varepsilon = Z_{0,975} \cdot \frac{12}{\sqrt{36}} = 3,92$$

Con una confianza del 95% la diferencia entre la verdadera media y la media muestral de masas de hamburguesas es máximo 3,92 gramos.

2. En apoyo a la alimentación saludable en jardines infantiles fiscalizados por el Estado, se invitó a empresas a una licitación y ganó la que hace compotas de frutas en una máquina. Esta empresa ajusta de tal manera la cantidad despachada que tiene desviación estándar de 16 ml.

Periódicamente la máquina se revisa, tomando una muestra de 45 compotas y calculando el contenido promedio.

a) Si la media de la muestra es de 240 ml, ¿Cuál es un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95%? Argumenta.

R. Datos:

X: Contenido, en ml, de las compotas de frutas de cierta máquina.

$$\bar{x} = 240 \text{ ml}$$

$$1 - \alpha = 0,95 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$n = 45 \text{ compotas}$$

$$\sigma = 16 \text{ ml}$$

$$Z_{0,975} = 1,96$$

$$IC(\mu) = \left[240 - 1,96 \cdot \frac{16}{\sqrt{45}} ; 240 + 1,96 \cdot \frac{16}{\sqrt{45}} \right]$$

$$IC(\mu) = [240 - 4,6749 ; 240 + 4,6749]$$

$$IC(\mu) = [235,3251 ; 244,6749]$$

b) El intervalo de confianza encontrado, ¿qué nos dice respecto del contenido de las compotas en la máquina? Argumenta.

R. Con un 95% de confianza el contenido medio de las computas de la máquina se encuentra entre los 235,3251 ml y 244,6749 ml.

ENDEUDAMIENTO DE LAS PERSONAS

1. Según el informe de endeudamiento del año 2016 de la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras de Chile (SBIF), del total de personas endeudadas, un 40% tiene un ingreso menor a \$500 mil. La carga financiera de las personas destinada a la deuda sobre el total de sus ingresos corresponde a un 16,72%. Antofagasta es la región que sobresale, con una deuda representativa de 3,2 millones de pesos y un monto promedio de 4,2 veces el sueldo.

Considera que en esta región el ingreso mensual promedio de 100 trabajadores es de \$420.000, con una desviación estándar poblacional conocida de \$75.000, y que los datos se ajustan a una distribución normal.

- a) Determina un intervalo para la media poblacional del ingreso de trabajadores con un nivel de confianza del 90%.

R. Datos:

X: Ingreso, en pesos, de los trabajadores de la región de Antofagasta.

$$n = 100 \text{ trabajadores}$$

$$\bar{x} = \$420.000$$

$$\sigma = \$75.000$$

$$1 - \alpha = 0,9$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$$

$$Z_{0,95} = 1,645$$

$$\Rightarrow IC(\mu) = \left[420.000 - 1,645 \cdot \frac{75.000}{\sqrt{100}}; 420.000 + 1,645 \cdot \frac{75.000}{\sqrt{100}} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = \left[420.000 - 1,645 \cdot \frac{75.000}{10}; 420.000 + 1,645 \cdot \frac{75.000}{10} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [420.000 - 1,645 \cdot 7.500; 420.000 + 1,645 \cdot 7.500]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [420.000 - 12.337,5; 420.000 + 12.337,5]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [407.662,5; 432.337,5]$$

Interpretación: Con un 90% de confianza la media poblacional del ingreso de trabajadores se encuentra entre \$407.662,5 y \$432.337,5.

b) Determina el error para el intervalo de confianza en este caso. ¿Cómo se interpreta dicho error? Argumenta.

R.

$$\varepsilon = 1,645 \cdot \frac{75.000}{\sqrt{100}} = 1,645 \cdot 7.500 = 12.337,5 \text{ pesos}$$

Interpretación: Con una confianza del 95% la diferencia entre la verdadera media y la media muestral de los sueldos de trabajadores de la región de Antofagasta es máximo \$12.337,5

PROTECCIÓN DE ESPECIES

3. Un biólogo está preocupado por la extinción del elefante sumatra protegido en países como Indonesia- debido a la deforestación y la caza incontrolada. Efectuó el siguiente estudio para determinar en qué condiciones podría vivir de acuerdo con su alimentación: Tomó una muestra aleatoria de 30 días, en los cuales observó cuánta comida diaria ingiere el elefante, y obtuvo un promedio de 350 kg con desviación estándar de 25 kg de lo que comen las especies vivas; los datos están distribuidos normalmente.



El intervalo de confianza resultante fue del 90% en los 30 días de prueba; para la media fue entre 342 kg y 358 kg de comida para el elefante.

1. Verifica que el intervalo de confianza resultante obtenido es correcto, según los datos entregados.

R. Datos:

X: Cantidad, en kg, de comida diaria que ingiere un elefante sumatra.

$$1 - \alpha = 0,9$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$$

$$Z_{0,95} = 1,645$$

$$\Rightarrow IC(\mu) = \left[350 - 1,645 \cdot \frac{25}{\sqrt{30}} ; 350 + 1,645 \cdot \frac{25}{\sqrt{30}} \right]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [350 - 7,5084 ; 350 + 7,5084]$$

$$\Leftrightarrow IC(\mu) = [342,4916 ; 357,5084]$$

Si aproximamos por redondeo la unidad entonces el intervalo entregado es correcto.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), según la información entregada? Argumenta tus respuestas.

a) En un muestreo repetido, esto produce una media de la muestra entre 342 kg y 358 kg en un 90% de las muestras.

R. Falso. En un muestreo repetido, esto produce una media de la población entre 342 kg y 358 kg

b) Los elefantes comieron entre 342 kg y 358 kg el 90% de los días.

R. Falso, 90% es la probabilidad de que en 30 días los elefantes coman, en promedio, entre 342 kg y 358 kg de alimento.

c) Existe un 0,90 de probabilidad de que, en promedio, coman entre 342 kg y 358 kg.

R. Verdadero.

d) Se estima los intervalos de confianza de la media poblacional con varianza desconocida en esta situación.

R. Falso, se estima el intervalo para la media poblacional con varianza conocida.

e) La muestra corresponde a 30 elefantes.

R. Falso, la muestra corresponde a 30 días.

f) En los 30 días, la media de la cantidad de comida que come el elefante es 350 kg.

R. Verdadero.

g) La varianza poblacional de la comida de este elefante es de 625 kg^2 .

R. Verdadero.

$$\sigma = 25 \text{ kg} \Leftrightarrow \sigma^2 = 625 \text{ kg}^2$$

h) Aproximadamente 8 unidades es el error que separa al estimador 350 kg del poblacional con un 90% de confianza.

R. Verdadero.

- i) Mientras mayor sea el margen de error, más ancho será el intervalo y menos seguros podremos estar del valor estimado.

R. Verdadero.

Test de Hipótesis

Hipótesis Estadística

La hipótesis estadística corresponde a una suposición sobre el valor de cierto parámetro de una población el cual puede ser probado (testeada) en base a la muestra extraída de esa población.

Ejemplo: Si la población es un conjunto de alumnos brillantes se podría tomar como hipótesis que μ , dado por el coeficiente intelectual promedio, es mayor que 120.

Si la hipótesis Estadística especifica completamente el valor del parámetro, entonces diremos que es una hipótesis simple, en caso contrario diremos que es una hipótesis compuesta.

Ejemplo: $X \sim N(\mu, 1)$, con $\mu = 0,8$ es hipótesis simple, en cambio, con $\mu < 0,8$, $\mu > 0,8$ es hipótesis compuesta.

Contraste o test de hipótesis

Un test de hipótesis corresponde a un procedimiento que se basa en lo observado en las muestras y en la teoría de la probabilidad para determinar si la hipótesis es un enunciado razonable.

En otras palabras, el test de hipótesis es un proceso estadístico que permite elegir una hipótesis de trabajo de entre dos posibles contrarias.

El test posee una estructura regular, donde comienza con la formulación de dos hipótesis estadísticas sobre el valor de algún parámetro a estimar (en el caso escolar el parámetro es μ) la cual puede ser probada (testeada) en base a la muestra extraída de esa población. Una vez planteadas las hipótesis pasamos al estadístico de prueba que corresponde a una variable aleatoria calculada a partir de las observaciones muestrales, la cual se usa conjuntamente con un criterio de decisión para determinar si hemos de descartar o no la hipótesis nula.

Tipos de hipótesis

Como se mencionó anteriormente, la estructura de un test de hipótesis se establece definiendo dos hipótesis contrarias. Así, estableceremos el término hipótesis nula e hipótesis alternativa.

El término hipótesis nula se refiere a cualquier hipótesis que se desea probar y se denota con H_0 . El rechazo de H_0 conduce a la aceptación de una hipótesis alternativa, que se denota con H_1 o H_a .

La hipótesis alternativa H_1 por lo general representa la *pregunta que se responderá o la teoría que se probará*, por lo que su especificación es muy importante. La hipótesis nula H_0 *anula o se opone a H_1* y a menudo es el complemento lógico de H_1 .

Tipos de Errores

En el siguiente esquema se representan las cuatro combinaciones posibles (en función de la decisión que tomemos y de la certeza o no de la hipótesis nula) de todo test de hipótesis

Decisión tomada	Hipótesis nula H_0	
	VERDADERA	FALSA
No descartar H_0	Decisión correcta de tipo A Probabilidad $1 - \alpha$	Error de tipo II Probabilidad β
Descartar H_0	Error de tipo I Probabilidad α	Decisión correcta de tipo B Probabilidad $1 - \beta$

- Tendremos una decisión correcta de tipo A cuando hayamos optado por no descartar la hipótesis nula y resulte que ésta es cierta.
- Una decisión correcta de tipo B ocurrirá cuando hayamos decidido descartar la hipótesis nula y resulte que ésta es falsa.
- Hablaremos de error de tipo I cuando hayamos descartado la hipótesis nula siendo esta cierta. Este error posee una probabilidad de ocurrir igual a α , por lo que siempre sabremos su valor antes de realizar el test.

Acontecerá un error de tipo II cuando hayamos optado por no descartar la hipótesis nula y resulte que esta es falsa. Este error posee una probabilidad de ocurrencia igual a β , la cual no es conocida previa al test, pero disminuye a medida que el tamaño de la muestra crece.

Test de hipótesis para la media con varianza conocida.

Como se mencionó anteriormente, el test de hipótesis es una regla que se utiliza para saber si podemos o no rechazar una afirmación acerca de una población específica utilizando la información proporcionada por una muestra de datos.

Para realizar un test de hipótesis debemos definir dos elementos previos a su realización. En primera instancia, al igual que con los intervalos de confianza, debemos fijar un nivel de significancia (α), el cual indicará la seguridad con la que afirmaremos nuestra decisión final de rechazar o no nuestra información inicial. Además de esto debemos decidir si el contraste a utilizar será bilateral, unilateral derecho o unilateral izquierdo dependiendo de qué queremos evaluar con respecto a la media de la población.

Contraste unilateral izquierdo	Contraste bilateral	Contraste unilateral derecho
1° Hipótesis:	1° Hipótesis:	1° Hipótesis:
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
2° Estadístico de prueba:	2° Estadístico de prueba:	2° Estadístico de prueba:
$Z_{calculado} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$Z_{calculado} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$Z_{calculado} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
3° Criterio de decisión:	3° Criterio de decisión:	3° Criterio de decisión:
<i>Se rechaza H_0 si</i> $Z_{calculado} < Z_\alpha$	<i>Se rechaza H_0 si</i> $ Z_{calculado} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	<i>Se rechaza H_0 si</i> $Z_{calculado} > Z_\alpha$
Representación zona de rechazo:	Representación zona de rechazo:	Representación zona de rechazo:

¿De dónde sale el estadístico de prueba?

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N(\mu, \sigma_{\bar{X}}^2) \xrightarrow{\text{estandarizamos}} Z_{\text{calculado}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Ejemplo de test de hipótesis con contraste bilateral

Fuente: Elaboración propia.

Antes del periodo de vacunación en Chile la edad de los ingresantes a la UCI a causa del SARS-CoV2 es una variable aleatoria normal con una media de 52 años y desviación estándar de 22 años.

En el mes de Mayo del 2021 se desea realizar un estudio para ver si la vacunación a adultos mayores ha incidido en la edad promedio de los ingresantes a la UCI a causa del SARS-CoV2 por lo que se recolectó las edades de 400 pacientes, obteniendo una media de 34 años.

Realizar una prueba de hipótesis con un 5% de significancia para ver si la edad promedio de pacientes UCI en Mayo es distinto respecto al periodo anterior a la vacunación.

Desarrollo:

Datos:

X : Edad de los ingresantes a la UCI a causa del SARS – CoV2

$$\alpha = 0,05$$

$$\mu_0 = 52 \text{ años}$$

$$\sigma = 22 \text{ años}$$

$$n = 400 \text{ pacientes}$$

$$\bar{x} = 34 \text{ años}$$

Paso 1: Hipótesis

$$H_0: \mu = 52$$

$$H_1: \mu \neq 52$$

Paso 2: Estadístico de prueba

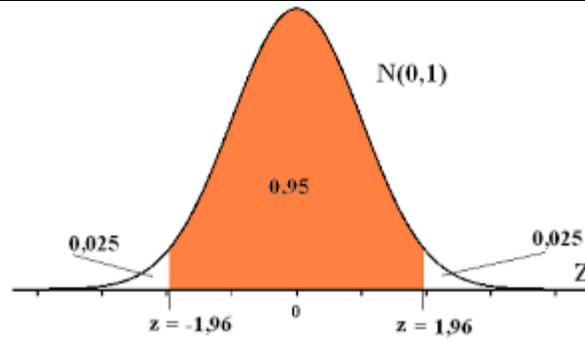
$$Z_{\text{calculado}} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$Z_{\text{calculado}} = \frac{(34 - 52)\sqrt{400}}{22}$$

$$Z_{\text{calculado}} = -16,36$$

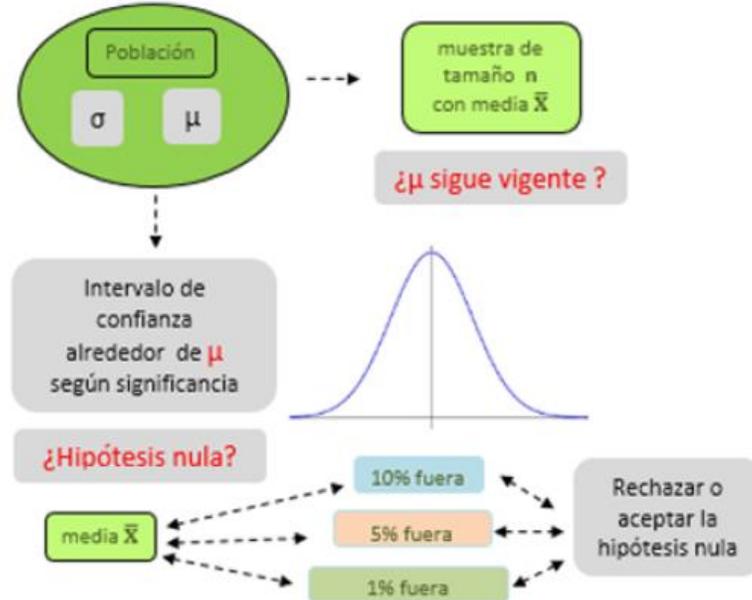
Paso 3: Criterio

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$$



Como $|Z_{calculado}|$ es mayor que $Z_{0,975}$ podemos afirmar, con una significancia del 5%, que hay evidencia suficiente para rechazar H_0 . Por lo que podemos inferir que la edad promedio de los ingresantes UCI por SARS-CoV2 es distinta a la que había antes del proceso de vacunación.

1. Observen el siguiente esquema que muestra en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial a partir de muestras que son tomadas de una población determinada y realizar pruebas de hipótesis.



Errores/Observaciones

- Esquema poco claro.
- El gráfico de distribución normal no entrega información. No tiene ejes.
 - No se extrae UNA muestra de tamaño n , sino que muchas muestras de tamaño n .
 - No especifica qué es la hipótesis nula.
 - No hay información sobre la hipótesis alternativa. No se menciona.
 - No especifica cuándo se rechaza o se acepta la hipótesis nula.
- No muestra las partes de un test de hipótesis: Planteamiento de hipótesis, estadístico de prueba y criterio de decisión.

Fundamento

Propuesta

- Cambiar el esquema por uno que entregue la información de forma correcta.
- Especificar las partes de un test de hipótesis.
 - Especificar los tipos de test de hipótesis.
 - Especificar los tipos de errores.
 - Agregar registro pictórico del test, donde se muestre el gráfico de la distribución muestral de \bar{X} basada en k muestras de tamaño n , $n > 30$.

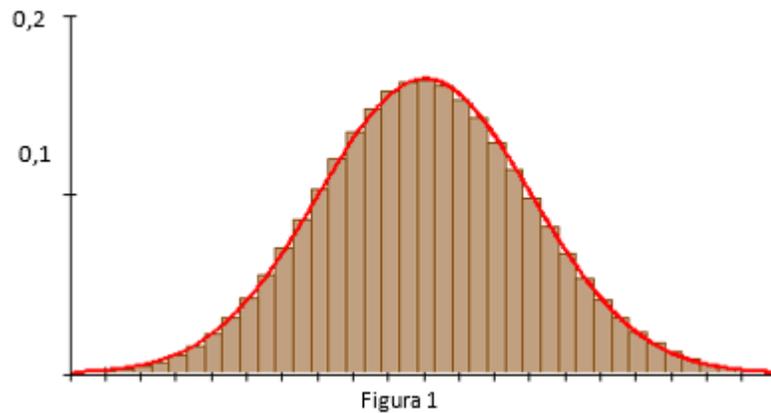
1. A diferencia de la estimación por medio de intervalos de confianza para la media poblacional, aquí se utilizan intervalos de confianza en torno a la media poblacional, con el fin de probar si la media muestral está o no en el intervalo acorde a un cierto nivel de confianza y error de probabilidad.

$1 - \alpha$	α	Error de probabilidad	$Z_{\alpha/2}$	Intervalo de confianza para \bar{X}
0,90	0,1			
0,95	0,05	5%	1,960	$\left[\mu - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,01			

Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
<ul style="list-style-type: none"> - Se asume que el estadístico de prueba es el intervalo de confianza para la media muestral. - Los intervalos de confianza son para estimar el valor de un parámetro de la población. - Dada una muestra se puede calcular el valor de la media muestral, por lo que no es necesario crear un IC para la media. - $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,05}{2}} = Z_{0,025} = -1,960$ 	<ul style="list-style-type: none"> - Definición de intervalo de confianza: Sea $\alpha \in (0,1)$ un número fijo dado. Un intervalo de confianza para un parámetro desconocido θ de una distribución de probabilidad es un intervalo aleatorio de la forma $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, en donde $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son dos estadísticas que satisfacen: $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$ - En estadística inferencial clásica se estiman parámetros poblacionales. No se estiman estimadores como la media muestral. Por lo que es estadísticamente (dentro de la inferencia clásica) 	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar como estadístico de prueba $Z_{\text{Calculado}}$ - Cambiar $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ por $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ para utilizar valores positivos o respetar el signo negativo del resultado de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

	<p>incorrecto hacer un intervalo de confianza para la media muestral.</p> <ul style="list-style-type: none"> - En el programa del electivo aparece la tabla de distribución normal estandarizada como $P(Z < z)$ por lo que $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ tiene valor negativo. 	
<p>1. ¿En qué influye el nivel de confianza y error de probabilidad a la hora de fijar un intervalo para media muestral? Argumenten.</p>		
<p>¿En qué consiste la “hipótesis nula” y cómo se acepta o rechaza? Argumenten.</p>		
Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
<ul style="list-style-type: none"> - Anteriormente no se especifica cuando rechazar la hipótesis nula. - No es correcto fijar un intervalo de confianza para la media muestral. 	<p>No hay libros o fuentes confiables de inferencia clásica que expliquen test de hipótesis utilizando intervalos de confianza para la media muestral, por ende, no hay bases para saber cuándo rechazar o no rechazar la hipótesis nula dado un test bilateral o unilateral.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Cambiar la estructura de la prueba de hipótesis.
<p>2. Contrasten ahora con una prueba de hipótesis con un error de probabilidad de 1% acerca de un cambio “altamente significativo”. Construyan un intervalo de confianza adecuado y establezcan si aceptan o rechazan la hipótesis nula.</p>		
Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
<ul style="list-style-type: none"> - No se entiende qué significa un cambio “altamente significativo” 		<ul style="list-style-type: none"> - Explicar qué es un cambio “altamente significativo”
<p>3. El gráfico de abajo muestra el histograma de una distribución binomial aproximada por una campana de Gauss.</p> <p>a. ¿Por qué, en muestras grandes, se puede aproximar una “situación binomial” por el supuesto de normalidad?</p> <p>b. Una prueba de hipótesis bilateral considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,05$ para el rechazo de la hipótesis nula H_0. Marquen aproximadamente, en el eje horizontal de la Figura 1, el margen del rechazo de la hipótesis nula.</p> <p>c. Una prueba de hipótesis unilateral izquierda considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,08$ para el rechazo de la hipótesis nula H_0. Marquen aproximadamente, en el eje horizontal de la Figura 1, el margen del rechazo de la hipótesis nula.</p>		

d. Una prueba de hipótesis unilateral derecha considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,06$ para el rechazo de la hipótesis nula H_0 . Marquen aproximadamente, en el eje horizontal de la Figura 1, el margen del rechazo de la hipótesis nula.



Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
<ul style="list-style-type: none"> - No especifica qué representa el gráfico. - No especifica qué representan los ejes. - En el esquema inicial no mencionan a modo de resumen lo que es una prueba de hipótesis bilateral o unilateral (izquierda o derecha) ni mencionan cómo aceptar o rechazar la hipótesis nula en esas situaciones. - Piden marcar en el gráfico, sin embargo, ¿Cómo marcar si no hay nada en los ejes para guiarse? 		<ul style="list-style-type: none"> - Dar contexto al ejercicio - Especificar qué representan los ejes - Enumerar los ejes. - Especificar anteriormente qué es una prueba de hipótesis bilateral o unilateral (izquierda o derecha). - Mencionar cuándo se rechaza o acepta la hipótesis nula dependiendo del tipo de test.

4. Prueba de hipótesis con variable aleatoria X normalmente distribuida.

En un experimento escolar, para determinar la velocidad del sonido en el aire, se posicionan el emisor y el receptor del sonido a una distancia de $3,40m$. Así, debido a la naturaleza de la propagación del sonido, los tiempos t medidos que necesita el sonido para recorrer la distancia deberían tener medidas con el valor esperado de $\mu = 0,0100s$ con una desviación estándar de $\sigma = 0,0010s$. 16 grupos de dos alumnos registraron sus resultados de las mediciones, ya promediados, del tiempo t y los representaron en la siguiente tabla.

grupo	1	2	3	4	5	6	7	8
t en s	0,0094	0,0110	0,0087	0,0092	0,0091	0,0101	0,0081	0,0100

grupo	9	10	11	12	13	14	15	16
t en s	0,0088	0,0093	0,0102	0,0087	0,0091	0,0094	0,0102	0,0085

- Mirando las tablas con los resultados, conjeturen acerca de la tendencia de los tiempos que oscilan alrededor del valor esperado $\mu = 0,0100s$.
- Elaboren el intervalo de confianza para la hipótesis nula, contrastando el resultado experimental \bar{X} (tiempos medidos) del grupo experimental de los 16 alumnos con el valor esperado μ , admitiendo un nivel de error de probabilidad de 5%.
- Determinen la media \bar{X} de las 16 mediciones que resultan del experimento.
- Según la media \bar{X} calculada, acepten o rechacen la hipótesis nula.
- Conjeturen acerca de la calidad del reloj digital utilizado en los experimentos.

Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
- No es correcto calcular un intervalo de confianza para la media muestral.	No hay libros o fuentes confiables de inferencia clásica que expliquen test de hipótesis utilizando intervalos de confianza para la media muestral.	- Cambiar el estadístico de prueba.

5. La capacidad de la carga eléctrica de un modelo de batería está etiquetada con $120Ah$. Una empresa automotriz recibe reclamos de clientes que dicen que la carga eléctrica de este modelo es menor. Se hizo una investigación al interior de la automotriz, testeando al azar $n = 25$ baterías con una media $\bar{X} = 118,8Ah$. La desviación estándar de la capacidad de este modelo es de $\mu = 2,5Ah$.

- Prueben la siguiente hipótesis con un nivel de error de probabilidad de 5%: “El valor esperado μ de la carga eléctrica sigue en $120Ah$ ”.
- ¿Por qué las pruebas de hipótesis ponen sentido a la elaboración de intervalos de confianza?

Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
¿Por qué ponen sentido la elaboración de intervalos de confianza para una prueba de hipótesis?		- Cambiar el estadístico de prueba.

Orientación para el docente

Una parte importante de la *estadística inferencial* se refiere a pruebas de hipótesis mediante las cuales se quiere verificar o rechazar si el valor esperado “ μ ” de una población, distribuida con una variable aleatoria normal, haya cambiado o no. Se toma una muestra del tamaño “ n ”, se determina la media muestral \bar{X} y se construye un intervalo de confianza alrededor del valor esperado de la población

$$\left[\mu - k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Si la media muestral \bar{X} está dentro del intervalo de confianza, se acepta la hipótesis nula “no hay cambio”. En el otro caso, se rechaza la hipótesis nula “no hay cambio”.

Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
- No especifica si el criterio para rechazar es el mismo para los		- Cambiar el estadístico de prueba.

<p>distintos tipos de prueba (bilateral o unilateral).</p> <ul style="list-style-type: none"> - No se puede estimar el valor de un estimador. - No se especifica qué es “k” - En cuanto al lenguaje, debería decir que “Si la media muestral \bar{X} pertenece al intervalo de confianza...” 		
<p>Recursos y sitios web</p>		
<p><i>Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:</i> Pruebas de hipótesis http://frrq.cvg.utn.edu.ar/pluginfile.php/3617/mod_resource/content/0/TRANSPARENCIAS/Prueba_Hipotesis-_PPT-2013.pdf Pruebas de hipótesis https://www.monografias.com/trabajos17/pruebas-de-hipotesis/pruebas-de-hipotesis.shtml</p>		
Errores/Observaciones	Fundamento	Propuesta
<ul style="list-style-type: none"> - Los sitios web sugeridos no son sitios de confianza. - En el primer link se ve test de hipótesis con P-valor, mientras que en todas las actividades propuestas por el ministerio no se menciona lo que es. - En ninguno de los sitios web se ve test de hipótesis utilizando intervalos de confianza para la media muestral. 	<ul style="list-style-type: none"> - En monografías cualquier persona puede crear una entrada. 	<ul style="list-style-type: none"> - Cambiar las páginas sugeridas por sitios web de confianza. - Cambiar las páginas web sugeridas por sitios que sean acorde a cómo el ministerio propone pasar los contenidos.

Capítulo V: Conclusiones y Reflexiones.

Durante el transcurso de nuestra investigación, fue posible encontrar una variedad de problemáticas que afectan el ejercicio docente en la educación media, en particular para el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, lo cual generó que el rumbo del estudio fuera cambiando a medida que nos fuimos adentrando a las problemáticas encontradas.

En primer lugar, cuando se publicó en 2019 la reforma curricular que planteaba la creación de una gama de nuevos electivos para ser implementados en los cursos de III° o IV° Medio surgió la interrogante de si los docentes están preparados para impartir el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial debido a que, por nuestra propia experiencia universitaria, no se alcanzaron a revisar con profundidad los últimos contenidos de los cursos de inferencia, los cuales corresponden a intervalos de confianza y test de hipótesis. Dada esta interrogante, en principio teníamos pensado solo hacer un estudio de percepción para identificar y visibilizar cómo los docentes se sentían frente a los cambios curriculares y qué emociones surgían en ellos a partir de estos cambios y por tanto, en esa línea, por medio de la encuesta de *“Percepción del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° medio”* (anexo N°3), evidenciamos que hay docentes que efectivamente no manejan todos los contenidos del electivo, y que por ende, no se sienten preparados para impartirlo. Esto, genera interrogantes sobre el cómo el Ministerio de Educación gestiona dichas reformas curriculares y de si existen o no estudios rigurosos que respalden la viabilidad de tomar este tipo de decisiones, particularmente si efectivamente los docentes están preparados, ya sea en su formación inicial o en formación continua para conducir el aprendizaje de objetos matemáticos que nunca se han enseñado a nivel escolar.

Además, es imprescindible no solo evidenciar que hay un número importante de docentes que no poseen las herramientas pedagógicas para guiar el aprendizaje en estos contenidos, sino que también visibilizar qué sensaciones surgen en los docentes al enfrentarse a la realidad de estas reformas unilaterales. Entre los comentarios generales escritos por los encuestados, podemos identificar que muchos docentes se sienten incapaces de cumplir de buena manera su labor, por el miedo a que les toque impartir el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial. También podemos identificar sentimientos

como la frustración, predominantes en docentes con más años de experiencia, debido a que se sienten excluidos de estos procesos de reformas, puesto que en su formación inicial contemplaba solo un curso de estadística, o incluso, ninguno, enfrentándose a objetos matemáticos totalmente nuevos para ellos, de dificultad elevada y a una edad donde se dificulta el estudio individual. En el caso de quienes sí estudiaron los contenidos del electivo en su formación inicial, al no haber sido nunca escolares, nunca se preocuparon de profundizar en ellos, dado que nunca los enseñarían, lo que, en muchos casos, provoca que se olviden.

Para nosotros, todo lo anteriormente señalado nos da la sensación de que el Ministerio de Educación, al crear reformas curriculares de estas proporciones incluyendo 27 nuevos electivos, entre estos el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial, no toma en consideración el cómo será el impacto de la implementación de estos, solo la dan por hecho dejando a la deriva a los profesores que se ven enfrentados a conducir el aprendizaje en alguno de ellos sin manejar los contenidos, por cualquiera de los motivos señalados anteriormente. A esto, se suma la escasez de instancias públicas de formación continua como capacitaciones, viéndose esto reflejado en la encuesta, con el 89% de los encuestados que declara que piensa estudiar individualmente para abordar dichos contenidos en los que no se sienta preparado para conducir la enseñanza.

Luego, cuando comenzamos a indagar más en el electivo, nos encontramos con el material publicado para este, en el programa de estudio, por el Ministerio de Educación. Lo primero que llama la atención, es que no existe propuesta de bajada didáctica de los contenidos, lo que implica que implícitamente están asumiendo que los docentes en su totalidad están preparados para guiar el aprendizaje en estos, es decir, asumen la comprensión del uso de TIC's, en conjunto de asumir las definiciones de los contenidos a tratar.

Por otro lado, tampoco existe un texto para el estudiante, por lo que, si ellos quisieran profundizar en alguno de los temas, como por ejemplo intervalos de confianza tendrían que recurrir a algún libro especializado de Inferencia Estadística o a la web, lo que dificulta el aprendizaje ya que dichos libros no están pensados para escolares.

Así entonces, solo nos encontramos con la publicación del programa del electivo, donde se describen los

objetivos de aprendizaje, habilidades y plantean actividades o problemas para resolver en cada una de las unidades. Dicha realidad de escases de material nos llevó a realizar un giro en nuestra investigación para no solo visualizar qué tan preparados están los profesores y cómo se sienten frente a la inminente necesidad de impartir el electivo, sino que también a cómo ayudarlos.

En relación con el programa de estudio del presente electivo cabe destacar que se explicita que el docente debe diseñar actividades de clase desafiantes que induzcan a los estudiantes a aplicar habilidades cognitivas mediante las cuales profundicen en la comprensión de un nuevo conocimiento. Este diseño debe permitir mediar simultáneamente ambos aspectos del aprendizaje, el significativo y el profundo, y asignar al alumno un rol activo dentro del proceso de aprendizaje (MINEDUC, 2021), no obstante, al no poseer los conocimientos necesarios y suficientes de la unidad de estadística inferencial no es posible que los profesores puedan lograr una buena guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que una vez más se evidencia la unilateralidad de las reformas curriculares, las cuales no contemplan la realidad docente y aparta a aquellos que no fueron formados inicialmente con estos nuevos contenidos.

Respecto a las actividades del programa de estudio, podemos encontrarnos con que ninguna está resuelta, por lo que carecen de utilidad para un docente que no maneja los contenidos. Y no solo eso, sino que las actividades que corresponden a Test de Hipótesis están mal planteadas, debido a que, entre otras cosas, en todo momento se habla del cuantil $\frac{\alpha}{2} \left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$ de la distribución normal estándar como el valor de la variable que deja a la derecha una probabilidad de $\frac{\alpha}{2}$, mientras que en los anexos del programa la tabla de la distribución normal estándar se define como el cuantil $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$ como el valor de la variable que acumula $\frac{\alpha}{2}$ de probabilidad, generando así una contradicción de conceptos en el programa, lo cual, representará un obstáculo y confusión tanto para docentes como para estudiantes. También, como apoyo en estas actividades, se sugieren páginas que carecen de formalidad, como en el caso de test de hipótesis con “Monografías”, y, además, se encuentran páginas web las cuales no tienen concordancia con la forma la cual el Ministerio de Educación desea abordar las actividades, es decir, la información entregada por los sitios web no son acorde a las actividades planteadas ni fomentan el desarrollo de actitudes y habilidades que propone el MINEDUC, así también, carecen de metodologías de enseñanza que el Ministerio fomenta dentro de sus programas de estudio.

Por otra parte, el programa establece que se debe desarrollar la alfabetización digital apuntando a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza esta nueva generación, aprovechando distintas herramientas digitales, no obstante, dentro de las actividades propuestas no se lleva a cabo ninguna actividad que implique el uso de herramientas digitales, siendo así poco concordante entre la teoría y la práctica. Además, los docentes no están preparados para guiar un proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos, por los motivos ya expuestos, por lo que tampoco se encuentran capacitados para incorporar herramientas tecnológicas como GeoGebra, Excel, SPSS, entre otros programas que pueden ser utilizados para desarrollar la alfabetización digital a la que apunta el Ministerio de Educación, por lo que es necesario que se ofrezcan capacitaciones a los docentes en ejercicio donde se les pueda instruir sobre estos programas y en conjunto, capacitaciones respecto a los contenidos que abarca el programa del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° medio.

Cabe destacar también que, frente a la dificultad del contenido de test de hipótesis, en el capítulo del marco teórico se escogió la perspectiva de Walpole (2007) a partir de los intervalos de confianza debido a que es la que nos pareció más clara e intuitiva. La mayoría de los otros textos, explican la procedencia de los test de hipótesis de manera algo confusa, escapando incluso de los contenidos estudiados durante la carrera en la UMCE. En esa misma línea, debido a la complejidad del contenido, se marcó una diferencia entre lo expuesto en el marco teórico y lo planteado como bajada de contenido en la sección actividades, puesto que consideramos que a nivel escolar, es bastante complicado profundizar matemáticamente en test de hipótesis y por tanto, solo decidimos explicitar los elementos más importantes como regiones de rechazo y estadístico de prueba, de la manera más simple y concreta, con tal facilitar su comprensión por parte de los docentes y estudiantes.

Así entonces, respecto al primer objetivo específico, se logró identificar que los contenidos que presentan mayores dificultades en los docentes corresponden a la unidad 4, relacionados a los contenidos de estadística inferencial, en particular intervalos de confianza para la media con varianza conocida y test de hipótesis para la media con varianza conocida.

En relación a los otros objetivos específicos, se logra resolver a modo de guía para el docente, la selección de actividades planteadas por el MINEDUC de los contenidos de intervalos de confianza para la media

con varianza conocida, no obstante, para test de hipótesis, solo se realizó una bajada de los contenidos, dado que no se pudieron realizar las actividades dada la gran cantidad de errores encontrados en estas.

Referencias bibliográficas.

- Alvear, F. R. (4 de Mayo de 2021). *Laboratorio de Educación Centro de Modelamiento Matemático*. Recuperado el 26 de Julio de 2021, de CMMEdu: <https://cmmedu.uchile.cl/events/el-eje-de-datos-y-azar-un-desafio-pendiente-en-la-formacion-inicial-docente-despues-de-mas-de-una-decada-en-el-curriculo-escolar-chileno/>
- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Consejo Nacional de Educación. (11 de Junio de 2019). *Cned*. Recuperado el 12 de Mayo de 2021, de https://www.cned.cl/sites/default/files/presentacion_cnedjun112019.pdf
- Contreras, L., Montes, M., Climent, N., & Carrillo, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas.
- Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) (2008). *Marco para la buena enseñanza*. Santiago, Chile: Ministerio de educación.
- Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP). (2019). *Informe Resultados Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente*. MINEDUC. Retrieved Julio 08, 2021
- Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) (2019). *Planes de superación profesional. Textos para el apoyo pedagógico*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.
- Devore, J. L. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. CENGAGE Learning.
- Escudero, I. & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teacher's practice? *Journal of Mathematical Behavior*, 26(4), 312 – 327.
- González, V. M., González-Tirados, R. M., y López, A. (2011). Diseño de situaciones de aprendizaje que potencien competencias profesionales en la enseñanza universitaria. *Magister: Revista miscelánea de investigación*, (24), 121-134.
- González, V. (2009). Autodeterminación y conducta exploratoria. Elementos esenciales en la competencia para la elección profesional responsable. *Revista iberoamericana de educación*, 51, 201-220.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación: Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio

(6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

Llinares, S. (2016). ¿Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas?

Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11(15), 57-67.

Meyer, P. L. (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Addison-Wesley Iberoamericana.

MINEDUC. (Noviembre de 2019). *Currículum Nacional*. Recuperado el 8 de Julio de 2021, de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

MINEDUC. (2021). *Programa de Estudio III° o IV° medio Formación Diferenciada Matemática Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial*. Obtenido de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140145_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Pontificia Universidad Católica de Chile. (2018). *Admisión y registros UC*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de http://admisionyregistros.uc.cl/images/pdf/mallas/ped_media_matematica.pdf

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (s.f.). *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de http://www.pucv.cl/pucv/site/artic/20150608/asocfile/20150608174905/pe_pedagog__a_en_matem__ticas.pdf

Torres, R. M. (2010). *Reformas educativas, docentes y organizaciones docentes en América Latina y el Caribe*. Recuperado el 13 de Marzo de 2021, de http://rehip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/4056/reformas_educativas_dpcentes_organizaciones_docentes_AL_torres.pdf?sequence=3

Universidad Alberto Hurtado. (s.f.). *Universidad Alberto Hurtado*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de https://www.uahurtado.cl/pdf/Malla_Pedagogia_Matematicas.pdf

Universidad Católica del Maule. (2020). *Admisión*. Obtenido de http://portal.ucm.cl//content/uploads/2020/02/mallas-admision_ped_mat_comp_2020.pdf

Universidad Católica del Norte. (s.f.). *Universidad Católica del Norte*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de <https://www.ucn.cl/carrera/pedagogia-en-matematica-en-educacion-media/>

Universidad Católica Silva Henríquez. (2020). *Admisión UCSH*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de https://admision.ucsh.cl/wp-content/uploads/2020/07/Pedagog%C3%ADa_Matem%C3%A1ticas_2020.pdf

Universidad de Chile. (s.f.). *Admisión Pregrado*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de

<https://www.uchile.cl/carreras/4963/pedagogia-en-educacion-media-en-matematicas-y-fisica>
Universidad de Concepción. (s.f.). *Admisión UdeC*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de
https://admission.udec.cl/sites/default/files/sites/default/files/ORIGINAL_Ped_Matematica.pdf
Universidad de Santiago de Chile. (s.f.). *Admisión Usach*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de
https://admission.usach.cl/sites/default/files/mallas_carreras/Pedagogi%CC%81a%20en%20Fi%CC%81sica%20y%20Matema%CC%81tica.pdf
Universidad de Santiago de Chile. (s.f.). *Admisión Usach*. Recuperado el 3 de Marzo de 2021, de
https://www.admission.usach.cl/sites/default/files/mallas_carreras/Pedagogi%CC%81a%20en%20Matema%CC%81tica%20y%20Computacio%CC%81n_0.pdf
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. (2019). *Pregrado UMCE*. Recuperado el 3 de
Marzo de 2021, de http://pregrado.umce.cl/matematica/malla_tradicional_2019.pdf
Walpole. (2007). *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. Pearson.

Tablas y figuras

Tablas

Tabla N°1	4
Tabla N°2	14
Tabla N°3	47
Tabla N°4	49
Tabla N°5	50
Tabla N°6	54
Tabla N°7	56

Figuras

Figura N°1	17
Figura N°2	20
Figura N°3	23

Gráficos

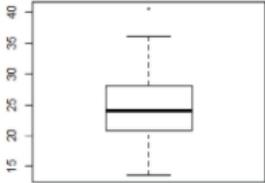
Gráfico N°1	48
Gráfico N°2	52
Gráfico N°3	53
Gráfico N°4	55

Anexos

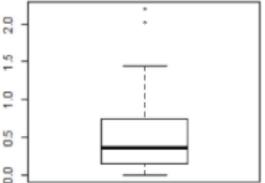
Anexo 1. Resultados encuesta realizada a docentes para evaluar conocimientos respecto de los contenidos del electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.

1.

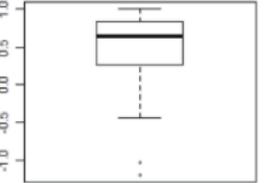
Hay poca variabilidad cuando la moda, la mediana y la media son valores similares. ¿En qué ciudad se da esa condición? ¿Por qué?



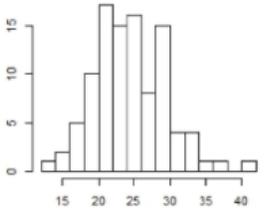
Copiapó

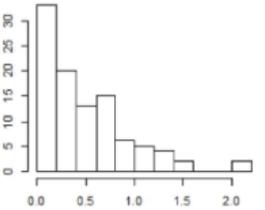


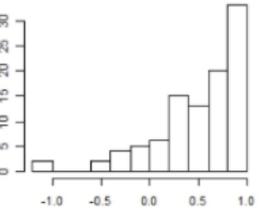
Puerto Williams



Santiago





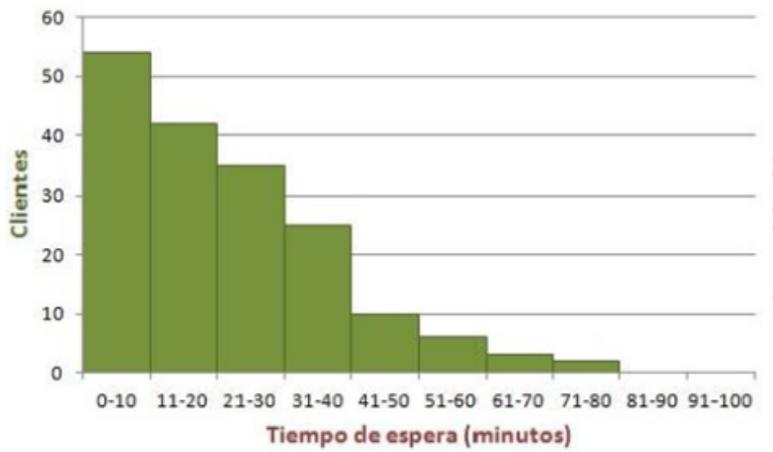


“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
81,8%	50%	50%	87,5%

2.

El siguiente histograma representa los tiempos de espera de aquellos clientes de una empresa automotora de vehículos usados.

¿En qué intervalo de tiempo se encuentra la mediana?

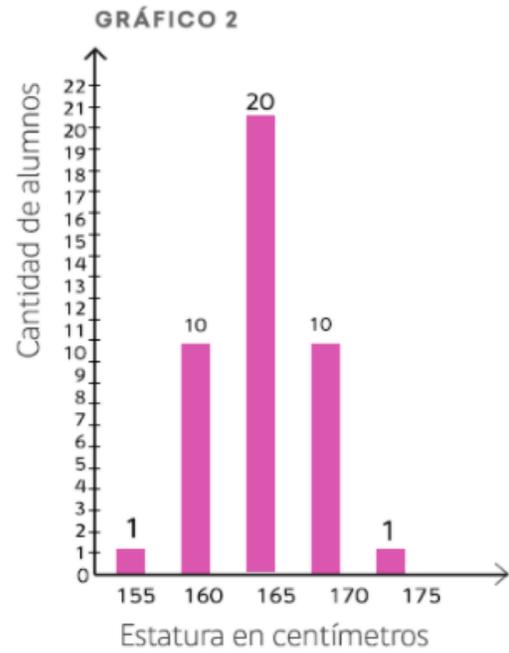
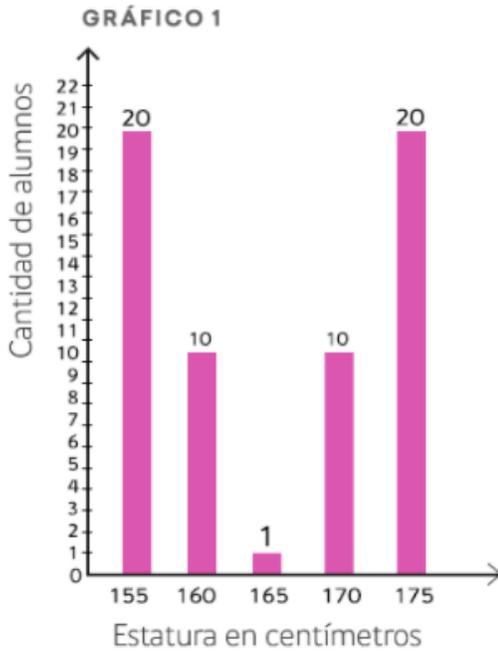


“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
100%	-	-	72,7%

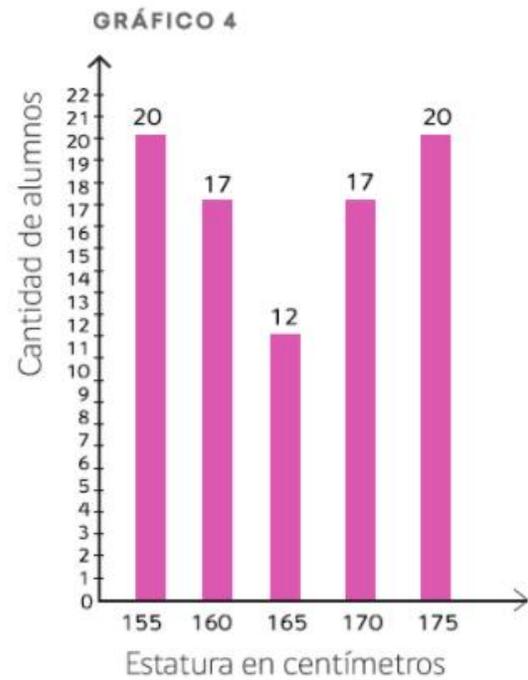
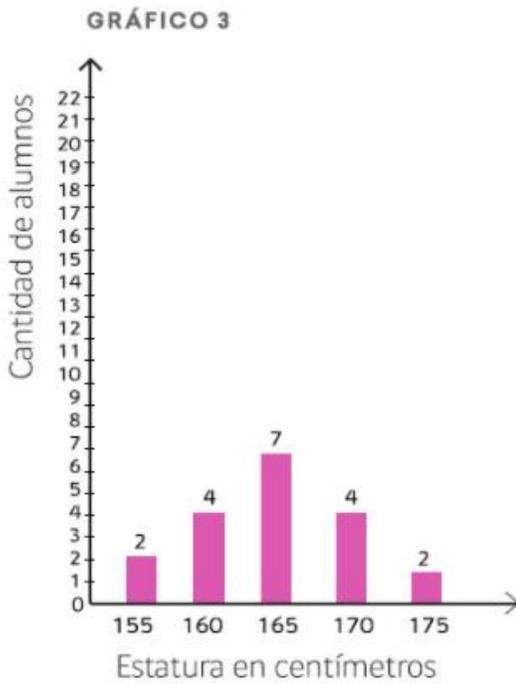
3.

A continuación se presentan 4 gráficos que resumen las estaturas de 208 alumnos de IV° Medio de 4 colegios pertenecientes a la R.M. Para saber qué colegio presenta mayor homogeneidad en las estaturas ¿Qué debemos comparar?

Gráficos Colegio 1 y Colegio 2



Gráficos Colegio 3 y Colegio 4



“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
90,9%	100%	-	30%
4.			
<p>Considera la variable aleatoria X: Cantidad de sellos obtenidos en tres lanzamientos consecutivos de una moneda honesta ¿Cuál es la media de la cantidad de sellos en los tres lanzamientos?</p>			
“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
72,7%	66,7%	33,3%	
5.			
<p>Se sabe que una variable aleatoria se distribuye normalmente. ¿En qué aporta para entender cómo se distribuyen los datos, saber que son normales en su distribución?</p>			
“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
72,7%	66,7%	33,3%	87,5%
6.			
<p>En un curso se aplica un control de 4 preguntas con 3 alternativas cada una, y un estudiante que olvidó estudiar, decide responder las 4 preguntas al azar.</p> <p>1. ¿Qué distribución de probabilidad modela adecuadamente esta situación y cuáles son sus parámetros?</p> <p>2. Si el profesor dice que cada pregunta contestada correctamente vale un punto, y que con el 60% de logro aprueba el control, ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante lo apruebe?</p>			
	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta

“Sabe resolver la pregunta”	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
56,4%	80%	20%	75%
7.			
<p>En 2019, una empresa debe realizar un recorte de personal por problemas económicos. Toma la decisión según los sueldos, por lo que despedirá a todos los que ganen más de \$6.000.000. Ella considera que los sueldos se distribuyen en la empresa normalmente con desviación estándar \$1.800.000. Esa reducción de personal corresponderá al 10,03% de los trabajadores.</p> <p>¿Qué porcentaje de trabajadores gana entre la media de sueldos y los \$6.000.000?</p>			
“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
54%	80%	20%	66,7%
8.			
<p>Una fabrica de lácteos desea constatar el contenido de las cajas de leche de 1L. Tienen, según sus datos, una distribución aproximadamente normal con varianza de 0,16 L. Se toma una muestra aleatoria de caja, se mide el contenido y se obtiene los siguientes litros:</p> <p>0,970; 0,955; 0,930; 1,104; 1,039; 0,910; 0,944; 0,908; 0,808</p> <p>1. Si el nivel de significancia fuera de un 3% ¿Cuál sería el intervalo de confianza para la media? 2. ¿Cómo se interpreta el intervalo al que llegó?</p>			
“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
18,2%	90%	10%	75%
9.			
<p>Imagina que se miden los tiempos de reacción frente a un evento de un grupo de personas con las mismas características. El especialista estima en 0,05 segundos la desviación estándar.</p> <p>Determina el tamaño "n" de la muestra de tiempos de reacción, de modo que:</p> <p>Si se considera una confianza del 95%, que el error de estimación no supere los 0,01 segundos</p>			

“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
27,3%	90%	10%	75%

10.

La capacidad de la carga eléctrica de un modelo de batería está etiquetada con 120Ah. Una empresa automotriz recibe reclamos de clientes que dicen que la carga eléctrica de ese modelo es menor. Se hizo una investigación al interior de la automotriz, testeando al azar $n=25$ baterías con una media $\bar{X} = 118,8\text{Ah}$. La desviación estándar de la capacidad de este modelo es de $\sigma=2,5\text{Ah}$.

a. Prueben la siguiente hipótesis con un nivel de error de probabilidad de 5%: “El valor esperado μ de la carga eléctrica sigue en 120Ah”. ¿Los clientes tienen la razón?

“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
0%	90,9%	9,1%	-

11.

Hace unos años, en una encuesta, el 65% de la población estaba a favor de mantener dos horarios oficiales, uno de invierno y otro de verano. Actualmente, existen dos grupos grandes en la población que consideran tener la información de que el porcentaje ha cambiado. El grupo A dice que el porcentaje ha disminuido y que sería justo volver a un horario único. El grupo B opina que el porcentaje incluso ha aumentado. Ambos grupos realizan una prueba de hipótesis con una muestra de $n=100$ con la hipótesis nula $H_0: p=0,65$

1. ¿Por qué se puede testear con una variable normal?
2. Según los resultados del test ¿Qué grupo tiene la razón? Argumente

“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
9,1%	72,7%	27,3%	100%

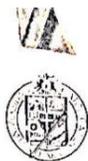
12.

Imagina que el rendimiento verdadero del motor de un modelo de automóvil de cierta empresa es de 9,9 km. En este caso, la hipótesis nula “ $\mu=10$ km” sería falsa con un error del 10%. La variable aleatoria X estaría distribuida normalmente con el valor esperado $\mu=9,9$ km y desviación estándar $\sigma=1$ km. Suponga que la distribución de las medias \bar{X} tuviera el valor esperado $E(\bar{X})=9,8$ km y la desviación estándar de $\bar{\sigma}=0,1$

¿Qué error (tipo 1 o tipo 2) se cometería, aceptando la hipótesis nula “ $\mu=10$ km”? Argumenta

“Sabe resolver la pregunta”	“No sabe resolver la pregunta”		Pregunta correcta
	“No recuerda los contenidos”	“No vio los contenidos en su formación inicial”	
0%	81,8%	18,2%	-

Anexo 2. Desglose de cursos malla Universidad Católica de Valparaíso 1983.



UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO-CHILE
VICERRECTORIA ACADEMICA

CERTIFICADO DE CALIFICACIONES

Mediante Oficio N° 1.590 del 17 de julio de 1991

se certifica que Don [REDACTED]

ha aprobado con las calificaciones que se indican las siguientes asignaturas: Hoja N° 1.-

Clave	Asignatura	Nota	Calificación	Créditos
MATEMATICA				
AÑO ACADEMICO 1977				
PRIMER SEMESTRE				
CRL 100-14	Cultura Religiosa	5,5	Aprobado	-2-
MAT 019-01	Sistemas Numéricos 1	4,8	Aprobado	-10-
MAT 090-01	Introducción a las Matemáticas	***	Aprobado	-4-
EFI 150-01	Educación Física 1	***	Aprobado	-1-
SEGUNDO SEMESTRE				
CRL 200-14	Cultura Religiosa	5,0	Aprobado	-2-
BIO 105-01	Cocimiento y Protección a la Fauna Chilena 1	5,5	Aprobado	-2-
EFI 250-01	Educación Física 2	***	Aprobado	-1-
AÑO ACADEMICO 1978				
PRIMER SEMESTRE				
CRL 300-15	Cultura Religiosa	4,0	Aprobado	-2-
MAT 119-01	Sistemas Numéricos	4,0	Aprobado	-6-
MAT 129-01	Geometría	5,0	Aprobado	-6-
EFI 350-01	Educación Física 3	***	Aprobado	-1-
SEGUNDO SEMESTRE				
MAT 219-00	Álgebra 1	4,0	Aprobado	-8-
AÑO ACADEMICO 1979				
SEGUNDO SEMESTRE				
MAT 229-00	Análisis 1	4,0	Aprobado	-8-
MAT 319-00	Álgebra 2	4,0	Aprobado	-8-
AÑO ACADEMICO 1980				
PRIMER SEMESTRE				
MAT 329-00	Análisis 2	4,3	Aprobado	-8-
MAT 419-00	Álgebra 3	4,1	Aprobado	-8-
SEGUNDO SEMESTRE				
MAT 429-00	Análisis 3	4,0	Aprobado	-8-
MAT 571-00	Taller 1	4,5	Aprobado	-6-
EDU 220-02	Fundamentos Psicológicos del Desarrollo	4,0	Aprobado	-3-
EDU 350-02	Legislación Educacional	4,1	Aprobado	-2-

OBSERVACION: La Universidad Católica de Valparaíso certifica conceptualmente en términos de Distinguido, Aprobado o Reaprobado y/o en la escala numérica de 1.0 (Uno) a 7.0 (Siete), siendo la nota mínima de aprobación 4.0 (Cuatro).

ESTE CERTIFICADO NO LLEVA ENMIENDAS Y CONSTA DE 2 HOJAS

919

REVISADO POR [REDACTED]



PROF. RICARDO SUZU GARRAO.

DIRECTOR
Dirección de Admisión y Registro

UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO-CHILE
VICERRECTORIA ACADEMICA

CERTIFICADO DE CALIFICACIONES

Mediante Oficio Nº 1.590 del 17 de julio de 19 91

se certifica que Don [REDACTED]

ha aprobado con las calificaciones que se indican las siguientes asignaturas: Hoja Nº 2.-

Clave	Asignatura	Nota	Calificación	Créditos
AÑO ACADEMICO 1981				
PRIMER SEMESTRE				
MAT 671-00	Taller 2	6,2	Aprobado	-6-
EDU 110-04	Fundamentos Teórico Filosóficos de la Educación 1	4,4	Aprobado	-2-
EDU 230-04	Psicopedagogía	4,3	Aprobado	-3-
EDU 240-02	Factores Socioculturales	5,4	Aprobado	-2-
SEGUNDO SEMESTRE				
BIO 211-00	Tópicos Especiales de Zoología	6,0	Aprobado	-3-
EDU 210-03	Fundamentos Teórico Filosóficos de la Educación 2	5,7	Aprobado	-2-
EDU 310-02	Planificación Curricular	5,4	Aprobado	-4-
CRL 400-39	Cultura Religiosa	6,5	Aprobado	-2-
EDU 320-01	Evaluación Educativa	5,0	Aprobado	-3-
AÑO ACADEMICO 1982				
PRIMER SEMESTRE				
BIO 213-00	Tópicos de Ecología	5,7	Aprobado	-3-
EST 259-00	Fundamentos de Análisis Numérico	5,2	Aprobado	-4-
EDU 114-00	Ética y Profesión	5,0	Aprobado	-2-
EDU 244-00	Análisis de la Interacción Escolar	5,6	Aprobado	-3-
EDU 250-06	Orientación Educativa	5,0	Aprobado	-3-
EDU 330-04	Investigación Educativa	4,2	Aprobado	-2-
SEGUNDO SEMESTRE				
UCV 005-02	Geopolítica	5,7	Aprobado	-3-
MAT 550-00	Historia de las Matemáticas	5,4	Aprobado	-4-
ICR 041-01	Orígenes del Cristianismo	6,2	Aprobado	-2-
EDU 361-00	Teoría e Historia del Currículum	7,0	Aprobado	-4-
ANUAL				
MAT 578-02	Seminario de Título	6,0	Aprobado	-6-
AÑO ACADEMICO 1983				
PRIMER SEMESTRE				
EDU 620-08	Práctica Docente	6,0	Aprobado	-1-

Se extiende el presente certificado, sólo con ramos APROBADOS, para trámites internos de TITULACION.

OBSERVACION: La Universidad Católica de Valparaíso certifica conceptualmente en términos de Distinguido, Aprobado o Reprobado y/o en la escala numérica de 1.0 (Uno) a 7.0 (Siete), siendo la nota mínima de aprobación 4.0 (Cuatro).

ESTE CERTIFICADO NO LLEVA ENMIENDAS Y CONSTA DE 2 HOJAS

g/g
REVISADO POR [REDACTED]

PROF. RICARDO BUZZO GARRAO.
DIRECTOR
Dirección de Admisión y Registro

Anexo 3. Encuesta “Percepción del nuevo electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para III° o IV° Medio.

Consulta sobre el nuevo electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio.

Somos Francisco Arenas y Francisca F. Arriagada, estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación en Matemática y Pedagogía en Matemática con mención Estadística en la Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación (UMCE), actualmente estamos en trabajo de Tesina y para dicho proceso requerimos de cierta información por lo que sus respuestas en la siguiente encuesta serán de gran ayuda para nosotros.

El siguiente cuestionario tiene como finalidad recolectar información de los y las docentes de matemática sobre la actualización del programa de estudio del electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio. La información recolectada solo se utilizará con fines académicos y nos ayudará a optar al título de Pedagogía en Matemática.

Favor, lea con calma y siga las instrucciones de cada pregunta, como también evite dejar respuestas en blanco.

Agradecemos de antemano su buena disposición para responder las siguientes preguntas. El tiempo empleado será máximo 15 minutos.

***Obligatorio**

1. ¿Cuál es su universidad de egreso? *

Tu respuesta

2. ¿Está ejerciendo como docente actualmente? *

Sí

No

3. ¿Cuántos años lleva ejerciendo como docente? *

Tu respuesta

Parte 1

La presente sección tiene como objetivo saber cuán informado/a se encuentra respecto al nuevo electivo de probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para los cursos de III° o IV° medio.

4. ¿Está informado del desglose de contenidos declarado en el programa de estudio de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio? *

Sí

No

5. ¿Está informado/a de los objetivos de aprendizaje declarados en el programa de estudio de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio? *

Sí

No

6. ¿Está informado/a sobre las habilidades a desarrollar en cada una de las unidades del programa de estudio del electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para 3° o 4° medio? *

Sí

No

7. ¿Se siente preparado/a para impartir el electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio? *

Sí

No

Programa de estudio del electivo de Probabilidades y Estadística descriptiva e inferencial

En la siguiente sección es importante que esté al tanto de los contenidos presentes en el programa del electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio, por lo que se presentan a continuación:

- Análisis de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.
- Medidas de tendencia central, medidas de dispersión y correlación muestral entre dos variables.
- Aplicación de distribución binomial y normal.
- Aproximación de distribución binomial a normal.
- Intervalos de confianza para proporción y media bajo supuesto de normalidad.
- Test de hipótesis para proporción y media bajo supuesto de normalidad.

8. Respecto a los contenidos, marque cuál/es estudió en su formación inicial. *

- Análisis de histogramas, polígonos de frecuencia, diagramas de cajón y nube de puntos.
- Análisis de frecuencia acumulada.
- Medidas de tendencia central: Media, moda y mediana.
- Medidas de dispersión: Desviación estándar, varianza y coeficiente de variación.
- Correlación muestral entre dos variables.
- Distribución binomial.
- Distribución normal.
- Aproximación de distribución binomial a normal.
- Intervalos de confianza para proporción bajo supuesto de normalidad.
- Intervalos de confianza para media bajo supuesto de normalidad.
- Test de hipótesis para proporción bajo supuesto de normalidad.
- Test de hipótesis para media bajo supuesto de normalidad.
- Ninguno.

9. Respecto a los contenidos señalados, marque cuál/es de estos se siente preparado/a actualmente para enseñar/los. *

- Análisis de histogramas, polígonos de frecuencia, diagramas de cajón y nube de puntos.
- Análisis de frecuencia acumulada.
- Medidas de tendencia central: Media, moda y mediana.
- Medidas de dispersión: Desviación estándar, varianza y coeficiente de variación.
- Correlación muestral entre dos variables.
- Distribución binomial.
- Distribución normal.
- Aproximación de distribución binomial a normal.
- Intervalos de confianza para proporción bajo supuesto de normalidad.
- Intervalos de confianza para media bajo supuesto de normalidad.
- Test de hipótesis para proporción bajo supuesto de normalidad.
- Test de hipótesis para media bajo supuesto de normalidad.
- Ninguno.

10. Respecto a los contenidos señalados, ordénelos según su dominio (observación: puede colocar solo una opción por fila). *

1: buen dominio 2: dominio medio-regular 3: dominio deficiente

Análisis de histogramas, polígonos de frecuencia, diagramas de cajón y nube de puntos

Análisis de frecuencia acumulada

Medidas de tendencia central: Media, moda y mediana

Medidas de dispersión: Desviación estándar, varianza y coeficiente de variación

Correlación muestral entre dos variables	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Distribución binomial	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Distribución normal	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aproximación de distribución binomial a normal	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Intervalos de confianza para proporción bajo supuesto de normalidad	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Intervalos de confianza para media bajo supuesto de normalidad	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Test de hipótesis para proporción bajo supuesto de normalidad	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Test de hipótesis para media bajo supuesto de normalidad	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

11. Respecto a los contenidos que no se siente preparado, ¿cómo planea afrontarlos? (Si marca "otra" especifique su plan). *

- Tomar clases particulares.
- Estudiar solo.
- Asistir a capacitaciones.
- No tengo un plan para afrontarlo.
- Otros: _____

12. ¿Qué tan de acuerdo se encuentra respecto a enseñar los contenidos establecidos en el programa del nuevo electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio? (Observación: puede colocar solo una opción por fila). *

1. Muy de acuerdo 2. Medianamente de acuerdo 3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo 4. Medianamente en desacuerdo 5. Muy en desacuerdo

Análisis de histogramas, polígonos de frecuencia, diagramas de cajón y nube de puntos

Análisis de frecuencia acumulada

Medidas de tendencia central: Media, moda y mediana

Medidas de dispersión: Desviación estándar, varianza y coeficiente de variación	<input type="checkbox"/>				
Correlación muestral entre dos variables	<input type="checkbox"/>				
Distribución binomial	<input type="checkbox"/>				
Distribución normal	<input type="checkbox"/>				
Aproximación de distribución binomial a normal	<input type="checkbox"/>				
Intervalos de confianza para proporción bajo supuesto de normalidad	<input type="checkbox"/>				

Intervalos de confianza para media bajo supuesto de normalidad

Test de hipótesis para proporción bajo supuesto de normalidad

Test de hipótesis para media bajo supuesto de normalidad

13. ¿Realizó el 2020 el nuevo electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio en su carga horaria docente? *

Sí

No

14. ¿Se le asignó para 2021 el nuevo electivo de Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial para III° o IV° medio en su carga horaria docente? *

Sí

No

15. ¿De dónde extrajo o planea extraer material para planificar/preparar/hacer las clases del nuevo electivo? *

- Material entregado por el MINEDUC.
- Textos de estadística, probabilidades e inferencia.
- Material propio.
- Otros: _____

16. En el programa de estudio del nuevo electivo se sugiere que se usen metodologías de enseñanza-aprendizaje activa, como aprendizaje basado en proyectos (ABP). Respecto a esta metodología: *

- La conozco y la he implementado.
- La conozco y no la he implementado.
- No la conozco.

Gracias por su participación

Muchas gracias por contestar la encuesta.

Si bien la siguiente pregunta puede dejarla en blanco, para nuestra investigación sería muy útil que la contestara ya que así podemos visualizar cómo afectan los cambios en los programas de matemática a los/las docentes.

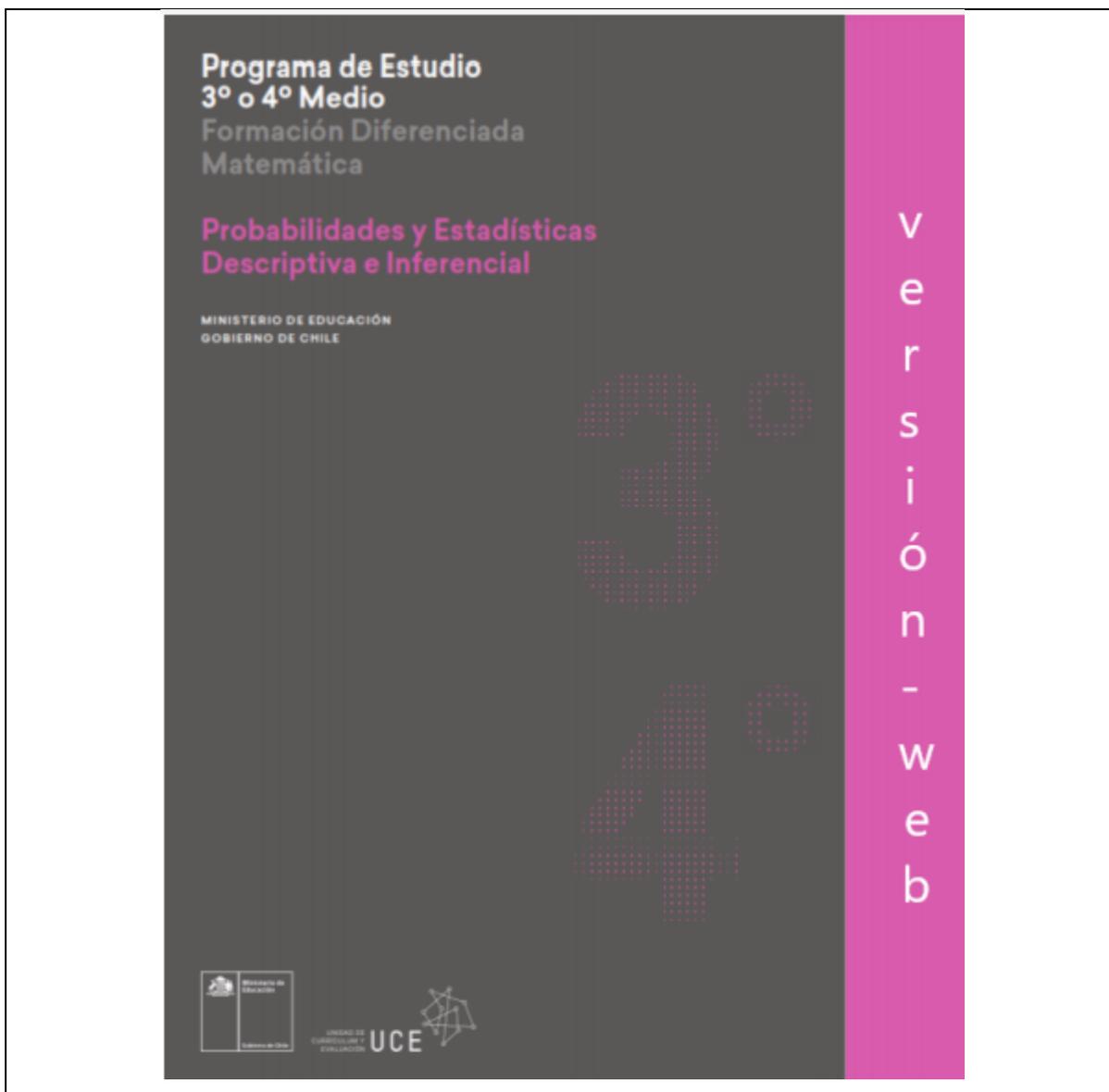
17. ¿Cómo se siente con los cambios en las bases curriculares que plantea el MINEDUC?

Tu respuesta

18. Si desea obtener material preparado sobre los contenidos del programa del electivo de probabilidad y estadística descriptiva e inferencial anote su correo a continuación:

Tu respuesta

Anexo 4. Programa de estudio para el electivo de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial.



Índice

Presentación.....	5
Nociones básicas	6
Consideraciones generales.....	11
Orientaciones para planificar	16
Orientaciones para evaluar los aprendizajes	17
Estructura del programa	19
Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial	21
Propósitos Formativos	21
Enfoque de las asignaturas de Matemática.....	21
Orientaciones para el docente	24
Organización curricular.....	26
Unidad 1: ¿Qué dicen los gráficos? Análisis crítico de la información	31
Actividad 1: Analizar críticamente la información en el contexto de las estadísticas vitales	32
Actividad 2: ¿Cómo representar estadísticamente datos y fenómenos?	44
Actividad 3: Tomar decisiones a partir de diagramas de cajón	56
Actividad 4: ¿Datos dispersos o relacionados?.....	63
Actividad de Evaluación	69
Unidad 2: Comprender la media muestral, las medidas de dispersión y la correlación	77
Actividad 1: Analizar información gráfica en diferentes contextos	78
Actividad 2: La media muestral y la media de la población en diferentes contextos.....	89
Actividad 3: Utilizar la correlación muestral en contextos de ciencias sociales	98
Actividad 4: Aplicar el modelo de correlación lineal en censos de la población	106
Actividad de Evaluación	113
Unidad 3: Modelaje de fenómenos mediante las probabilidades las distribuciones binomial o normal	120
Actividad 1: Experimentos aleatorios con modelos de Bernoulli y Binomial	122
Actividad 2: Comprender el modelo normal de probabilidades.....	135
Actividad 3: Aplicar el modelo normal en el transporte de personas	141
Actividad 4: Aproximar la distribución binomial por la distribución normal	146
Actividad de Evaluación	152
Unidad 4: Hacer inferencia estadística.....	157

Actividad 1: Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza ..	159
Actividad 2: Inferencias en diferentes contextos usando intervalos de confianza.....	165
Actividad 3: Elaborar una hipótesis y comprobar o rechazar en diferentes contextos	169
Actividad 4: Elaborar y comprobar o rechazar una hipótesis	176
Actividad de Evaluación	182
Proyecto Interdisciplinario	186
Bibliografía	194
Anexos.....	197

Presentación

Las Bases Curriculares establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) que definen los desempeños que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura, módulo y nivel de enseñanza. Estos objetivos integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que los jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias y participar de manera activa y responsable en la sociedad.

Las Bases Curriculares son flexibles para adaptarse a las diversas realidades educativas que se derivan de los distintos contextos sociales, económicos, territoriales y religiosos de nuestro país. Estas múltiples realidades dan origen a diferentes aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales, que se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje. En este contexto, las Bases Curriculares constituyen el referente base para los establecimientos que deseen elaborar programas propios, y por lo tanto, no corresponde que estas prescriban didácticas específicas que limiten la diversidad de enfoques educacionales que pueden expresarse en los establecimientos de nuestro país.

Para aquellos establecimientos que no han optado por programas propios, el Ministerio de Educación suministra estos Programas de Estudio con el fin de facilitar una óptima implementación de las Bases Curriculares. Estos programas constituyen un complemento totalmente coherente y alineado con las Bases Curriculares y una herramienta para apoyar a los docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio proponen al profesor una organización de los Objetivos de Aprendizaje con relación al tiempo disponible dentro del año escolar, y constituyen una orientación acerca de cómo secuenciar los objetivos y cómo combinarlos para darles una comprensión profunda y transversal. Se trata de una estimación aproximada y de carácter indicativo que puede ser adaptada por los docentes, de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Asimismo, para facilitar al profesor su quehacer en el aula, se sugiere un conjunto de indicadores de evaluación que dan cuenta de los diversos desempeños de comprensión que demuestran que un alumno ha aprendido en profundidad, transitando desde lo más elemental hasta lo más complejo, y que aluden a los procesos cognitivos de orden superior, las comprensiones profundas o las habilidades que se busca desarrollar transversalmente.

Junto con ello, se proporcionan orientaciones didácticas para cada disciplina y una gama amplia y flexible de actividades de aprendizaje y de evaluación que pueden utilizarse como base para nuevas actividades acordes con las diversas realidades de los establecimientos educacionales. Estas actividades se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión profunda y significativa, lo que implica establecer posibles conexiones al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento, con el propósito de facilitar el aprendizaje.

Estas actividades de aprendizaje y de evaluación se enriquecen con sugerencias al docente, recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para profesores y estudiantes.

En síntesis, se entregan estos Programas de Estudio a los establecimientos educacionales como un apoyo para llevar a cabo su labor de enseñanza.

Nociones básicas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Los Objetivos de Aprendizaje definen para cada asignatura o módulo los aprendizajes terminales esperables para cada semestre o año escolar. Se refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que han sido seleccionados considerando que entreguen a los estudiantes las herramientas necesarias para su desarrollo integral, que les faciliten una comprensión profunda del mundo que habitan, y que despierten en ellos el interés por continuar estudios superiores y desarrollar sus planes de vida y proyectos personales.

En la formulación de los Objetivos de Aprendizaje se relacionan habilidades, conocimientos y actitudes y, por medio de ellos, se pretende plasmar de manera clara y precisa cuáles son los aprendizajes esenciales que el alumno debe lograr. Se conforma así un currículum centrado en el aprendizaje, que declara explícitamente cuál es el foco del quehacer educativo. Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la sala de clases como en la vida cotidiana.

CONOCIMIENTOS

Los conocimientos de las asignaturas y módulos corresponden a conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones que enriquecen la comprensión de los alumnos sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Se busca que sean esenciales, fundamentales para que los estudiantes construyan nuevos aprendizajes y de alto interés para ellos. Se deben desarrollar de manera integrada con las habilidades, porque son una condición para el progreso de estas y para lograr la comprensión profunda.

HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio, ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, identificadas internacionalmente como Habilidades para el siglo XXI.¹

Las habilidades para el siglo XXI presentan como foco formativo central la formación integral de los estudiantes dando continuidad a los objetivos de aprendizaje transversales de 1° básico a 2° medio. Como estos, son transversales a todas las asignaturas, y al ser transferibles a otros contextos, se convierten en un aprendizaje para la vida. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: maneras de pensar, maneras de trabajar, herramientas para trabajar y herramientas para vivir en el mundo.

¹ El conjunto de habilidades seleccionadas para integrar el currículum de 3° y 4° medio corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016).

MANERAS DE PENSAR

Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas que aprenden a ser creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles (Fadel et al, 2016).

Desarrollo del pensamiento crítico

Cuando aprendemos a pensar críticamente, podemos discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, evaluando su contenido, pertinencia, validez y verosimilitud. El pensamiento crítico permite cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios, como asimismo reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, y favorece la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas (Fadel et al, 2016).

Desarrollo de la metacognición

El pensamiento metacognitivo se relaciona al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración.

Desarrollo de Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Pensar con apertura a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- Pensar con conciencia de que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida y enriquecen la experiencia.
- Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

MANERAS DE TRABAJAR

Desarrollo de la comunicación

Aprender a comunicarse ya sea de manera escrita, oral o multimodal, requiere generar estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera clara y efectiva. La comunicación permite desarrollar la empatía, la autoconfianza, la valoración de la interculturalidad, así como la adaptabilidad, la creatividad y el rechazo a la discriminación.

Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se tomarían individualmente, permite analizar la realidad desde más ángulos y producir obras más complejas y más completas. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende; esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración implica, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como la responsabilidad, la perseverancia, la apertura de mente hacia lo distinto, la aceptación y valoración de las diferencias, la autoestima, la tolerancia a la frustración, el liderazgo y la empatía.

Desarrollo de Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Trabajar con autonomía y proactividad en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

Desarrollo de la alfabetización digital

Aprender a utilizar la tecnología como herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece y darle un uso creativo e innovador. La alfabetización digital apunta a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos dan la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para crear contenidos digitales, informarnos y vincularnos con los demás. Promueve la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, la motivación por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, e implica el uso responsable de la tecnología considerando la ciberseguridad y el autocuidado.

Desarrollo del uso de la información

Usar bien la información se refiere a la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, así como la comunicación de la información por medio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC). Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar la información. Tiene siempre en cuenta, además, tanto los aspectos éticos y legales que la regulan como el respeto a los demás y a su privacidad.

Desarrollo de Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

MANERAS DE VIVIR EN EL MUNDO

Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación activa del individuo en su contexto, desde una perspectiva política, social, territorial, global, cultural, económica y medioambiental, entre otras dimensiones. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia y la valoración y el ejercicio de los principios democráticos, y también supone asumir sus responsabilidades como ciudadano local y global. En este sentido, ejercitar el respeto a los demás, a su privacidad y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia; se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

Desarrollo de proyecto de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere conocerse a sí mismo, establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, ser autónomo para ampliar los aprendizajes, reflexionar críticamente y estar dispuesto a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para alcanzar esas metas, se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con capacidad para trabajar en equipo, negociar en busca de soluciones y adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y respeto a las diferencias en ideas y valores.

Desarrollo de la responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal consiste en ser conscientes de nuestras acciones y sus consecuencias, cuidar de nosotros mismos de modo integral y respetar los compromisos que adquirimos con los demás, generando confianza en los otros, comunicándonos de una manera asertiva y empática, que acepte los distintos puntos de vista. Asumir la responsabilidad por el bien común participando activamente en el cumplimiento de las necesidades sociales en distintos ámbitos: cultural, político, medioambiental, entre otros.

Desarrollo de Actitudes

- Perseverar en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por sí mismo y por los demás.
- Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político y medioambiental, entre otros.
- Tomar decisiones democráticas, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- Asumir responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que ellas tienen sobre sí mismo y los otros.

Consideraciones generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio, se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

EL ESTUDIANTE DE 3º y 4º MEDIO

La formación en los niveles de 3° y 4° Medio cumple un rol esencial en su carácter de etapa final del ciclo escolar. Habilita al alumno para conducir su propia vida en forma autónoma, plena, libre y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior, o incorporarse a la vida laboral.

El perfil de egreso que establece la ley en sus objetivos generales apunta a formar ciudadanos críticos, creativos y reflexivos, activamente participativos, solidarios y responsables, con conciencia de sus deberes y derechos, y respeto por la diversidad de ideas, formas de vida e intereses. También propicia que estén conscientes de sus fortalezas y debilidades, que sean capaces de evaluar los méritos relativos de distintos puntos de vista al enfrentarse a nuevos escenarios, y de fundamentar adecuadamente sus decisiones y convicciones, basados en la ética y la integridad. Asimismo, aspira a que sean personas con gran capacidad para trabajar en equipo e interactuar en contextos socioculturalmente heterogéneos, relacionándose positivamente con otros, cooperando y resolviendo adecuadamente los conflictos.

De esta forma, tomarán buenas decisiones y establecerán compromisos en forma responsable y solidaria, tanto de modo individual como colaborativo, integrando nuevas ideas y reconociendo que las diferencias ayudan a concretar grandes proyectos.

Para lograr este desarrollo en los estudiantes, es necesario que los docentes conozcan los diversos talentos, necesidades, intereses y preferencias de sus estudiantes y promuevan intencionadamente la autonomía de los alumnos y la autorregulación necesaria para que las actividades de este Programa sean instancias significativas para sus desafíos, intereses y proyectos personales.

APRENDIZAJE PARA LA COMPRESIÓN

La propuesta metodológica de los Programas de Estudio tiene como propósito el aprendizaje para la comprensión. Entendemos la comprensión como la capacidad de usar el conocimiento de manera flexible, lo que permite a los estudiantes pensar y actuar a partir de lo que saben en distintas situaciones y contextos. La comprensión se puede desarrollar generando oportunidades que permitan al alumno ejercitar habilidades como analizar, explicar, resolver problemas, construir argumentos, justificar, extrapolar, entre otras. La aplicación de estas habilidades y del conocimiento a lo largo del proceso de aprendizaje faculta a los estudiantes a profundizar en el conocimiento, que se torna en evidencia de la comprensión.

La elaboración de los Programas de Estudio se ha realizado en el contexto del paradigma constructivista y bajo el fundamento de dos principios esenciales que regulan y miden la efectividad del aprendizaje: el aprendizaje significativo y el aprendizaje profundo.

¿Qué entendemos por aprendizaje significativo y profundo?

Un aprendizaje se dice significativo cuando los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante. Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos y es producto de una implicación afectiva del estudiante; es decir, él quiere aprender aquello que se le presenta, porque lo considera valioso. Para la construcción de este tipo de aprendizaje, se requiere efectuar acciones de mediación en el aula que permitan activar los conocimientos previos y, a su vez, facilitar que dicho aprendizaje adquiera sentido precisamente en la medida en que se integra con otros previamente adquiridos o se relaciona con alguna cuestión o problema que interesa al estudiante.

Un aprendizaje se dice profundo solo si, por un lado, el aprendiz logra dominar, transformar y utilizar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas reales y, por otro lado, permanece en el tiempo y se puede transferir a distintos contextos de uso. Para mediar el desarrollo de un aprendizaje de este tipo, es necesario generar escenarios flexibles y graduales que permitan al estudiante usar los conocimientos aplicándolos en situaciones diversas.

¿Cómo debe guiar el profesor a sus alumnos para que usen el conocimiento?

El docente debe diseñar actividades de clase desafiantes que induzcan a los estudiantes a aplicar habilidades cognitivas mediante las cuales profundicen en la comprensión de un nuevo conocimiento. Este diseño debe permitir mediar simultáneamente ambos aspectos del aprendizaje, el significativo y el profundo, y asignar al alumno un rol activo dentro del proceso de aprendizaje.

El principio pedagógico constructivista del estudiante activo permite que él desarrolle la capacidad de aprender a aprender. Los alumnos deben llegar a adquirir la autonomía que les permita dirigir sus propios procesos de aprendizaje y convertirse en sus propios mediadores. El concepto clave que surge como herramienta y, a la vez, como propósito de todo proceso de enseñanza-aprendizaje corresponde al pensamiento metacognitivo, entendido como un conjunto de disposiciones mentales de autorregulación que permiten al aprendiz monitorear, planificar y evaluar su propio proceso de aprendizaje.

En esta línea, la formulación de buenas preguntas es una de las herramientas esenciales de mediación para construir un pensamiento profundo.

Cada pregunta hace posible una búsqueda que permite integrar conocimiento y pensamiento; el pensamiento se despliega en sus distintos actos que posibilitan dominar, elaborar y transformar un conocimiento.

ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO Y APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

La integración disciplinaria permite fortalecer conocimientos y habilidades de pensamiento complejo que faculten la comprensión profunda de ellos. Para lograr esto, es necesario que los docentes incorporen en su planificación instancias destinadas a trabajar en conjunto con otras disciplinas. Las Bases Curriculares plantean el Aprendizaje Basado en Proyectos como metodología para favorecer el trabajo colaborativo y el aprendizaje de resolución de problemas.

Un problema real es interdisciplinario. Por este motivo, en los Programas de Estudio de cada asignatura se integra orientaciones concretas y modelos de proyectos, que facilitarán esta tarea a los docentes y que fomentarán el trabajo y la planificación conjunta de algunas actividades entre profesores de diferentes asignaturas.

Se espera que, en las asignaturas electivas de profundización, el docente destine un tiempo para el trabajo en proyectos interdisciplinarios. Para ello, se incluye un modelo de proyecto interdisciplinario por asignatura de profundización.

Existe una serie de elementos esenciales que son requisitos para que el diseño de un proyecto² permita maximizar el aprendizaje y la participación de los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad. Dichos elementos son:

- **Conocimiento clave, comprensión y habilidades**

El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento interdisciplinario, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades del Siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

- **Desafío, problema o pregunta**

El proyecto se basa en un problema significativo para resolver o una pregunta para responder, en el nivel adecuado de desafío para los alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

- **Indagación sostenida**

El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los estudiantes generan preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen preguntas adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

- **Autenticidad**

El proyecto tiene un contexto del mundo real, utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad del mundo real, tiene un impacto real, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de los alumnos.

- **Voz y elección del estudiante**

El proyecto permite a los estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, cómo funcionan y cómo usan su tiempo, guiados por el docente y dependiendo de su edad y experiencia de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

- **Reflexión**

El proyecto brinda oportunidades para que los alumnos reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo, y sobre el diseño y la implementación del proyecto.

- **Crítica y revisión**

El proyecto incluye procesos de retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, con el fin de revisar sus ideas y productos o realizar una investigación adicional.

² Adaptado de John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss. *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*, (ASCD 2015).

- **Producto público**

El proyecto requiere que los alumnos demuestren lo que aprenden, creando un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

CIUDADANÍA DIGITAL

Los avances de la automatización, así como el uso extensivo de las herramientas digitales y de la inteligencia artificial, traerán como consecuencia grandes transformaciones y desafíos en el mundo del trabajo, por lo cual los estudiantes deben contar con herramientas necesarias para enfrentarlos. Los Programas de Estudio promueven que los alumnos empleen tecnologías de información para comunicarse y desarrollar un pensamiento computacional, dando cuenta de sus aprendizajes o de sus creaciones y proyectos, y brindan oportunidades para hacer un uso extensivo de ellas y desarrollar capacidades digitales para que aprendan a desenvolverse de manera responsable, informada, segura, ética, libre y participativa, comprendiendo el impacto de las TIC en la vida personal y el entorno.

CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar (por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de las escuelas y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte –Artística, Humanístico-Científica, Técnico Profesional–, entre otros), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significado para los estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio consideran una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones que pueden modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y A LA INCLUSIÓN

En el trabajo pedagógico, es importante que los docentes tomen en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos para los profesores:

- Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de los alumnos.
- Trabajar para que todos alcancen los Objetivos de Aprendizaje señalados en el currículum, acogiendo la diversidad y la inclusión como una oportunidad para desarrollar más y mejores aprendizajes.
- Favorecer y potenciar la diversidad y la inclusión, utilizando el aprendizaje basado en proyectos.
- En el caso de alumnos con necesidades educativas especiales, tanto el conocimiento de los profesores como el apoyo y las recomendaciones de los especialistas que evalúan a dichos estudiantes contribuirán a que todos desarrollen al máximo sus capacidades.
- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.

- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que los alumnos puedan participar por igual en todas las actividades, evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar materiales, aplicar estrategias didácticas y desarrollar actividades que se adecuen a las singularidades culturales y étnicas de los estudiantes y a sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Atender a la diversidad de estudiantes, con sus capacidades, contextos y conocimientos previos, no implica tener expectativas más bajas para algunos de ellos. Por el contrario, hay que reconocer los requerimientos personales de cada alumno para que todos alcancen los propósitos de aprendizaje pretendidos. En este sentido, conviene que, al diseñar el trabajo de cada unidad, el docente considere los tiempos, recursos y métodos necesarios para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. Mientras más experiencia y conocimientos tengan los profesores sobre su asignatura y las estrategias que promueven un aprendizaje profundo, más herramientas tendrán para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos. Por esta razón, los Programas de Estudio incluyen numerosos Indicadores de Evaluación, observaciones al docente, sugerencias de actividades y de evaluación, entre otros elementos, para apoyar la gestión curricular y pedagógica responsable de todos los estudiantes.

Estructura del programa

Propósito de la unidad

Resume el objetivo formativo de la unidad, actúa como una guía para el conjunto de actividades y evaluaciones que se diseña en cada unidad. Se detalla qué se espera que el estudiante comprenda en la unidad, vinculando los contenidos, las habilidades y las actitudes de forma integrada.

Objetivos de Aprendizaje (OA)

Definen los aprendizajes terminales del año para cada asignatura. En cada unidad se explicita los Objetivos de Aprendizaje a trabajar.

Las actividades de aprendizaje

El diseño de estas actividades se caracteriza fundamentalmente por caracterizar fundamentalmente por movilizar conocimientos, habilidades y actitudes de manera integrada, que permitan el desarrollo de una comprensión significativa y profunda de los Objetivos de Aprendizaje. Son una guía para que el profesor o la profesora diseñen sus propias actividades de evaluación.

Programa de Estudio Unidad 1

UNIDAD 1 ¿QUÉ DICEN LOS GRÁFICOS? ANÁLISIS CRÍTICO DE LA INFORMACIÓN

PROPÓSITO DE LA UNIDAD

En esta unidad se espera que los estudiantes resuelven problemas que involucran elegir la representación gráfica más adecuada para describir tendencias de datos recopilados. Se espera que interpreten y analicen diferentes maneras de representar información de forma manual y mediante el uso de herramientas digitales y que a partir del análisis crítico de la información que toman decisiones y los argumentos. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿De qué manera la elección de un tipo de gráfico está determinada por el fenómeno o los datos que se necesita representar? ¿Y por qué la toma de decisiones depende del tipo de gráfico utilizado?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

CONOCIMIENTO Y COMPRENSIÓN

OA1 Argumentar y tomar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de caja y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA2 Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA3 Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA4 Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Programa de Estudio Unidad 1

ACTIVIDAD 1: Modelar cambios con funciones en Chile través de una encuesta

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD

En esta actividad los estudiantes comprenderán que para estudiar un cierto fenómeno es necesario recopilar, representar, interpretar y comunicar gráficamente la información. Los datos estadísticos que se utilizan son tomados de la situación y contextualizados con una amplia capacidad de hacer inferencias y tomar decisiones pertinentes en el caso de situaciones problemáticas. Para esto, los estudiantes trabajarán de forma colaborativa y reflexionarán por las probabilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo individual y para el desarrollo del individuo.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

OA1 Argumentar y tomar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de caja y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA2 Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA3 Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA4 Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

La esperanza de vida al nacer representa el número medio de años que los niños por venir a los sobrevivientes de una cierta edad. En una estimación del promedio de años que vive la gran mayoría de personas nacidas en un mismo año, si las estadísticas de mortalidad de un país se va para evaluado se muestran en variables. La siguiente tabla, elaborada por el Instituto Nacional de Estadística (INEC), muestra los esperanzas de vida de Chile desde 1990 hasta la estimación para 2023.

Indicadores de evaluación

Detallan uno o más desempeños observables, medibles, específicos de los estudiantes que permiten evaluar el conjunto de Objetivos de Aprendizaje de la unidad. Son de carácter sugerido, por lo que el docente puede modificarlos o complementarlos.

Orientaciones para el docente

Son sugerencias respecto de cómo desarrollar mejor una actividad. Generalmente indican fuentes de recursos que se puede adquirir (vínculos web), material de consulta y lecturas para el docente, y estrategias para tratar conceptos, habilidades y actitudes.

Recursos

Se especifica todos los recursos necesarios para desarrollar la actividad. En especial, es relevante incorporar recursos virtuales y de uso de TIC, dado el enfoque de aprendizaje para la comprensión profunda y el de las Habilidades para el Siglo XXI.

Actividades de evaluación sumativa de la unidad

Son propuestas de evaluaciones de cierre de unidad, que contemplan los aprendizajes desarrollados a lo largo de ellas. Mantienen una estructura similar a las actividades de aprendizaje.

Programa de Estudio Unidad 1

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	INDICADORES DE EVALUACIÓN
OA2 Reflexionar sobre el efecto estético de las obras leídas, evaluando: <ul style="list-style-type: none">• Cómo la obra dialoga con los experiencias personales del lector y sus puntos de vista sobre diversas problemáticas del ser humano (afectos, valores éticos, conflictos, etc.).• Cómo los recursos y técnicas literarias de la obra inciden en el efecto estético producido.	<ul style="list-style-type: none">• Relacionan las obras leídas y su experiencia personal.• Describen el efecto estético producido con el uso de determinados recursos en la obra literaria.• Explican su experiencia de lectura y parte del efecto estético que les produce la obra y la conexión de esta con su mundo personal como lector.
OA6 Producir textos (orales, escritos o audiovisuales) coherentes y cohesionados, para comunicar sus análisis e interpretaciones de textos, desarrollar posturas sobre temas, explorar creativamente con el lenguaje, entre otros propósitos: <ul style="list-style-type: none">• Aplicando un proceso de escritura* según sus propósitos, el género discursivo seleccionado, el tema y la audiencia.• Adecuando el texto a las convenciones del género y a las características de la audiencia (socio-culturales, intereses, convenciones culturales). *El proceso de escritura incluye las etapas de planificación, elaboración, edición y revisión.	<ul style="list-style-type: none">• Desarrollan una postura, interpretación o análisis fundamentado a partir de conexiones con otras lecturas, discusiones en clases, experiencias personales, etc.• Construyen texto que ajustan en distintos momentos del proceso, a partir de su propósito comunicativo y de la comunicabilidad del texto.• Aplican estrategias al desarrollar el proceso de escritura en función de su propósito comunicativo y del manejo por comunicar.• Organizan sus ideas e información por medio de distintos recursos, según las propiedades de escritura y el género discursivo.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

ESCRITURA DE UN COMENTARIO LITERARIO

Los estudiantes leen un fragmento de un texto literario, puede ser un cuento, un poema o un fragmento de novela. Realizan el análisis, identificando uno o efecto estético de los recursos empleados por el autor, para luego elaborar una interpretación. La interpretación se fundamenta en el análisis realizado.

Es importante, para realizar el comentario, tener presente una estructura sugerida a la que se ha utilizado durante la unidad en las diversas actividades, así como la presentada para trabajar la lectura complementaria en clases. Primero localizar el texto, luego, analizar los recursos lingüísticos o literarios empleados por el autor, y proponer para ello una interpretación.

SECUENCIA

Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Propósitos Formativos

Esta asignatura trata del razonamiento y la toma de decisiones en condiciones de incerteza. Ofrece oportunidades de aprendizaje para integrar las probabilidades y la estadística como una herramienta para: analizar diversas situaciones o fenómenos sociales y científicos; extraer conclusiones; tomar decisiones con base en datos cuantitativos; comunicar y argumentar resultados, y validar conclusiones o hallazgos acerca de muestras y poblaciones. En este escenario, las tecnologías digitales permiten visualizar conceptos y situaciones, plantear conjeturas y validarlas, y experimentar o proponer soluciones.

En la asignatura, los estudiantes podrán desarrollar habilidades tecnológicas, como el uso pertinente de herramientas digitales (software, aplicaciones, graficadores y simuladores, entre otras), y aquellas que permiten buscar, seleccionar, contrastar o validar información confiable en un ambiente digital; asimismo, podrán trabajar colaborativamente en línea a través de entornos virtuales y redes sociales, y evaluar el impacto de la información digital en contextos sociales, económicos y culturales. También se espera que aborden problemas propios de la disciplina, generen propuestas relacionadas con el entorno y se familiaricen con las herramientas digitales especialmente diseñadas para la estadística y las probabilidades.

La asignatura se inicia con procedimientos de la estadística descriptiva, y se enfatiza en la interpretación de diversas representaciones de conjuntos de datos y el uso de estadígrafos para comparar las características de muestras y poblaciones. Transita luego desde situaciones modeladas mediante variables aleatorias discretas, hacia las que requieren variables aleatorias continuas. Se amplía y profundiza el tratamiento de las distribuciones binomial y normal, al usar distribuciones como modelos de situaciones o fenómenos del contexto cotidiano, científico y social. Como cierre, se incorpora los métodos de la estadística inferencial, el uso de intervalos de confianza y la prueba de hipótesis.

Enfoque de las asignaturas de Matemática

La asignatura pone énfasis en la relación entre el conocimiento matemático, el aprendizaje de la matemática y sus aportes a la formación de las personas. Resolver problemas, aplicar razonamiento matemático y estadístico, modelar, representar, argumentar y comunicar siguen siendo aspectos centrales para la formación y el hacer de Matemática en la escuela.

A continuación, se presenta las principales definiciones conceptuales y didácticas en que se sustentan tanto la asignatura del Plan Común de Formación General, Matemática, como las asignaturas de profundización del Plan Diferenciado Humanístico-Científico.

Proceso de aprendizaje

El conocimiento matemático y el aumento de la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. Debido a ello, el entorno social valora ese conocimiento y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Al aprender matemática, las personas pueden percibirse como seres autónomos y valiosos en la sociedad; la calidad, pertinencia y amplitud de dicho conocimiento incide en sus posibilidades y su calidad de vida y en el potencial desarrollo del país.

Aprender matemática es, primordialmente, participar en la actividad matemática; es decir: que los estudiantes puedan plantearse ante problemas y traten de resolverlos por sí mismos. Dicho aprendizaje es progresivo, relacionado y enfrenta un aumento creciente de complejidad conceptual y procedimental; por ende, no consiste solo en memorizar definiciones y algoritmos. En 3° y 4° medio, esto exige aplicar simultáneamente conocimientos y procedimientos propios de aritmética, álgebra, geometría, estadística o probabilidades, para resolver un problema o modelar un fenómeno de la disciplina, de otra área del conocimiento o de la vida cotidiana.

Desarrollo del pensamiento racional

Entendida como construcción cultural, la matemática tiene importantes consecuencias en el aprendizaje y la educación en general, que se originan en sus aportes indiscutibles al desarrollo del pensamiento, y en las estrategias y razonamientos que ofrece para actuar en el entorno científico, social y natural. La racionalidad de esta disciplina es inseparable de toda actividad que se relaciona con ella, trátase de la formulación de conjeturas, procedimientos, argumentos, de alguna de las diversas formas de verificación de la validez de estos, o bien del modelamiento matemático de situaciones y de la construcción del lenguaje disciplinar. Por su parte, la estadística provee maneras de pensar y de trabajar para tomar decisiones apropiadas en condiciones de incerteza, lo que la hace necesaria para enfrentar múltiples situaciones del ámbito laboral, disciplinario y del diario vivir.

Modelamiento matemático

El modelamiento matemático es el proceso que busca integrar la resolución de problemas, la argumentación, el razonamiento matemático y estadístico, la representación y el estudio de fenómenos cotidianos, y problemas propios de la disciplina o de otras áreas del conocimiento y la cultura. El escenario natural para desarrollar el modelamiento matemático es uno de colaboración entre los estudiantes, pues juntos tienen mayores posibilidades de asir la complejidad de algunas situaciones que interesa considerar. De esta manera, la discusión y de la reflexión colectiva ayudan a construir conocimiento; cada cual puede enriquecerse con las opiniones de sus pares, aprender a argumentar, a convencer con argumentos fundados y a validar los avances. Todo ello incide en el aprendizaje de diversas disciplinas, y también en el desarrollo de virtudes ciudadanas.

Problemas rutinarios y no rutinarios

Aprender matemática implica aplicar conocimientos y procedimientos, y elaborar estrategias para abordar los problemas propios de la disciplina o de la vida cotidiana. En ese sentido, se busca profundizar en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios como una oportunidad de aprendizaje clave en esta disciplina. Se propone avanzar en el tipo de situaciones en las cuales los estudiantes resuelven problemas, formulan posibles explicaciones o conjeturas, y en la habilidad de argumentar. Un aprendizaje central de la matemática consiste en justificar en términos disciplinares; por ende, se espera que –en esta etapa de su vida escolar– los alumnos experimenten cómo formular conjeturas y justificarlas o refutarlas.

Metacognición

La metacognición juega un rol importante dentro de la matemática. La disciplina se aprende “haciendo matemática”, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento construido y sistematizado anteriormente. Por ello, están imbricadas en toda tarea matemática las habilidades de razonar, representar, modelar matemáticamente, argumentar y comunicar, y resolver problemas. Además, su desarrollo permite alcanzar niveles de abstracción y demostración cada vez más complejos y que suelen requerir de una aplicación rigurosa del lenguaje matemático. El caso de la estadística es muy similar, pero agrega una componente relativa a los datos con los cuales se trabaja, los que son siempre contextualizados.

Aprendizaje Basado en Proyectos y Resolución de Problemas

Toda asignatura ofrece oportunidades para que los estudiantes aborden problemas vinculados a su vida cotidiana. El Aprendizaje Basado en Proyectos promueve que se organicen durante un periodo extendido de tiempo en torno a un objetivo basado en una pregunta compleja, problema, desafío o necesidad –normalmente surgida desde sus propias inquietudes– que pueden abordar desde diferentes perspectivas y áreas del conocimiento, fomentando la interdisciplinariedad. El proyecto culmina con la elaboración de un producto o con la presentación pública de los resultados. En el Aprendizaje Basado en Problemas, en cambio, se parte de la base de preguntas, problemas y necesidades cotidianas sobre los cuales los estudiantes investigan y proponen soluciones.

En el caso de Matemática, estas metodologías permiten promover situaciones de aprendizaje desafiantes, pues para desarrollarlos es necesario que se resuelva –de manera colaborativa e incorporando las tecnologías digitales– problemas reales que exigen habilidades, conocimientos y actitudes en sus distintas etapas de diseño, ejecución y comunicación.

Ciudadanía digital

Las habilidades de alfabetización digital y uso de tecnologías que promueven las Bases Curriculares de 3° y 4° medio –como parte de las Habilidades para el siglo XXI– son fundamentales para que los alumnos trabajen en instancias de colaboración, comunicación, creación e innovación, mediante el uso de las

TIC. También contribuyen a desarrollar la capacidad de utilizarlas con criterio, prudencia y responsabilidad.

Esta asignatura fomenta que los estudiantes usen las tecnologías digitales –por medio de software y aplicaciones digitales– para alcanzar diferentes niveles de comprensión y aplicación de los conocimientos y procedimientos, al modelar y resolver problemas propios de la disciplina o relacionados con otras asignaturas, o bien de la vida cotidiana. Los software y las aplicaciones digitales especialmente diseñados para aprender Matemática –como procesadores simbólicos o de geometría dinámica, simuladores, *apps*, o aquellos especialmente diseñados para el análisis estadístico, algebraico o geométrico (de los cuales hay versiones de uso libre y gratuito)– facilitan el análisis y la visualización de los conceptos o procedimientos en estudio, agilizan el testeo de conjeturas por la vía de comprobar una gran cantidad de casos particulares, y permiten desplazar la atención desde las rutinas de cálculo hacia la comprensión y resolución de un problema que se quiere modelar y resolver.

Orientaciones para el docente

Orientaciones didácticas

El currículum ha confiado la enseñanza de la Estadística a los profesores de las asignaturas de Matemática. Ahora bien, las relaciones entre la Estadística y la Matemática en cuanto disciplinas científicas es materia de debate; además, la relación entre Estadística y la Teoría de Probabilidades es un rico campo de estudio.

A raíz de su formación general, al docente de Matemática le es fácil acceder a los cálculos estadísticos. Sin embargo, no basta favorecer sin más el aprendizaje de esos cálculos y la destreza para aplicarlos; también hay que focalizarse debidamente en la parte conceptual y en los propósitos que se tiene al hacerlos. La Estadística se ocupa de obtener información a partir de datos y de tomar decisiones en situaciones de incerteza; por ende, cabe destacar que sus cálculos son instrumentales para alcanzar esos fines.

Toda asignatura de Matemática tiene como un propósito general el desarrollo del pensamiento matemático, concebido con suficiente amplitud en el currículo como para contener al pensamiento estadístico. Este último involucra comprender por qué y cómo se hace el trabajo estadístico, a partir de ideas fundamentales como el contexto de los datos, la variabilidad, la incertidumbre y la inferencia informal. Ello permite comprender, analizar y actuar en forma crítica, en un escenario de incertezas que depende cada vez más del acceso a los datos y las tecnologías digitales.

Por consiguiente, se espera que el profesor abra espacios para que los estudiantes desarrollen el sentido del dato, describan cuantitativamente la respuesta a un fenómeno real, controlando y reduciendo su variación, y utilicen y expliquen diversas representaciones de datos y modelos para entender cómo se comportan los datos: de ese modo, podrán fortalecer el uso de estrategias para investigar, inferir y controlar razonablemente la variación, y tomar decisiones mejores y fundadas. Se pretende que los jóvenes aborden un problema en contexto, planifiquen cómo hacerlo, recolecten y “limpien” los datos, analicen e interpreten su comportamiento, y concluyan con una respuesta al problema inicial, basada en la evidencia provista por los datos y en reconocer ciertos niveles de certeza. En la actualidad, cuando se debe manejar grandes volúmenes de datos, el ciclo no comienza con un

problema, sino con los datos mismos, y las preguntas se plantean a partir del comportamiento observado de tales datos. Lo anterior exige plataformas guiadas por inteligencia artificial que, a su vez, involucran aprendizaje de máquinas (*machine learning*). Hay que tener presente este escenario, pues cambiará el empleo de manera substantiva.

Orientaciones para la evaluación

En las actividades de evaluación que se sugiere, se ha procurado reconocer las instancias individuales y las colaborativas.

Las evaluaciones forman parte del proceso de aprendizaje, lo orientan y lo apoyan; no son medidas para determinar capacidades, pero permiten obtener información sobre los progresos, la comprensión y el aprendizaje de los contenidos y las habilidades. Es importante que la evaluación se realice como un continuo dentro de las actividades en la sala de clases. Hay varias alternativas disponibles:

- **Proyectos** (de grupos o individuales): De duración variable, sirven para resolver problemas complejos, efectuar una investigación guiada o modelar un problema real. Requieren de objetivos claros, acordados previamente, y de resultados abiertos. Es la forma ideal para conectar diferentes áreas del conocimiento.
- **Diario de vida matemático**: Cuaderno o carpeta en que el estudiante desarrolla estrategias personales, exploraciones, definiciones propias o descubrimientos. El profesor puede orientar su elaboración y verificar si comprenden los conceptos que usan.
- **Portafolio**: Selección periódica de evidencias (problemas resueltos, trabajos, apuntes, en un dossier o una carpeta) recogidas en un período determinado, y que responde a uno o más Objetivos de Aprendizaje. Permiten demostrar aprendizaje y deben incluir justificación y reflexión. El estudiante tiene un rol activo en su evaluación.
- **Presentación matemática** de la resolución de un problema: Indica el proceso y los procedimientos usados. Para evaluar, se aplica criterios o indicadores como dominio del tema, uso de materiales de apoyo, uso del lenguaje. Los estudiantes deben conocer tales criterios y, eventualmente, el docente puede acordarlos con ellos.
- **Entrevista individual**: Mientras el curso trabaja en una tarea, el profesor dialoga con uno o más estudiantes de un mismo nivel de desempeño acerca de un concepto, un desafío o una pregunta relacionada con el tema abordado en la clase.
- **Actividad autoevaluable**: Al finalizar un tema o unidad, el profesor da a sus estudiantes la oportunidad de trabajar con un material que les permita autocorregirse (por ejemplo: hoja de actividades con las respuestas al reverso). A partir de los resultados, pueden verificar su avance o aquello que deben reforzar, corregir su tarea con ayuda de compañeros, completar su trabajo con recursos que estén a su alcance –como cuaderno, libros, diccionarios–, anotar sus dudas y, en última instancia, pedir ayuda al docente.

Orientaciones para contextualización

La asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial busca ofrecer a los alumnos oportunidades de aprendizaje contextualizadas tanto en la matemática misma como en diferentes ámbitos significativos, interdisciplinarios o de profundización matemática. De este modo, podrán sistematizar y aplicar los conocimientos y procedimientos aprendidos, y también idear y poner en práctica sus propias maneras de abordar aquellos fenómenos y problemas.

Organización curricular

Las Bases Curriculares de las asignaturas de profundización de Matemática presentan Objetivos de Aprendizaje de dos naturalezas: unos de habilidades³, comunes a todas las asignaturas científicas del nivel, y otros enfocados en el conocimiento y la comprensión. Ambos tipos de objetivo se entrelazan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, junto con las actitudes propuestas desde el marco de Habilidades para el siglo XXI.

Objetivos de Habilidades para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Habilidades

Resolver problemas

- a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
- b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

Argumentar y Comunicar

- c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
- d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Modelar

- e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
- f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

³ No es necesario seguir un orden lineal al enseñar el proceso de investigación; se puede trabajar cada uno de los Objetivos de Aprendizaje en forma independiente.

Representar

- g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
- h. Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema a solucionar.

Habilidades digitales

- i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.
- j. Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.
- k. Analizar y evaluar el impacto de las tecnologías digitales en contextos sociales, económicos y culturales.
- l. Conocer tanto los derechos propios como los de los otros, y aplicar estrategias de protección de la información en ambientes digitales.

Objetivos de Aprendizaje para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Conocimiento y comprensión

1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.
2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.
3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.
4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

Visión global del año

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
¿Qué dicen los gráficos? Análisis crítico de la información	Media muestral, dispersión y correlación	Situaciones o fenómenos que se modelan por medio de las distribuciones binomial y normal	Inferencia estadística
<p>Objetivos de Aprendizaje</p> <p>OA 1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.</p> <p>OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información</p>	<p>Objetivos de Aprendizaje</p> <p>OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.</p> <p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa</p>	<p>Objetivos de Aprendizaje</p> <p>OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.</p> <p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.</p>	<p>Objetivos de Aprendizaje</p> <p>OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.</p> <p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje</p>

<p>matemática/cuantitativa va confiable a través de la web.</p> <p>Actitudes</p>	<p>va confiable a través de la web.</p> <p>Actitudes</p>	<p>Actitudes</p>	<p>simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.</p> <p>Actitudes</p>
<p>Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.</p>	<p>Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.</p> <p>Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.</p>	<p>Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.</p> <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p>	<p>Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.</p> <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p>
<p>Tiempo estimado: 10 semanas</p>	<p>Tiempo estimado: 9 semanas</p>	<p>Tiempo estimado: 10 semanas</p>	<p>Tiempo estimado: 9 semanas</p>

Unidad 4

Unidad 4: Hacer inferencia estadística

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden cómo se puede inferir información desde una muestra cuando la población está “distribuida normalmente”. Por ejemplo: cómo construir un intervalo de confianza para que la media poblacional se encuentre dentro de dicho intervalo con un cierto nivel de precisión previamente dado. O bien, plantear pruebas de hipótesis para aprobar o rechazar una predicción en torno a parámetros específicos de la población. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿En qué condiciones estadísticas es confiable la información? ¿Cuáles son las condiciones de significatividad que afectan la toma de decisiones?

Objetivos de Aprendizaje

OA 4.

Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actividad 1: Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan en términos generales el uso de la estadística inferencial y cómo estimar parámetros de una población a partir de estadísticos de muestras de esa población. Con ello, pueden estimar, por ejemplo, la media de una población, con intervalos de confianza de mayor o menor precisión entregando un nivel de confianza según lo requerido o lo deseado.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

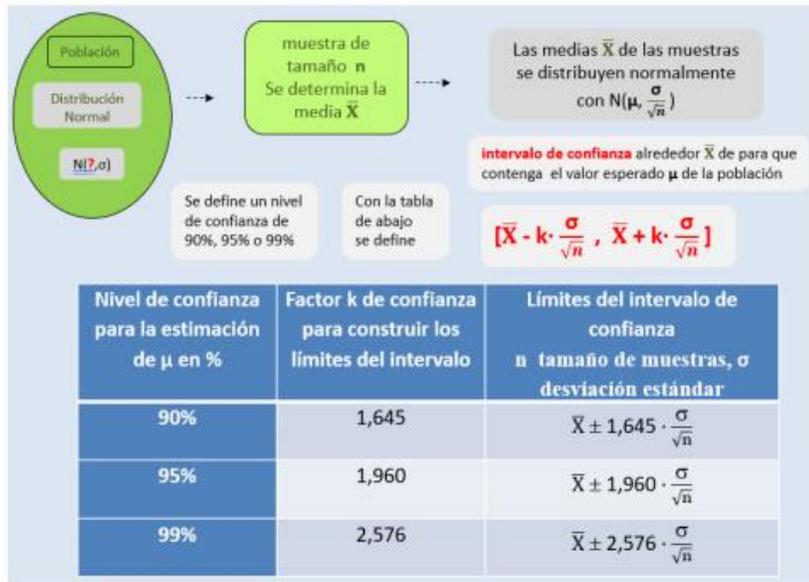
Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

Se sugiere un trabajo colaborativo para las siguientes actividades.

INTRODUCIR EL CONCEPTO DE UN INTERVALO DE CONFIANZA

1. Observen el siguiente esquema, que presenta en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial a partir de muestras de una población determinada.



2. El nivel de confianza se puede expresar también como $1 - \alpha$, donde $\alpha = 0,1$ o bien $\alpha = 0,05$ o bien $\alpha = 0,01$. Además, el factor k corresponde al puntaje según una normal estándar $Z\alpha/2$.
Por ejemplo: si $\alpha = 0,05$, se tiene que $\alpha/2 = 0,025$ y el puntaje $Z\alpha/2$ [según una tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo)] es $-1,96$, que corresponde al valor más cercano de $0,025$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475

3. Del mismo modo que para el nivel de confianza de 0,95, comprueben en la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo), los puntajes $Z\alpha/2$ para los niveles de confianza de 0,90 y 0,99.
- a. A partir de lo anterior, completen la tabla:

$1 - \alpha$	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$	Intervalo de confianza
0,90	0,05		
0,95	0,025	1,960	$\left[\bar{X} - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,005		

- b. Compartan ideas acerca de los parámetros de la población y los estadísticos de las muestras. ¿Sobre qué se quiere inferir o estimar algún valor y cómo? Argumenten.
- c. Si una población se distribuye normalmente $N(\mu, \sigma)$, ¿cómo se distribuyen las medias de las muestras de tamaño "n" extraídas de dicha población?
- d. En sus propias palabras, ¿qué es un intervalo de confianza para la media "desconocida" de una población de la cual sí se conoce su desviación estándar? Expliquen.
- e. ¿En qué influye el nivel de confianza a la hora de fijar un intervalo para la media de la población? Argumenten.

- f. ¿Cómo se puede interpretar la expresión $Z\alpha/2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y cómo influye en ella el tamaño “n” de la muestra? Argumenten.

UN EJEMPLO

Después de una década sin recopilar datos, se quiere determinar aproximadamente el valor esperado μ de la estatura entre las mujeres de una población. Se saca una muestra de 100 mujeres, con una estatura media de $\bar{X} = 154\text{cm}$. Se conoce la desviación estándar de esa medición: $\sigma = 6\text{cm}$ y se estima que no ha cambiado.

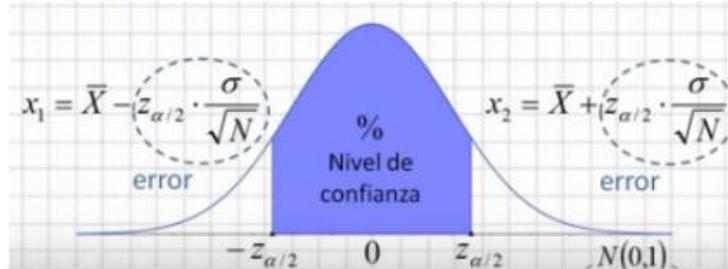
- A partir de la muestra poblacional, describan el procedimiento que determina un intervalo de confianza para estimar el valor esperado poblacional μ .
- Determinen el intervalo de confianza alrededor de la media muestral \bar{X} con un nivel de 95% de confianza, que contenga el valor esperado μ de la población.
- Si la media muestral $\bar{X} = 154\text{ cm}$ hubiera resultado de una muestra de 400 mujeres, ¿qué influencia tendría en el intervalo de confianza? Argumenten.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere comenzar esta unidad con un diagnóstico y repaso de los temas vistos antes y, además, incentivar la noción de confianza. Para ello, los jóvenes los estudiantes elaboran esquemas sobre la ubicación que le darían a las personas que les merecen mayor y menor confianza. Como el tema es muy personal, conviene que los trabajos sean anónimos. Lo ideal es poner al sujeto en el medio, a su alrededor a las personas con mayor grado de confianza y más lejos a medida que va disminuyendo esa confianza. Aunque no es una analogía para el intervalo de confianza, les permitirá acercarse al concepto y comparar con las características específicas para calcular intervalos de confianza.
- Cabe explicarles que, en la estadística descriptiva, se puede describir poblaciones con variables aleatorias; según el contexto, se elige mayoritariamente una variable aleatoria binomial o una variable aleatoria normal. Al conocer los parámetros poblacionales como “n” y “p” en el caso de la binomial, y “ μ ” y “ σ ” en el caso de la normal, se puede determinar probabilidades referidas a muestras de dichas poblaciones.
- Por su parte, la estadística inferencial aplica la siguiente propiedad de cada variable aleatoria normal: Se considera todas las medias \bar{X} de muestras del mismo tamaño “n” de una población normalmente distribuida con media “ μ ” y desviación estándar “ σ ”. Se puede constatar que la distribución de las medias muestrales \bar{X} sigue una variable aleatoria normal con el valor esperado “ μ ” de la población, pero con una desviación reducida “ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ” que depende del tamaño “n” de las muestras.
- En la práctica se toma una muestra del tamaño “n” de la población, se determina la media \bar{X} de la muestra y se construye un “intervalo de confianza” alrededor de la media muestral \bar{X} ; así se tiene “confianza” en que el valor esperado “ μ ” de la población se encuentre dentro de este

intervalo. Finalmente, con un nivel de confianza deseado, se determina el largo del intervalo utilizando la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo).

- Se recomienda discutir con ellos acerca del error (E) asociado a la estimación de la media mediante intervalos de confianza. Si se considera un nivel de confianza $1 - \alpha$, en términos de probabilidad se tiene que $P(\bar{X} - E \leq \mu \leq \bar{X} + E) = 1 - \alpha$, donde el error queda expresado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Esto se puede apreciar en el siguiente esquema:



- Por ende, una expresión para determinar el tamaño "n" de las muestras acorde al error que se quiere cometer es $E = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$.
- Dado que uno de los objetivos de la unidad 4 es OA 4 –Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis–, se sugiere compartir con los jóvenes la siguiente propuesta de rúbrica para que evalúen el proceso argumentativo de forma general:

Criterios	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Caracterizan los datos entregados según la variable del problema.	Identifican la cantidad de datos de la muestra y el problema con una distribución normal.	Identifican la cantidad de datos de la muestra.	Mencionan una cantidad que se relaciona con otro problema.
	Identifican el promedio y la desviación estándar en el problema.	Identifican el promedio o la desviación estándar en el problema.	Escriben información numérica.
Establecen la hipótesis o conjetura que defenderán con argumentos, buscando datos en la información entregada u otras fuentes.	Elaboran una hipótesis, basándose en los datos del problema o de otras fuentes relacionadas.	Elaboran una hipótesis, basándose parcialmente en los datos del problema.	Escriben una frase.

Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis para apoyar la argumentación.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis apoyando la argumentación asociada al problema.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis.	Realizan cálculos.
Relacionan los resultados para defender las posturas o hipótesis iniciales.	Relacionan los resultados mediante un hilo conductor, para concluir la postura o hipótesis.	Utilizan los resultados para concluir la postura o hipótesis.	Presentan los resultados.
Comparan resultados para cambiar de posición si es necesario.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis y la cambian o reafirman, según corresponda.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis.	Presentan una hipótesis asociada a otros resultados.

8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

- Identifican los elementos principales en una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.
- Resuelven problemas en los que deben hacer una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Sitio de Economía y Finanzas que relaciona estas ciencias con la estadística. Universidad Complutense de Madrid.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://economipedia.com/definiciones/intervalo-de-confianza.html>
- Documento con la teoría de probabilidades y estadística. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.dm.uba.ar/materias/probabilidades_estadistica_C/2011/1/PyEC142011.pdf
- Curso de Inferencia de una población más bibliografía. Documento del Departamento de Estadística de la Universidad Carlos III, Madrid.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/aaribas/eng/docs/estII/tema1esp.pdf>
- Intervalos de confianza y otros temas de la inferencia estadística en la página de Minitab, software estadístico con una prueba gratis para su uso.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/what-is-a-confidence-interval/>

Actividad 2: Inferencias en diferentes contextos usando intervalos de confianza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes puedan obtener intervalos de confianza para realizar inferencias sobre la media de una población en diferentes contextos. Para ello, deben identificar –a partir de la información entregada– los elementos que permiten establecer un intervalo para la media de la población, según el nivel de confianza requerido.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

ALIMENTACIÓN SALUDABLE

1. Para una campaña de alimentación saludable, diferentes casinos distribuyen su plato de hamburguesa de garbanzos, lenteja y quinoa: si su masa es menor que 500 gr, será gratis para los clientes; estos están informados de la promoción. Pero los casinos se quieren asegurar de que ese plato no pese menos de 500 gr para no entregar comida gratis; para ello, quieren tener una confianza alta. Con el dato histórico de las muestras, se requiere predecir qué pasará con un alto grado de confianza. Asumiendo una distribución normal de las masas, la información histórica es la siguiente:
 - Media muestral de las masas (\bar{X}): 610 kg
 - Desviación estándar poblacional (σ): 12
 - Cantidad de datos de la muestra (n): 36
 - Nivel de confianza: 95%
 - a. Encuentra el intervalo para la masa poblacional, según el nivel de confianza solicitado.
 - b. Interpreta este intervalo. ¿Se cumple el objetivo estadístico del casino? Argumenta.
 - c. Determina el error para el intervalo de confianza en este caso. ¿Cómo se interpreta dicho error? Argumenta.
2. Para apoyar la alimentación saludable en jardines infantiles fiscalizados por el Estado, se invitó a empresas a una licitación y ganó la que hace compotas de frutas en un máquina. Esta empresa ajusta de tal manera la cantidad despachada, que tiene desviación estándar de 16 ml. Periódicamente se revisa la máquina, tomando una muestra de 45 compotas y calculando el contenido promedio.
 - a. Si la media en la muestra es de 240 ml, ¿cuál es un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95%? Argumenta.
 - b. El intervalo de confianza encontrado, ¿qué nos dice respecto del contenido de las compotas en la máquina? Argumenta.

Conexión Interdisciplinaria
Ciencias para la Ciudadanía
OA e, 3° y 4° medio.

ENDEUDAMIENTO DE LAS PERSONAS

1. Según el Informe de endeudamiento del año 2016 de la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras de Chile (SBIF)¹², el 40% del total de personas endeudadas tiene un ingreso menor a \$500 mil. La carga financiera que las personas destinan a la deuda sobre el total de sus ingresos corresponde al 16,72%. Antofagasta es la región que sobresale, con una deuda representativa de 3,2 millones de pesos y un monto en promedio de 4,2 veces el sueldo. Considera que, en esa región, el ingreso mensual promedio de 100 trabajadores es de \$420 000, con una desviación estándar poblacional conocida de \$75 000, y que los datos se ajustan a una distribución normal.
 - a. Determina un intervalo para la media poblacional del ingreso de trabajadores con un nivel de confianza del 90%.

¹² https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sbif.cl/sbifweb3/internet/archivos/DISCURSOS_11422.pdf

- b. Determina el error para el intervalo de confianza en este caso. ¿Cómo se interpreta dicho error? Argumenta.
- c. Estimando la media poblacional del sueldo de los trabajadores en la región, la carga financiera mensual destinada a la deuda y el nivel de endeudamiento discute con tu compañero sobre por qué Antofagasta destaca por su endeudamiento.

PROTECCIÓN DE ESPECIES

Un biólogo está preocupado por la extinción del elefante sumatra –protegido en países como Indonesia– debido a la deforestación y la caza incontrolada. Efectuó el siguiente estudio para determinar en qué condiciones podría vivir de acuerdo a su alimentación:

Tomó una muestra aleatoria de 30 días, en los cuales observó cuánta comida diaria ingiere el elefante, y obtuvo en promedio 350 kg, con desviación estándar de 25 kg de lo que comen las especies vivas; los datos están distribuidos normalmente.



El intervalo de confianza resultante fue del 90% en los 30 días de prueba; para la media, fue de entre 342 kg y 358 kg de comida para el elefante.

1. Verifica si el intervalo de confianza obtenido es correcto, según los datos entregados.
2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), según la información entregada? Argumenta tus respuestas.
 - a. En un muestreo repetido, esto produce una media de la muestra entre 342 kg y 358 kg en el 90% de las muestras.
 - b. Los elefantes comieron entre 342 kg y 358 kg el 90% de los días.
 - c. Existe un 0,90 de probabilidad de que, en promedio, coman entre 342 kg y 358 kg.
 - d. Se estima los intervalos de confianza de la media poblacional con varianza desconocida en esta situación.
 - e. La muestra corresponde a 30 elefantes.
 - f. En los 30 días, la media de la cantidad de comida que come el elefante es 350 kg.
 - g. La varianza poblacional de la comida de este tipo de elefante es 625 kg.
 - h. El error que separa al estimado de 350 kg es de aproximadamente 8 unidades, con un 90% de confianza.
 - i. El margen de error es de un 20% para estimar la media poblacional.
 - j. Mientras mayor sea el margen de error, más ancho será el intervalo y menos seguros podremos estar del valor estimado.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere que los estudiantes realicen cada uno de los problemas propuestos, paso a paso, para profundizar los conceptos clave de la estimación de la media mediante intervalos de confianza. En todos los ejercicios, se asume que la población se distribuye normalmente.
2. Deben reforzar que el estimador de la media poblacional μ es la media muestral \bar{X} . La desviación estándar poblacional σ se asume conocida. Para ello se construye un intervalo, según el nivel de confianza $(1 - \alpha)$, identificando el factor de confianza a partir de la puntuación z correspondiente ($z_{\alpha/2}$). El error asociado corresponderá a la expresión $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
3. En las secciones de “Alimentación saludable” y “Endeudamiento de personas”, se recomienda que interpreten el significado de los intervalos de confianza construidos según el contexto, considerando e interpretando también el error asociado según el nivel de confianza requerido. Esta es una instancia para comprender qué significa construir un “intervalo” para la media poblacional, y que puede ser de largo variable según el nivel de confianza, pero también sensible con el tamaño “ n ” de las muestras. Finalmente, todo depende del error (E) con que se quiera trabajar.
4. En la sección de “Protección de especies”, tienen que argumentar adecuadamente las sentencias falsas en la actividad de verdadero y falso. Esto permitirá validar si entienden los conceptos.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Determinan intervalos de confianza, utilizando información contextualizada.
 - Resuelven problemas en los que deben realizar una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.

Actividad 3: Elaborar una hipótesis y comprobar o rechazar en diferentes contextos

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan cómo hacer inferencias; para ello, elaboran pruebas de hipótesis que permitan “aceptar o rechazar” cierta información, considerando cierto nivel de confianza y un error de probabilidad. A diferencia de la estimación de la media poblacional por medio de intervalos de confianza en torno a la media muestral, aquí se establece intervalos de confianza en torno a la media poblacional, para probar si la media muestral está o no contenida en los intervalos de confianza y aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

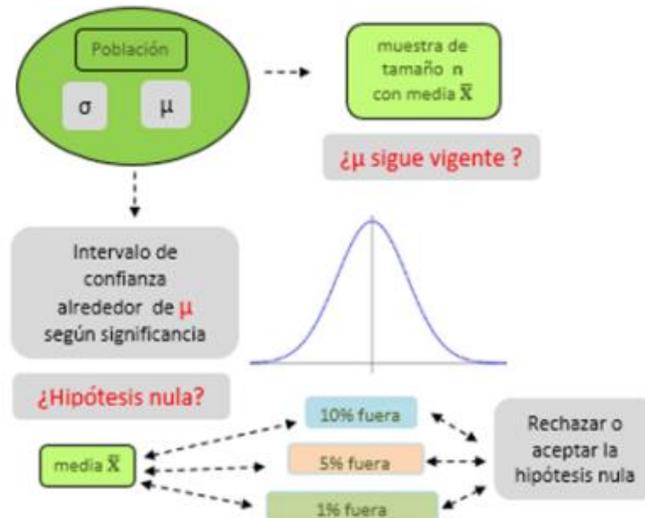
Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

¿QUÉ ENTENDEMOS POR PRUEBAS DE HIPÓTESIS?

1. Observen el siguiente esquema, que muestra en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial, a partir de muestras que se toma de una población determinada y de hacer pruebas de hipótesis.



A diferencia de la estimación por medio de intervalos de confianza para la media poblacional, aquí se utiliza intervalos de confianza en torno a la media muestral, para probar si la media muestral está o no en el intervalo, según cierto nivel de confianza y error de probabilidad.

- a. Acorde con lo anterior, completen la siguiente tabla:

$1 - \alpha$	α	Error de probabilidad	$z_{\alpha/2}$	Intervalo de confianza para \bar{X}
0,90	0,1			
0,95	0,05	5%	1,960	$\left[\mu - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,01			

- b. En sus propias palabras, ¿qué es un intervalo de confianza para la “media muestral” a partir de la media y desviación poblacional, según un nivel de confianza y error de probabilidad? Expliquen.
- c. ¿En qué influye el nivel de confianza y error de probabilidad a la hora de fijar un intervalo para media muestral? Argumenten.

- d. ¿En qué consiste la “hipótesis nula” y cómo se acepta o rechaza? Argumenten.
2. Consideren la siguiente situación: La lluvia caída en una región tenía una media poblacional anual de las últimas décadas de $\mu = 120 \frac{ml}{m^2}$, con una desviación estándar de $\sigma = 15 \frac{ml}{m^2}$. En mediciones anuales recientes de 9 años seguidos, se registra un nuevo promedio de $109 \frac{ml}{m^2}$. Para ver si se podría hablar de un cambio significativo de la lluvia caída a partir de esas mediciones, se hace una prueba de hipótesis.
- Elaboren una prueba de hipótesis con un error de probabilidad de 5%, acerca de un cambio “significativo” de la lluvia caída. Construyan un intervalo de confianza adecuado y establezcan si aceptan o rechazan la hipótesis nula.
 - Contrasten ahora con una prueba de hipótesis con un error de probabilidad de 1% acerca de un cambio “altamente significativo”. Construyan un intervalo de confianza adecuado y establezcan si aceptan o rechazan la hipótesis nula.

PRUEBAS DE HIPÓTESIS EN CONTEXTOS DE LA VIDA DIARIA Y CIENCIAS NATURALES

1. El gráfico muestra el histograma de una distribución binomial aproximada por una campana de Gauss.

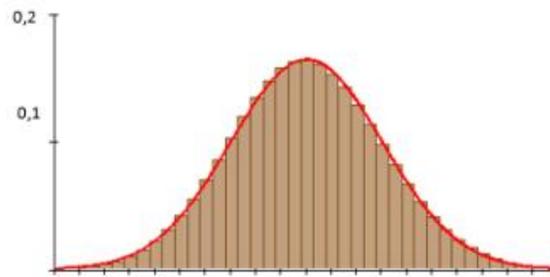
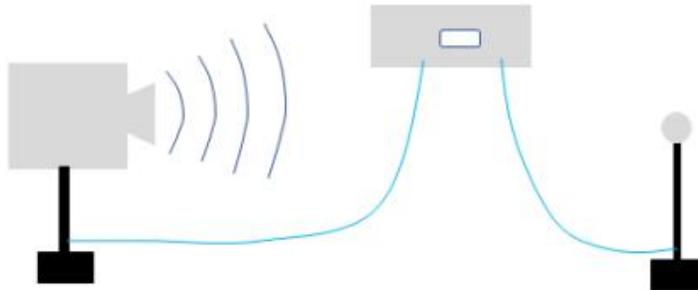


Figura 1

- ¿Por qué se puede aproximar una “situación binomial” por el supuesto de normalidad, en muestras grandes?
- Una prueba de hipótesis bilateral considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,05$ para el rechazo de la hipótesis nula H_0 . En el eje horizontal de imagen, marquen aproximadamente el margen del rechazo de la hipótesis nula.
- Una prueba de hipótesis unilateral izquierda considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,08$ para rechazar la hipótesis nula H_0 . Marquen aproximadamente, en el eje horizontal de la imagen, el margen del rechazo de la hipótesis nula.
- Una prueba de hipótesis unilateral derecha considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,06$ para el rechazo de la hipótesis nula H_0 . Marquen aproximadamente, en el eje horizontal de la imagen, el margen del rechazo de la hipótesis nula.

2. ¿En cuáles de las siguientes situaciones se debe aplicar una prueba de hipótesis bilateral, unilateral izquierda o derecha, respectivamente? Argumenten su respuesta.
 - a. Cada pote de margarina contiene por lo menos 252 g.
 - b. El servicio técnico de computadoras cobra en promedio 2 horas de trabajo.
 - c. En las reservas de vuelos, hay una sobredemanda de 10%.
 - d. El lanzamiento de un dado muestra que es un dado honesto.
 - e. El pronóstico del tiempo ha mejorado.
3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F)? Argumenten sus respuestas.
 - a. Si se asume la hipótesis nula, debería ser verdadera. Si no fuera así, no se podría determinar su intervalo de aceptación.
 - b. La probabilidad de rechazar una hipótesis nula, aunque sea verdadera, se llama probabilidad de error.
 - c. Si aumenta el nivel de significancia (máxima probabilidad de error), aumenta también el intervalo de aceptación de la hipótesis nula.
 - d. La probabilidad del error indica el valor de la probabilidad con la cual se rechaza la hipótesis nula.
 - e. Si se repite dos veces la misma prueba de hipótesis, tal vez se deba decidir de manera diferente.
4. Prueba de hipótesis con variable aleatoria X normalmente distribuida.



En un experimento escolar, el emisor y el receptor del sonido se posicionan a una distancia de $3,40m$ para determinar la velocidad del sonido en el aire. Debido a su naturaleza de propagación, los tiempos t que necesita el sonido para recorrer la distancia deberían tener medidas con el valor esperado de $\mu = 0,0100s$ y una desviación estándar de $\sigma = 0,0010s$. 16 parejas de alumnos registraron sus resultados de las mediciones ya promediados del tiempo t , y los representaron en la siguiente tabla:

grupo	1	2	3	4	5	6	7	8
t en s	0,0094	0,0110	0,0087	0,0092	0,0091	0,0101	0,0081	0,0100

grupo	9	10	11	12	13	14	15	16
t en s	0,0088	0,0093	0,0102	0,0087	0,0091	0,0094	0,0102	0,0085

- Mirando las tablas con los resultados, conjeturen acerca de la tendencia de los tiempos que oscilan alrededor del valor esperado $\mu = 0,0100s$.
 - Elaboren el intervalo de confianza para la hipótesis nula, contrastando el resultado experimental \bar{X} (tiempos medidos) del grupo experimental de los 16 alumnos, con el valor esperado μ , admitiendo un nivel de error de probabilidad de 5%.
 - Determinen la media \bar{X} de las 16 mediciones que resultan del experimento.
 - Según la media \bar{X} calculada, acepten o rechacen la hipótesis nula.
 - Conjeturen acerca de la calidad del reloj digital utilizado en los experimentos.
5. La capacidad de la carga eléctrica de un modelo de batería está etiquetada con $120Ah$. Una empresa automotriz recibe reclamos de clientes que dicen que la carga eléctrica de ese modelo es menor. Se hizo una investigación al interior de la automotriz, testeando al azar $n = 25$ baterías con una media $\bar{X} = 118,8Ah$. La desviación estándar de la capacidad de este modelo es de $\mu = 2,5Ah$.



- Prueben la siguiente hipótesis con un nivel de error de probabilidad de 5%: "El valor esperado μ de la carga eléctrica sigue en $120Ah$ ".
- ¿Por qué las pruebas de hipótesis dan sentido a la elaboración de intervalos de confianza?

PRUEBAS DE HIPÓTESIS EN EL CONTEXTO DE EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DE CIENCIAS SOCIALES

- Se lanza un dado 150 veces, y en 60 lanzamientos resulta un número par. La variable aleatoria binomial X representa la cantidad de resultados del evento "número par".
 - ¿Por qué se puede aproximar la variable X mediante una distribución normal? Argumenten su respuesta.
 - Determinen el valor esperado μ y la desviación estándar σ para un dado perfectamente equilibrado.



- c. Prueben la hipótesis “El dado está perfectamente equilibrado”, con un error de probabilidad de 5%.
2. En la revista científica Lifesciences se publicó un artículo sobre el aumento de la estatura media de mujeres y hombres de diferentes países en el mundo, a lo largo de 100 años. (<https://elifesciences.org/articles/13410>). El cuadro adjunto representa los resultados para las chilenas y los chilenos.



Formen grupos según las siguientes hipótesis.

- I. Se rechaza algunas de las hipótesis con un 5% de error de probabilidad.
 - a. Elaboren una tabla con la estatura de 25 hombres, cuya media \bar{X} rechace la hipótesis de estatura media de hombres de 171cm y diga que la estatura media podría ser mayor. La variable X sigue una distribución normal con una desviación estándar de 8cm.
 - b. Elaboren una tabla con la estatura de 16 mujeres, cuya media \bar{X} rechace la hipótesis de estatura media de 159cm y diga que la estatura media podría ser menor. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 6cm.
- II. Se acepta algunas de las hipótesis con un 5% de error de probabilidad.
 - a. Elaboren una tabla de 16 hombres cuya media \bar{X} acepte la hipótesis de estatura media de hombres de 171cm. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 8cm.
 - b. Elaboren una tabla con la estatura de 25 mujeres, cuya media \bar{X} acepte la hipótesis de estatura media de 159cm. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 6cm.
- III. Se acepta o se rechaza algunas de las hipótesis con un 5% de error de probabilidad.
 - a. Elaboren una tabla con la estatura de 25 hombres, cuya media \bar{X} acepte la hipótesis de estatura media de hombres de 160cm. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 6cm.
 - b. Elaboren una tabla con la estatura de 16 mujeres cuya media \bar{X} rechace la hipótesis de estatura media de 147cm. La variable X sigue una distribución normal con una desviación estándar de 5cm.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Una parte importante de la estadística inferencial se refiere a pruebas de hipótesis mediante las cuales se quiere verificar o rechazar si ha cambiado o no el valor esperado “ μ ” de una población, distribuida con una variable aleatoria normal. Se toma una muestra del tamaño “ n ”, se determina la media muestral \bar{X} y se construye un intervalo de confianza alrededor del valor esperado de la población $[\mu - k \cdot \frac{\sigma}{n}; \mu + k \cdot \frac{\sigma}{n}]$. Si la media muestral \bar{X} está dentro del intervalo de confianza, se acepta la hipótesis nula “no hay cambio”. En el otro caso, se rechaza la hipótesis nula “no hay cambio”.

2. Se sugiere enfatizar con los estudiantes que muchas situaciones estadísticas que involucran una prueba de hipótesis requieren una variable aleatoria binomial; sin embargo, si se considera muestras de tamaño grande, se puede aproximar la variable binomial por una variable normal estandarizada, como se vio en la Unidad 3.
3. Para apoyar la comprensión, es importante que los alumnos sepan representar gráficamente los problemas de una prueba de hipótesis. Se sugiere que ellos mismos elaboren la estrategia de aceptar o rechazar una hipótesis nula.
4. En el segundo punto de la sección “Experimentos Aleatorios y de Ciencias Sociales”, se recomienda representar los resultados de los diferentes grupos, contrastando las diversas estrategias y fomentando la argumentación.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Identifican los elementos principales de una prueba de hipótesis y los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.
 - Resuelven problemas en los que deben plantear una prueba de hipótesis y establecen los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Pruebas de hipótesis
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://frrq.cvg.utn.edu.ar/pluginfile.php/3617/mod_resource/content/0/TRANSPARENCIAS/Prueba_Hipotesis-_PPT-2013.pdf
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.monografias.com/trabajos17/pruebas-de-hipotesis/pruebas-de-hipotesis.shtml>

Actividad 4: Elaborar y comprobar o rechazar una hipótesis

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan algo más sobre pruebas de hipótesis; por ejemplo: en relación con la existencia de errores. En estadística inferencial, se considera principalmente dos tipos de errores: Tipo I, rechazar incorrectamente la hipótesis nula (aunque sea verdadera) y Tipo II, aceptar erróneamente la hipótesis nula (aunque sea falsa). Ambos tienen consecuencias en la vida diaria y en todas las investigaciones científicas. Así, en el ámbito escolar, los jóvenes pueden aproximarse a la manera de trabajar científicamente.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

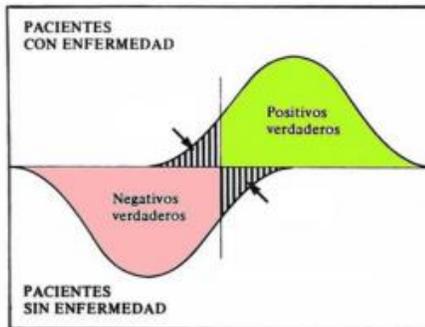
DESARROLLO

DESCUBRIENDO LOS TIPOS DE ERRORES EN ESTADÍSTICA INFERENCIAL

1. Tipo de errores en pruebas de hipótesis relacionados con la hipótesis nula.

Hipótesis nula está	Realidad	Realidad
Rechazada	La hipótesis nula es verdadera	La hipótesis nula es falsa
Aceptada		

- Averigua en qué caso se debe rechazar la hipótesis nula.
 - Llena cada uno de los espacios grises con una de las siguientes afirmaciones: "decisión correcta", "error tipo 1" y "error tipo 2". ¿Qué significa "error tipo 1" y "error tipo 2"?
 - ¿En qué caso, el error corresponde a la probabilidad de error en la hipótesis nula?
2. ¿Falsos positivos? ¿falsos negativos? En el ámbito de la salud, se utiliza los términos "falsos positivos" y "falsos negativos". En un test médico, se asigna el resultado "positivo" a la diagnosis de ser portador de una enfermedad y en el caso contrario, se asigna el resultado "negativo". La imagen muestra los cuatro casos de los resultados posibles.



Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA d, e, 3° y 4° medio

- Rotula las zonas achuradas en negro con uno de los términos "falsos positivos" o "falsos negativos".
- Se considera como hipótesis nula "la persona no tiene la enfermedad". ¿Cuál es la hipótesis alternativa?
- ¿Con qué tipo de error ("tipo 1" o "tipo 2") se puede identificar el resultado "falso positivo"? Argumenta la respuesta.
- Manteniendo la hipótesis nula, el test de diagnóstico conlleva un error del "tipo 2"; ¿con qué resultado ("falso positivo" o "falso negativo") se puede relacionar este error?
- Considerando un test de diagnóstico para detectar si una persona es portadora de un virus altamente contagioso con un cuadro severo de enfermedad, ¿cuál de los errores "tipo 1" o "tipo 2" provocará más consecuencias negativas para la comunidad? Argumenta la respuesta.

- f. Si un test de diagnóstico de ser portador de un virus tiene una precisión de 99,9% de detectar el virus, ¿cuántas de diez mil personas podrían obtener un diagnóstico “falso positivo”?
3. Cómo influye el tamaño n de una muestra de una población normalmente distribuida, en el rechazo o la aceptación de la hipótesis nula.

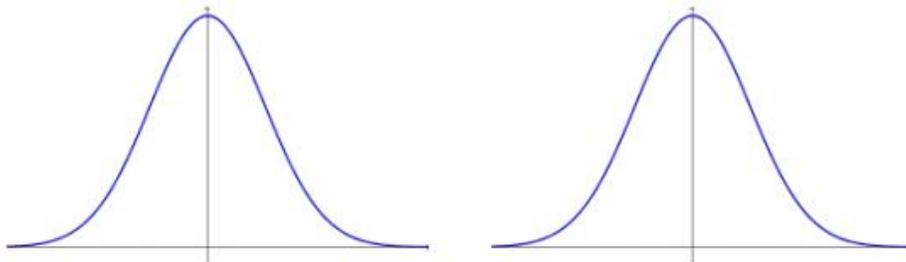
De un manzano grande se puede recolectar anualmente 200kg de manzanas, con una desviación estándar de 30kg. En una plantación, se quiere averiguar si el cambio del microclima en el valle ha variado el rendimiento de los manzanos. Se considera el rendimiento de manzanos bajo el supuesto de una distribución normal y se prueba con un error de probabilidad de 5%.



- a. De una muestra de 25 manzanos, se calcula un promedio de $\bar{X} = 190kg$. Prueba la hipótesis nula para aceptar o rechazar la influencia del cambio del clima.
- b. De otra muestra de 50 manzanos, resulta el mismo promedio de $\bar{X} = 190kg$. Prueba la hipótesis nula para aceptar o rechazar la influencia del cambio del clima.
- c. Compara las dos pruebas y comenta la influencia del tamaño n de la muestra en la hipótesis nula.

¿“Significatividad” o “significatividad alta”?

1. La siguiente imagen muestra el gráfico de dos distribuciones normales de la misma población. Para una prueba de hipótesis nula, se considera un error de probabilidad de 5% en el primer caso y en el segundo, un error de probabilidad de 1%.



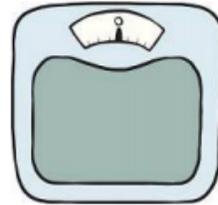
- a. Rotula en ambos gráficos el valor esperado μ .
- b. Marca aproximadamente, en el eje horizontal del primer gráfico, el espacio del rechazo de la hipótesis nula con un error de probabilidad de 5%. ¿A qué tipo de error “tipo 1” o “tipo 2” corresponde frente a la hipótesis nula?
- c. Marca aproximadamente en el eje horizontal del primer gráfico, el espacio de la aceptación de la hipótesis nula con un error de probabilidad de 1%.

- d. Si el resultado de una muestra cae en el espacio de rechazo de una hipótesis nula, se utiliza las expresiones “desviación significativa” o “desviación altamente significativa”. ¿Cuál de los casos se evalúa con “desviación significativa” o “desviación altamente significativa”? Argumenta la respuesta.

SALUD, ELECCIONES DE CANDIDATOS Y MECÁNICA

1. De un documento del Ministerio de Salud de Chile¹³ se puede extraer aproximadamente la información de la masa media de niñas de 10 años de todo Chile, y se concluye que es de 32kg con una desviación estándar de 5kg . Para contrastar esta información con la realidad regional, se conjetura que la masa media de niñas sería menor. De cuatro cursos entre 4° y 5° básico y un total de 64 niñas, resulta una masa media de $30,5\text{kg}$.

Bajo el supuesto de normalidad, se arma la hipótesis de que la masa media de las niñas en la región está representada con los datos de la población. Se arma la hipótesis nula, con un 5% de error de probabilidad, de que la masa media coincide con el nivel nacional.



- a. ¿Cuál sería la estrategia para verificar la conjetura? Argumenta tu respuesta.
- b. Comparando el resultado de la muestra con el intervalo de confianza para la media poblacional ($\mu = 32\text{kg}$) de $[30,78\text{kg}, 33,23\text{kg}]$, ¿qué conclusión se obtiene? Argumenta tu respuesta.
- c. Para construir una hipótesis alternativa, se arma un intervalo de confianza bajo el supuesto de que, entre 100 niñas, resulte $\bar{X} = 30,5\text{kg}$. Determinando correctamente el intervalo de confianza para la media poblacional ($\mu = 32\text{kg}$) de $[30,39\text{kg}, 33,61\text{kg}]$ y se rechaza la hipótesis nula. Argumenta este procedimiento con la prueba de hipótesis.
2. El candidato a diputado de un distrito electoral encarga una encuesta para averiguar si obtiene mayoría absoluta en las próximas elecciones. Se elige al azar a 354 personas y 178 de ellas señalan votar por él.
- a. ¿Cómo se interpreta la “mayoría absoluta” en porcentaje?
- b. El candidato piensa que puede sobrepasar el porcentaje de mayoría absoluta. ¿Cómo se debería formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa? Argumenta tu respuesta.
- c. ¿Qué factor k en $k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para la probabilidad de error de 5% se debe aplicar para el intervalo de confianza? Argumenta tu respuesta.
- d. Con los resultados de la encuesta, rechaza o acepta la hipótesis nula. Argumenta tu decisión.
- e. El candidato tiene como meta mínima superar el resultado de las últimas elecciones, en las cuales obtuvo 48,5% de los votos. Elabora con la estrategia anterior una prueba de hipótesis para esta meta.



¹³ <https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.bibliotecaminsal.cl/wp/wp-content/uploads/2018/03/2018.03.16-Patrones-de-crecimiento-para-la-evaluaci%C3%B3n-nutricional-de-ni%C3%B1os-ni%C3%B1as-y-adolescentes-2018.pdf>

3. Una empresa de producción de automóviles indica que el rendimiento del motor por un litro de petróleo de un modelo es de $12,5 \text{ km}$ en recorridos fuera del tránsito urbano. De larga experiencia, se sabe que la variable aleatoria X , que describe el rendimiento del motor, está normalmente distribuida con una desviación estándar de $\sigma = 1,5 \text{ km}$.



En la revista de un club de automóvil se duda de este dato y se conjetura un rendimiento menor. Se analiza 100 autos y su resultado indica un rendimiento medio de $\bar{X} = 12,2 \text{ km}$.

- En una prueba de hipótesis unilateral de un error de probabilidad de 0,05 (considerando el mismo factor k de la actividad 2c.), ¿cuál sería la hipótesis nula y cuál la hipótesis alternativa? Argumenta.
- Acepta o rechaza la hipótesis nula a partir de los datos de la muestra.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- En la primera parte, es importante que los alumnos sepan clasificar los tipos de error gráficamente en la tabla.
- Con la metáfora “ser portador” de un virus, se puede entender mejor los errores “tipo 1” y “tipo 2”, identificándolos como “positivo falsos” y “negativos falsos”.
- Se recomienda poner énfasis en que los jóvenes elaboren la hipótesis nula a partir de resultados experimentales o muestrales.
- En el primer punto de “Salud, elecciones de candidatos y mecánica”, las respuestas no requieren cálculo alguno. El énfasis está en la argumentación y la comunicación.
- En el punto 1c, respecto de la “masa media de niñas”, el resultado muestral conduce a rechazar la hipótesis nula. El relato del procedimiento de aumentar el número de niñas investigadas lleva matemáticamente a una reducción del rango de aceptación, lo que implica aceptar la hipótesis nula. La idea es que los estudiantes cuestionen el aumento posterior del número “ n ” en la prueba de hipótesis, porque ese procedimiento vulneraría los principios científicos de investigación.
- En la situación del “candidato a diputado”, la prueba de hipótesis se realiza unilateralmente para afirmar la mayoría absoluta que significa resultados sobre 50%, que corresponde a $p > 0,50$. La hipótesis nula es $p \leq 0,50$. Para tener un error de 5% en el lado derecho, el intervalo de confianza, que es simétrico, debe tener la confiabilidad 90% que implica el factor $k = 1,645$ según la tabla presentada.
- En la última situación, se sospecha que el rendimiento del motor sea menor y, por esta razón, también se realiza la prueba de hipótesis en forma unilateral con un 5% de error. Los alumnos deben elaborar la hipótesis nula “ $\mu = 12,5 \text{ l}$ ” y testearla frente a la hipótesis alternativa “ $\mu < 12,5 \text{ l}$ ”.

8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Resuelven problemas en los que deben plantear una prueba de hipótesis y establecen los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.
 - Argumentan acerca del error de probabilidad asociado en una prueba de hipótesis, según el nivel de confianza establecido para los intervalos.
 - Argumentan acerca de los errores Tipo I y Tipo II en una prueba de hipótesis.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Errores Tipo I y II
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/type-i-and-type-ii-error/>
- Errores Tipo I
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://explorable.com/es/error-de-tipo-i>

Anexo 2. Tabla de distribución normal estándar

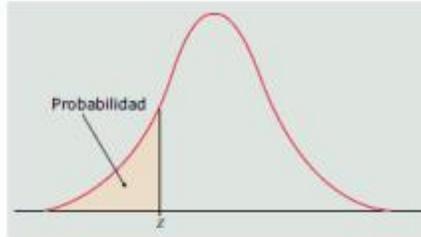
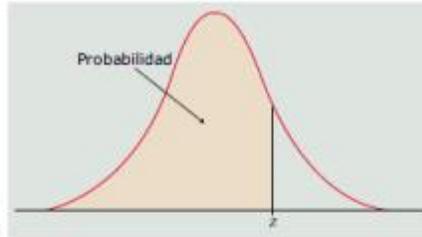


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641



El valor de la tabla para z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998