



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE
LA EDUCACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**PROPUESTA DIDÁCTICA DIGITAL DE HOMOTECIA PARA EL NIVEL DE
PRIMER AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA**

TESINA PARA OPTAR AL GRADO Y/O TÍTULO DE LICENCIADO EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

AUTORAS:

ELIZABETH CAROLINA ARAYA MORALES

DANIELA PAZ CASTILLO OSSANDÓN

FRANCIA MARIANELA LLANTÉN FERNÁNDEZ

PROFESORA GUÍA:

MARIELA CARVACHO BUSTAMANTE

SANTIAGO DE CHILE, AGOSTO 2021

Autorización

2021, Elizabeth Araya Morales, Daniela Castillo Ossandón, Francia Llantén Fernández.

Se autoriza la reproducción total o parcial de este material, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, siempre que se haga la referencia bibliográfica que acredite el presente trabajo y sus autoras.

Agradecimientos

Nos gustaría agradecer por todo su apoyo a nuestra profesora guía, Mariela Carvacho. A quien recién tuvimos la oportunidad de conocer durante este trabajo y nos encontramos con una profesora cariñosa, solidaria y profesional. Fue un encanto trabajar con ella.

Profe, usted es un ejemplo para nosotras, muchas gracias por todo.

Elizabeth Araya, Daniela Castillo y Francia Llantén.

Dedicatorias

Quiero comenzar agradeciendo a mis padres, Elías y Marcia, por enseñarme con su ejemplo hacer una gran docente, por apoyarme en cada paso que doy, por el amor que me entregan todos los días, por aconsejarme y guiarme cada vez que lo necesito. A mi abuelita bella y a mi mami Lucy por siempre tenerme en sus oraciones y por motivarme a ser una mujer independiente, luchadora y apasionada, gracias por su amor y cariño, hacen que mi vida sea mucho más dulce. A mi hermano Diego y mi cuñada Mariaines porque cada vez que vienen a casa hacen que olvide todas las dificultades y solo existan risas y juegos.

A mi familia que, a pesar de que no nos juntamos desde que comenzó la pandemia, se hace presente en cada llamada y reunión por zoom. A mis tíes por su preocupación y amor incondicional, a mis primes por su cariño, ataques de risa y anécdotas que tenemos cada vez que hablamos.

Agradecerle al pedagógico por darme la oportunidad de conocer a grandes docentes y asistentes que me apoyaron en mi crecimiento personal y profesional.

A mis amigas de la U por cada reunión de zoom, a pesar de la distancia los siento más cerca que nunca, gracias por apoyarme en esta etapa. A mis amigas de Ovalle por escucharme cada vez que lo necesito y por su amor incondicional.

A mis compañeras de tesis, gracias porque sin ustedes no hubiera logrado concretar esta gran etapa en mi vida, gracias por alegrarse con mis triunfos y por apoyarme en cada dificultad, fueron muy importantes este año, más allá de escribir esta hermosa tesina, se convirtieron en un gran apoyo en mi vida, las amo.

Finalmente, a mi abuelo, que desde el cielo debe estar celebrando este triunfo, gracias por todo, no tengo palabras para expresar lo mucho que lo extraño, pero espero se sienta orgulloso de lo que logré, pero sobre todo la persona en la que me estoy convirtiendo.

¡Tata, lo logramos!

Daniela Paz Castillo Ossandón

A mis papás, quienes me dieron la oportunidad de estudiar lo que yo quisiera y cuándo quisiera. Por apoyarme siempre en todas las adversidades que se presentaron en este proceso, en especial a mi padre por ser mi primer profesor y dedicarse a enseñarme a su forma, a mi madre por siempre creer en mí e inculcarme a nunca darme por vencida, a mi hermano por aguantarme y ser mi primer estudiante, a mi abuela Clary que desde donde esté gozando siempre me instó a estudiar y ser apasionada en todo lo que me propusiera y por último y no menos importante a mi abuela Julia que siempre ha estado para brindarme su apoyo y acompañarme a todas.

Gracias a mis amigos y compañeros de carrera, Juan, Carla, Valeria y Sofía por estar en todos los momentos, apoyándome y compartiendo los mejores momentos en el Peda.

Gracias a mis tremendas y poderosas compañeras de tesis, Francia y Daniela por hacer este tiempo el más grato, a pesar de la presión y de la pandemia que nos tocó vivir. Si pudiera, las volvería a elegir una y mil veces. ¡Son bacanes!

Muchas gracias a mi pequeña familia. A mi esposo Felipe por todo su amor, apoyo y comprensión durante todo este proceso de formación universitaria, si no fuera por ti habría tirado la toalla hace mucho rato, gracias por creer siempre en mí y considerarme la mejor profesora del mundo. A mi hija Zoe, que a pesar de sus cortos 4 años siempre ha estado ahí para acompañarme y en su inocencia comprender que mamá a veces no estaba 24/7 porque debía terminar esta travesía, gracias por tus abrazos y ojitos chinitos al llegar a casa. Los amo con la vida. A mi querida y recordada suegra, gracias Veve por todo tu apoyo, gracias por alegrarte con cada logro mío, por el amor que me diste como si fuera tu hija. Sé que de donde quiera que estés, estás tan feliz como yo por terminar esta carrera y alentándome a ir por más. Al bebé que está en mi vientre le dedico este logro, si algún día logras leer esto, quiero que sepas que mamá llegó a la meta gracias a ti, a tu hermana y papá.

Finalmente agradezco a mi amiga Yanira por siempre acompañarme en este proceso, por alentarme a creerme el cuento, por enseñarme a ser una mujer poderosa y valiente. Muchas gracias a todas las personas que estuvieron preocupadas por mí durante este proceso, sus palabras de aliento fueron de gran apoyo.

Elizabeth Araya Morales

El camino fue largo y la decisión no fue fácil, por lo que agradezco haber tenido la valentía de atreverme y lanzarme a cumplir un sueño de niña, lo que siempre quise ser.

Agradezco a todas las personas que me acompañaron en este proceso, que me dijeron “dale no más, tú puedes”, a las personas que me felicitaron y por sobre todo a mi mami que me dejó ser libre en ese momento, donde más lo necesité.

Por lo mismo quiero dedicar este trabajo a ella, mi mami, quien sé que está orgullosa y contenta de que yo esté feliz terminando este proceso.

Dedicar este trabajo final a mi Chinita, hija siempre recuerda que nosotras como poderosas. podemos lograr todo lo que nos propongamos, te amo mucho mucho mucho!!!

Sin duda terminar la carrera con una hija y en pandemia fue una misión casi imposible en muchos momentos y los pilares fundamentales para lograrlo fueron mi mami, el Diego y mi hermana Vale, que siempre me apoyaron en este gran desafío de ser mamá universitaria.

Mil gracias! Les amo!

Además, me gustaría dar gracias al Peda por regalarme mil aventuras y por darme la oportunidad de conocer gente maravillosa, en especial a mis amigas Angie y Nalle. Gracias chiquillas por entenderme, quererme y apoyarme tanto.

Finalmente, agradecer a la Dani y a la Eli por ser un buen equipo de trabajo, lejos fue una gran decisión realizar esto juntas.

Francia Marianela Llantén Fernández

Tabla de contenidos

Información de relevancia	xi
Resumen	xii
Abstract	xiii
Introducción.....	1
CAPÍTULO 1: Antecedentes y Planteamiento del problema.....	3
Antecedentes.....	3
Pandemia, educación a distancia y brechas educativas.....	3
¿Por qué Homotecia?	5
Planteamiento del problema	6
Objetivos	6
CAPITULO 2: Marco Teórico	7
Socioepistemología	7
Epistemología de la Homotecia	9
Aprendizaje basado en proyectos (ABP).....	19
CAPITULO 3: Marco Metodológico.....	24
Ingeniería Didáctica	24
Experimentación	26
CAPITULO 4: Propuesta Didáctica.....	27
Diseño de la propuesta	27
Actividad 1	28
Actividad 2	38
Actividad 3:	39
Análisis de la propuesta	42
Análisis preliminar	42
Concepciones y análisis a priori	45
Experimentación	56
Análisis a posteriori	57
CAPÍTULO V: Conclusiones y Proyecciones	68
Conclusiones.....	68
Proyecciones.....	71
Referencias Bibliográficas	72

Índice de ilustraciones

Figura 1: Acercamiento de concepto Homotecia según texto de primero medio	12
Figura 2: Acercamiento y formalización de concepto Homotecia según texto del estudiante de primero medio	13
Figura 3: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio	14
Figura 4: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio	15
Figura 5: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio	16
Figura 6: Abordaje Vectorial de la Homotecia según texto del estudiante de primero medio	17
Figura 7: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio	18
Figura 8: Datos personales de estudiantes.....	29
Figura 9: Datos personales de estudiantes.....	29
Figura 10: Corrección de datos personales de estudiantes	30
Figura 11: Corrección de datos personales de estudiantes	30
Figura 12: Introducción actividad.....	30
Figura 13: Introducción actividad.....	30
Figura 14: Introducción actividad.....	30
Figura 15: Introducción actividad.....	31
Figura 16: Introducción actividad.....	31
Figura 17: Introducción actividad.....	31
Figura 18: Introducción actividad.....	31
Figura 19: Concepto semejante	31
Figura 20: Concepto semejante	32
Figura 21: Concepto semejante	32
Figura 22: Concepto semejante	32
Figura 23: Concepto semejante	32
Figura 24: Concepto semejante	33
Figura 25: Concepto semejante	33
Figura 26: Ejemplo semejanza	33
Figura 27: Ejemplo semejanza	33

Figura 28: Ejemplo semejanza	34
Figura 29: Pregunta 1	34
Figura 30: Introducción a segunda parte	35
Figura 31: Introducción a segunda parte	35
Figura 32: Introducción a segunda parte	35
Figura 33: Introducción a segunda parte	35
Figura 34: Interacción estudiantes	36
Figura 35: Interacción estudiantes	36
Figura 36: Interacción estudiantes	36
Figura 37: Rutina del pensamiento	36
Figura 38: Rutina del pensamiento	36
Figura 39: Pregunta 2.....	37
Figura 40: Pregunta 3.....	37
Figura 41: Representación actividad 2.....	38
Figura 42: Lámina 1	40
Figura 43: Lámina 2.....	40
Figura 44: Lámina 3.....	40
Figura 45: Recomendación de contrucción de piñata	41

Índice de tablas

Tabla 1: Año en que entra en vigencia cada contenido.....	5
Tabla 2: Contenidos previos de actividad 1	42
Tabla 3: Conocimientos previos de actividad 2.....	43
Tabla 4: Conocimientos previos de actividad 3.....	43
Tabla 5: Respuestas esperadas actividad 1	46
Tabla 6: Análisis de datos	47
Tabla 7: Organización de datos opción 1	47
Tabla 8: Organización de datos opción 2	48
Tabla 9: Estrategias posibles	49
Tabla 10: Respuestas esperadas actividad 3	55
Tabla 11: Respuestas de estudiantes logradas en P1	58
Tabla 12: Respuestas de estudiantes medianamente logradas en P1	59
Tabla 13: Respuestas de estudiantes no logradas en P1.....	59
Tabla 14: Respuestas de estudiantes logradas en P2	60
Tabla 15: Respuestas de estudiantes no logradas en P2.....	60
Tabla 16: Respuestas de estudiantes correctas no logradas en P2.....	61
Tabla 17: Respuestas de estudiantes logradas en P3	62
Tabla 18: Respuestas de estudiantes correctas no logradas en P3.....	62
Tabla 19: Respuestas de estudiantes no logradas en P3.....	63
Tabla 20: Respuestas de estudiantes logradas en P4	64
Tabla 21: Indicadores de logro de las respuestas de los estudiantes.....	65

Información de relevancia

En el lenguaje hispanohablante y bajo la tutela de la Real Academia Española (RAE), se permitió por muchos años utilizar el morfema -o (género masculino) como el género no marcado, es decir, el género que incluye a todas las personas. Este uso lingüístico, en la actualidad genera controversias, ya que desde las perspectivas de género se denuncia que realiza el binarismo (-o/-a), e invisibiliza lo femenino, disidencias o personas no binaries, agrupándoles además bajo el género masculino (-o).

Por lo tanto, pese a la oposición de la RAE o las polémicas que puede suscitar, en la presente tesina se decidió hacer uso del lenguaje inclusivo, utilizando el morfema -e, como el marcador neutro. Siendo su uso no tan solo en los artículos o pronombres, sino que también en adjetivos y sustantivos, entre otros. Ya que se percibe como una norma de empatía y respeto a todas las identidades que cohabitan en las nuevas generaciones.

Como futuros docentes creemos necesario incorporar este uso, ya que no se trata de un debate meramente lingüístico, sino que social, cultural y político.

Y, por ende, decidimos dirigirnos e incorporar a todes.

Resumen

En la presente tesina se diseña una propuesta de tres actividades para estudiantes de primero medio sobre homotecia basada en la socioepistemología, empleando conceptos cotidianos para ellos. En este caso se utilizará el fenómeno natural de la sombra proyectada al ubicar una lámina cercana a la luz.

Nuestra propuesta se enmarca dentro del Aprendizaje Basado en Proyectos siguiendo el espíritu de los planes proporcionados los últimos años por el Ministerio de Educación.

Las dos primeras actividades corresponden a un diagnóstico de conocimientos previos de los estudiantes, luego se propone que el docente trate el contenido según su planificación y que finalmente se realice la tercera actividad, que corresponde a realizar el proyecto “construir una piñata”.

El recurso está diseñado para que se realice de manera on-line y quedará disponible en la web para que cualquier docente pueda acceder a ella.

La propuesta se analizará según la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, por lo que se presenta el análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori de la propuesta.

Palabras claves: Homotecia, socioepistemología, semejanza y proporciones.

Abstract

This dissertation proposes three activities for secondary students about homothecy based on socioepistemology, employing quotidian concepts for them. In this case, there will be used the natural phenomena of projected shadow, placing a sheet close to the light.

Our proposal lies within Based-Learning in Projects, following the spirit of Ministry of Education guidelines.

The firsts two activities concern to a diagnosis of students' previous knowledge. The second activity proposes the teacher sharing the contents according to the planification and, finally, the third activity consists in carrying out the project "building a pinata".

This tool is designed to be developed online and will be available to any teacher who needs access to it.

The proposal will be analysed according to Didactic Engineering as research methodology, presenting preliminary, a priori, experimentation and a posteriori analyses.

Key words: homothecy, socioepistemology, similarities, and proportions.

Introducción

La realización de esta propuesta pedagógica sobre homotecia para el 1° año de enseñanza media pretende responder a las necesidades suscitadas durante la pandemia del COVID-19 en nuestro país, en donde el mayor impacto, además de lo económico en las familias chilenas, fue en el sistema educativo, ya que el MINEDUC tuvo que priorizar ciertos contenidos por sobre otros en todas las materias tratadas en los distintos niveles educativos.

A continuación, se detallan los capítulos que componen nuestra investigación:

Capítulo I: Problemática y antecedentes

Dentro de este capítulo se presentan los antecedentes más relevantes, los cuales fueron recopilados durante el transcurso de la pandemia, los cuales sustentan la problemática misma. Se recopilan datos generales sobre la pandemia, la educación a distancia y las brechas educativas que se han potenciado durante el transcurso de los 2 años de pandemia. Además, se aborda lo indicado por el MINEDUC en sus bases curriculares, tanto el cómo y qué enseñar. Y al finalizar este capítulo se encontrará el objetivo general de esta tesina como los objetivos específicos de la misma.

Capítulo II: Marco Teórico

En este apartado se exponen los antecedentes y pilares que sostienen esta investigación y propuesta didáctica, esto es: teoría Socioepistemológica, antecedentes literarios sobre la epistemología de la homotecia, la Homotecia según el MINEDUC, el método de enseñanza y aprendizaje del Aprendizaje Basado en Proyectos.

Capítulo III: Marco Metodológico

En este capítulo se presenta la metodología con la que se lleva a cabo la investigación además de la experimentación de la propuesta didáctica en cuestión.

Capítulo IV: Propuesta didáctica

En este capítulo se encuentra el diseño y análisis de la propuesta didáctica, el cual fue realizado basado en la teoría de la Ingeniería Didáctica.

Capítulo V: Conclusiones y proyecciones

En este capítulo se detallan las reflexiones obtenidas de la investigación, además de las proyecciones de la propuesta, donde se espera que este recurso sea de utilidad para docentes y estudiantes.

CAPÍTULO 1: Antecedentes y Planteamiento del problema

Antecedentes

Pandemia, educación a distancia y brechas educativas

El día 31 de diciembre de 2019 en Wuhan (China) se inició el brote de enfermedad Coronavirus COVID-19, el cual se empezó a propagar por el mundo, llegando a Chile el 3 de marzo con el primer caso confirmado. Doce días después el gobierno de Chile da a conocer algunas medidas para proteger a la población, donde se encuentra la suspensión de clases en colegios a lo largo del país que se extendió hasta el 24 de abril. A partir del día 27 de abril los estudiantes retoman sus actividades académicas de forma no presencial, lo cual se mantuvo en gran mayoría de los colegios por todo el año escolar 2020.

Para el Ministerio de Educación, desde ahora MINEDUC, era importante que los estudiantes siguieran su ritmo de estudios, por lo que lanzó una plataforma de aprendizaje remota llamada Aprendo en línea, para que los colegios tuviesen recursos digitales para dar continuidad al año académico 2020, pero también se dio la posibilidad de entregar material físico para los estudiantes que no tengan posibilidad de acceso al material digital.

Para este año (2021) el MINEDUC entregó algunos lineamientos para el desarrollo de actividades curriculares, destacando la planificación de clases híbridas, priorizando las clases presenciales de manera gradual, flexible y voluntaria, respetando los protocolos sanitarios y en la medida que el Plan Paso a Paso lo permita.

Como la presencialidad depende del Plan Paso a Paso, los colegios tienen sus planificaciones de manera online obligatoriamente para realizar las clases de esta forma cada vez que la situación del país lo requiera.

Dado que la situación país está en constante cambio y se entiende que la realidad de cada colegio es distinta, el MINEDUC a través su Unidad de Currículum y Evaluación, propone objetivos priorizados, los que consideran imprescindibles para la educación de los estudiantes. Para esta priorización el Ministerio de Educación consideró los siguientes criterios:

- Equilibrio entre los objetivos de los ejes curriculares o líneas formativas
- Coherencia de aprendizaje
- Respuesta a una progresión en el ciclo que facilitan el aprendizaje y el ser imprescindibles para continuar la enseñanza del año siguiente (nivel 1), además de objetivos de aprendizaje considerados altamente integradores y significativos que podrían ampliar el Currículum conformado por los imprescindibles de tal manera de dar un marco más amplio para diferentes contextos y realidades. (Nivel 2)

(Unidad de Currículum y Evaluación. 2020).

Sobre la propuesta de priorización el MINEDUC indica que: “Se espera que esta herramienta de apoyo permita a las escuelas durante estos dos años con trabajo riguroso y comprometido disminuir la brecha de los aprendizajes, y así permitir la equidad de oportunidades para todos los niños, niñas, estudiantes del país.” (Unidad de Currículum y Evaluación. 2020).

Sin embargo, la encuesta Clases online, computadores y acceso a internet durante la pandemia del Centro UC de Encuestas y Estudios Longitudinales realizada en septiembre de 2020, muestra que el acceso a clases online es desigual según grupos socioeconómicos de los estudiantes, ya que mientras estudiantes de enseñanza básica y media pertenecientes al quinto quintil (superior) reciben un 84.3% de clases online, el primer quintil (inferior) solo recibe un 60.6% de clases online. De la misma forma se observa la diferencia de proporción de estudiantes que recibe clases por videoconferencia según clasificación de dependencia de colegios es la siguiente: colegios particulares pagados 89.9%, colegios particulares subvencionados 74.2% y colegios municipales/públicos 61.2%. Esta diferencia es más notoria al comparar también acceso a clases online en colegios rurales 56.1% y colegios urbanos 72.9%. Estos datos son importantes pues la brecha educativa que actualmente existe entre estudiantes de distintos grupos socioeconómicos podría aumentar por la pandemia.

¿Por qué Homotecia?

En primer lugar, nos parece importante abordar un contenido de Geometría, ya que según el análisis de Valenzuela (2015) de las pruebas SIMCE realizadas en octavo básico en los años 2009 y 2011, este eje es el que tiene menor aprobación (61,11%) con respecto a los otros ejes (Números 79,22%, Álgebra 70,00% y Datos y Azar 80,00%).

Por otra parte, elegimos la Homotecia por ser un contenido relativamente nuevo en el currículum nacional chileno, ya que recién en la actualización de los contenidos mínimos obligatorios del año 2009 es ingresado como contenido para estudiantes de segundo año medio, el cual entra en vigor el año 2011 (MINEDUC. 2009). Antes de esa fecha el contenido no se encontraba en ningún nivel escolar como contenido mínimo obligatorio (MINEDUC. 2005).

Los contenidos priorizados de nivel 1 en el eje geometría son:

- 7° Básico: Círculo.
- 8° Básico: Teorema de Pitágoras
- 1° Medio: Homotecia
- 2° Medio: Trigonometría

(Unidad de Currículum y Evaluación. 2020).

Al revisar la siguiente tabla de vigencia de los contenidos podemos notar que Homotecia es el contenido más reciente en el currículum chileno.

Contenido	Curso	Año que se promulga
Círculo	8° Básico	1996, LOCE
Teorema de Pitágoras	7° Básico	2002, Actualización LOCE
Homotecia	2° Medio	2009, Actualización LOCE
Trigonometría	3° Medio	2005, Actualización LOCE

Tabla 1: Año en que entra en vigencia cada contenido.

(MINEDUC. 1996, 2002, 2005, 2009)

Planteamiento del problema

Las bases curriculares 2015 del MINEDUC, indican que se propone que estudiantes puedan aprender matemáticas para poder desarrollarse en su entorno, además para ser capaces de enfrentar problemas cotidianos. Sin embargo, al revisar el texto de estudio donde se aborda la homotecia, en general no se aprecia la cotidianidad en el desarrollo del contenido.

También podemos notar que si bien el MINEDUC en su plataforma web Currículum Nacional entrega recursos digitales a los profesores, en general, estos no muestran la propuesta con la situación didáctica completa.

Por lo tanto, la idea es desarrollar un recurso digital que aborde desde lo cotidiano la homotecia, que se encuentre disponible para todos los docentes que lo requieran, independiente de su localidad y al grupo socioeconómico que realicen clases. El cual se podrá usar directamente, sin la necesidad de planificar cada actividad y que solo en el caso de ser necesario se adapte la situación a un contexto en particular.

De aquí nace nuestra pregunta de investigación: ¿Nuestra propuesta didáctica acercará la homotecia a los estudiantes?

Objetivos

Objetivo general:

Realizar un recurso digital sobre Homotecia para que profesores de estudiantes de primero medio puedan usarlo en sus clases.

Objetivos específicos:

- Proponer tres actividades cotidianas sobre homotecia para el recurso digital, las cuales estarán basadas en la Socioepistemología y deberán incluir la planificación de la situación didáctica.
- Presentar las actividades a estudiantes de primero medio para analizar sus respuestas y posteriormente evaluar la propuesta y así, en el caso que sea necesario, mejorarlas.

CAPITULO 2: Marco Teórico

En esta sección se explicarán los antecedentes y pilares que sostienen esta investigación y propuesta didáctica. En primer lugar, se presentará la Socioepistemología, los antecedentes que corresponden a la literatura relacionada con la epistemología de la homotecia. A continuación, se analizará el apartado de Homotecia del texto del estudiante entregado por el MINEDUC. Finalmente, se describirá teóricamente la metodología que se utilizará para llevar a cabo la propuesta didáctica, la cual está sustentada en el Aprendizaje Basado en Proyectos y finalmente se presenta la *postura* del sistema educativo chileno frente a la metodología de enseñanza basada en proyectos.

Socioepistemología

Historia

El nacimiento de la Socioepistemología se sitúa en la escuela mexicana de Matemática Educativa a fines de los ochenta y se extiende hacia Latinoamérica y otras latitudes durante los noventa con el objetivo de atender colectivamente un problema mayor: explorar formas de pensamiento matemático, fuera y dentro del aula, que pudiesen difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población. Es sabido desde el principio que la manera de enseñar está estructurada por prácticas de enseñanza instituidas (la acción didáctica en: aula, familia, comunidad, escuela o vida cotidiana, entre otros) y que esto, a su vez, es estructurante de la socialización del conocimiento y, en consecuencia, de los procesos de pensamiento involucrados.

Etimología

La socioepistemología se compone de tres elementos: socio – episteme – logos y en este sentido plantea el tema de la construcción social del conocimiento. Es también conocida como epistemología de las prácticas o filosofía de las experiencias, es una rama de la epistemología que estudia la construcción social del conocimiento. Mientras en la Epistemología clásica el conocimiento se estudiaba, por lo general, independientemente de las circunstancias sociales de su producción; en la Socioepistemología se aborda la consideración de los mecanismos de institucionalización que lo afectan, vía la organización

social de la enseñanza, el aprendizaje y la investigación. Está, por tanto, íntimamente relacionada con la Sociología de la Educación y de la Ciencia.

Aplicar la socioepistemología a la Matemática exige, por tanto, un reto mayúsculo, pues se deben analizar las relaciones entre una ciencia formal y la vida en sociedad.

Objetivo

Cantoral y López en el año 2010 expresan que entre sus objetivos incluye el entender cómo las personas construyen el conocimiento matemático en situaciones específicas, y cómo desarrollan el pensamiento matemático ante situaciones diversas, es por esta razón que su enfoque no está en los conceptos en sí. Para lograr esto es necesario crear situaciones donde se integren cuatro elementos fundamentales en la construcción del conocimiento: naturaleza epistemológica, dimensión sociocultural, procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Para esto, se plantea el análisis del conocimiento social, histórico y cultural de las personas, en busca de la construcción y significado del conocimiento matemático. (Crespo & Farfán, 2005, citando a Cantoral y Farfán, 2004)

La teoría socioepistemológica aspira a que la mayoría de las personas puedan entender y disfrutar de la matemática, y no sólo una élite intelectual (Cantoral, 2010). De esta manera busca la inclusión de los excluidos de aprenderla (Soto, 2010). De aquí la importancia de estudiar las diversas maneras de entender al mundo de otros, sus contextos socioculturales, y el cómo estos construyen y significan el conocimiento matemático (Espinoza, 2009)

Epistemología de la Homotecia

En esta sección se presenta la epistemología de homotecia, primero se realizará un acotado análisis histórico sobre la homotecia partiendo por el nacimiento del vector donde se muestra un análisis histórico de la evolución del concepto en estudio. Luego se exponen distintas concepciones para finalmente realizar un análisis didáctico de la homotecia en el texto del estudiante entregado por el MINEDUC.

Historia sobre la homotecia

Durante el transcurso de la historia, la homotecia sobresale a medida que progresan las transformaciones geométricas. Diversos matemáticos estudiaron las transformaciones en el siglo XIX. Dado al avance de la geometría, por parte de los trabajos de Monge y Klein, se consideraba la semejanza y la homotecia como objetos matemáticos (Escudero, 2005; Julio 2014; Moriena, 2006; Zurita, 2011).

Hacia la década de los 70 se presenta la homotecia a través de programas de matemáticas modernas como una aplicación lineal, la cual se relaciona con isomorfismos de espacios vectoriales y como una aplicación afín vinculada con las estructuras del plano. Avanzando en dos décadas, ya en los años 90, el interés se sitúa en su presentación desde dos contextos matemáticos: el vectorial y el analítico. (Lemonides, 1991).

Concepciones de homotecia

Etimológicamente homotecia tiene raíces griegas, sus componentes léxicos son “homo” que refiere a igualdad y “tithénai” que alude a colocar (Grupo Norma, 1992; Jackson, 1973; Casares, 1984; Schwartzman, 1994), de esta forma es como etimológicamente la homotecia se puede entender como colocar igualdades.

En la literatura se encuentran diferentes definiciones para el concepto en cuestión. En los libros de textos matemáticos las definiciones se representan de forma simbólica y se centran en la homotecia como una aplicación afín que en libros de texto de matemática, las definiciones usan representaciones simbólicas y puntualizan en la homotecia como una aplicación afín que comprende vectores. Por ejemplo, De Burgos (1977) define la homotecia como: “en un espacio vectorial V sobre un cuerpo K , se llama homotecia afín de centro $\mathbf{a} \in$

V y razón $k \in K$ a la aplicación $h_{a,k}:V \rightarrow V$ definida, $\forall v \in V$, mediante $h_{a,k}(v) = a + k(v - a)$ " (p. 162).

A través de los diccionarios matemáticos se pueden encontrar definiciones que tienden a perseverar la conceptualización de los textos de matemáticas, como Espinosa de los Monteros (2004) y Chambadal (1972), en cambio en otros textos existen tendencias más por definiciones a través de una representación verbal, destacando relaciones entre distancia; como Sierra (2012) quien define la homotecia como una "transformación geométrica que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor (...) donde una recta y su homóloga son paralelas" (p. 62). En diccionarios de la lengua, conservan las inclinaciones matemáticas, como Alemany (1957) que muestra que la homotecia es una "relación existente entre dos sistemas de puntos de tal modo dispuestos que cada dos de una serie estén en línea recta, tengan un centro común y sus distancias al centro estén en una razón constante" (p. 722).

Homotecia según el MINEDUC

En este apartado, se presenta el tratamiento de la Homotecia en el texto de estudio entregado por el Ministerio de Educación.

En las Bases Curriculares 2015 de 7° básico a 2° medio el concepto de Homotecia es tratado en el eje de Geometría correspondiente al 1° año de Enseñanza Media, en donde se establecen los siguientes Objetivos de Aprendizaje:

- **OA8:** Mostrar que comprenden el concepto de homotecia:
 - Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano.
 - Midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia.
 - Aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con software educativo.
 - Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas.
- **OA9:** Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas.

Como es sabido, debido a la Pandemia Mundial, el Ministerio de Educación ha establecido una Priorización Curricular, en donde se encuentra como Objetivo Priorizado nivel 1 el OA8 previamente descrito. Para cumplir lo antes propuesto, el Texto del Estudiante 2021 de 1º año medio entregado por el MINEDUC recomienda tratar el contenido de la siguiente forma.

LECCIÓN 8 HOMOTECIA Y TEOREMA DE TALES



¿Cómo podemos aplicar las proporciones en situaciones cotidianas?

En esta lección aprenderás el concepto de **homotecia** y aplicarás el **teorema de Tales** en la resolución de problemas.

✦ *Araucaria angustifolia* (pino brasileño).

Analiza la siguiente información, y luego responde.

La imagen corresponde a araucarias *angustifolia* o también llamadas pino brasileño. Es una planta dioica, es decir, presenta los géneros masculino y femenino en troncos separados. Su lugar de origen es el sur de Brasil y norte de Argentina. La palabra araucaria proviene de la región de Arauco (Chile), en donde se descubrió la primera especie.

1. ¿Observas alguna similitud entre las araucarias de las fotografías? ¿Se podrían generar varias imágenes con igual forma al aumentar o disminuir proporcionalmente su tamaño?
2. ¿Por qué crees que las araucarias deben estar protegidas en un parque nacional? ¿Cómo piensas que se podría reducir la contaminación del medioambiente? Comenta con tu curso.

REFLEXIONA

- ¿Qué recuerdas acerca de la proporcionalidad vista en años anteriores?
- ¿Piensas que trabajar en equipo te ayudará a comprender de mejor manera los contenidos que estudiarás?, ¿por qué?

Figura 1: Acercamiento de concepto Homotecia según texto de primero medio

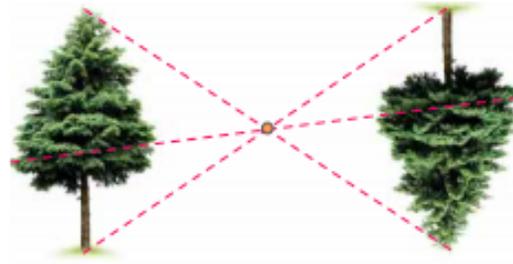
(MINEDUC 2021, p. 106)

Homotecia

Un pino corresponde a un tipo de árbol con tronco fuerte y rugoso, cuyas hojas son estrechas y parecen agujas. Existen más de 100 especies de pinos y están repartidas por todo el mundo en diferentes continentes. Algunos pinos se encuentran casi extintos y requieren que sean protegidos en parques nacionales para asegurar su bienestar.

Observa la siguiente imagen, y luego responde.

- ¿En qué se parecen los dos pinos?
- ¿Cómo podrías obtener el pino de la derecha a partir del de la izquierda?
- Investiga junto con tus compañeros acerca de si los pinos producen algún efecto negativo o positivo en el medioambiente chileno. Argumenta tu respuesta.



Una homotecia es una **transformación geométrica** en la que se obtiene una figura a partir de **ampliar** o **reducir** otra, multiplicando cada trazo por un mismo valor distinto de 0, llamado **razón de homotecia**, con lo que la imagen obtenida conserva la forma de la original en el mismo sentido o invertida, por tanto, sus trazos son proporcionales y la unión de los puntos homólogos convergen en un punto llamado **centro de homotecia**.

Figura 2: Acercamiento y formalización de concepto Homotecia según texto del estudiante de primero medio (MINEDUC 2021, p. 107a)

Se observa que el contenido trabajado se aborda, en una primera instancia, de manera intuitiva y visual, tratando de aplicar el concepto a la naturaleza utilizando conceptos como “similitud” y “parecido”, para posteriormente establecer una definición formal.

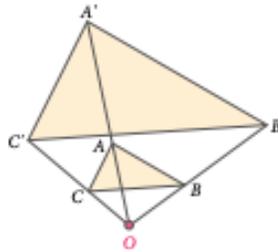
■ EJEMPLO 1

Se aplica una homotecia de centro O sobre el triángulo CBA , obteniendo el triángulo $C'B'A'$.
Si $OC = 4$ cm, $OB = 5$ cm y $OC' = 12$ cm, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{BB'}$?

$$\begin{aligned} \text{Tenemos que } \frac{OC'}{OC} &= \frac{OB'}{OB} \Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{OB'}{5} \\ 12 \cdot 5 &= 4 \cdot OB' \\ OB' &= \frac{12 \cdot 5}{4} \\ OB' &= 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

Luego, como $OB' = OB + BB'$, se tiene que:

$$\begin{aligned} 15 &= OB + BB' \Rightarrow BB' = 15 - OB \\ BB' &= 15 - 5 \\ BB' &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$



La propiedad fundamental de las proporciones establece que: "En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos", es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces: $a \cdot d = b \cdot c$.

■ ACTIVIDADES EN TU CUADERNO

Considera la figura del EJEMPLO 1 y responde.

1. Si $OA = 7$ cm, ¿cuánto mide OA' ?
2. ¿En qué porcentaje crees que aumentó el tamaño del triángulo ABC con respecto al triángulo $A'B'C'$?

Figura 3: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio

(MINEDUC 2021, p. 107b)

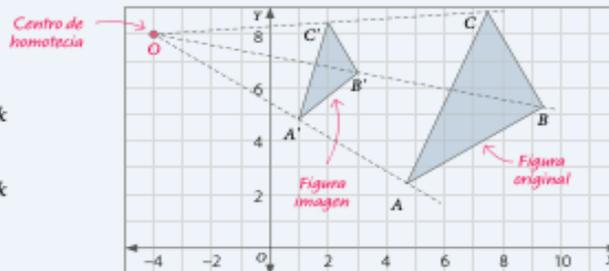
Se aplica una homotecia de centro O sobre el triángulo ABC , obteniendo el triángulo $A'B'C'$.

La **razón de homotecia** (k) corresponde al cociente ($k \neq 0$) entre la distancia desde O a cada vértice de la figura imagen y la distancia desde O a cada vértice de la figura original

Además, se cumple que la razón de longitud de dos segmentos homotéticos es igual a la razón de homotecia (k).

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$$

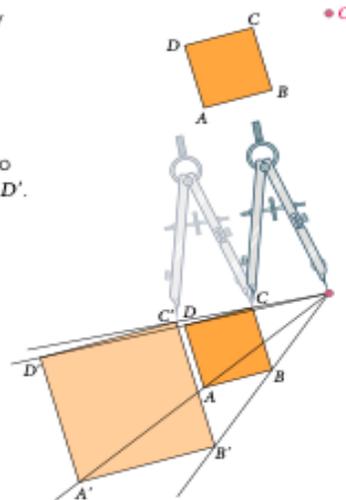
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$$



• EJEMPLO 2

Utilizando regla y compás, explica cómo puedes realizar una homotecia de razón $k = 2$ y centro en O sobre el cuadrado $ABCD$.

- 1° Con la regla, dibuja rectas que partan desde el punto O y pasen por cada uno de los vértices del cuadrado $ABCD$.
- 2° Ubica el compás con centro en O y radio \overline{OA} y copia la distancia sobre la misma recta, pero ahora con centro en A . Así obtendrás el punto imagen A' . Repite el proceso con todos los vértices para obtener las imágenes B' , C' y D' .
- 3° Une los puntos A' , B' , C' y D' para obtener el cuadrado imagen $A'B'C'D'$.



RECURSO WEB

Para saber más acerca de la homotecia, puedes ver el siguiente video:
<https://youtu.be/pi50k-v2IC4>



¿Qué sucedería con la figura imagen del EJEMPLO 2 si la razón de homotecia fuera $k = 1$?

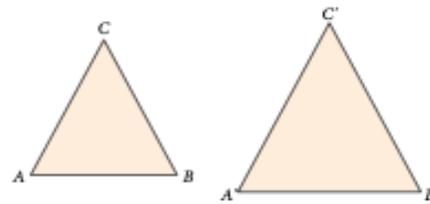
¿Y si fuera $k = 0,5$? Comenta con tus compañeros.

Figura 4: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio

(MINEDUC 2021, p. 108)

■ EJEMPLO 3

A un triángulo ABC de lados 3 cm, 5 cm y 6 cm se le aplica una homotecia de razón $k = 3$. Determina las medidas de los lados del triángulo imagen $A'B'C'$.



Supongamos que $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm y $CA = 6$ cm.

Luego, como $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$, entonces:

$$\begin{aligned} \rightarrow A'B' &= k \cdot AB \\ \rightarrow B'C' &= k \cdot BC \\ \rightarrow C'A' &= k \cdot CA \end{aligned}$$

Así, $A'B' = 3 \cdot 3 = 9$, $B'C' = 3 \cdot 5 = 15$ y $C'A' = 3 \cdot 6 = 18$.

Por lo tanto, las medidas de los lados del triángulo imagen son:

$$A'B' = 9 \text{ cm}, B'C' = 15 \text{ cm y } C'A' = 18 \text{ cm.}$$

RECURSO WEB

Para profundizar en las propiedades de la homotecia, explora la actividad propuesta en el siguiente sitio: <https://m9.cl/kgg>



■ ACTIVIDADES EN TU CUADERNO

Considera los datos del EJEMPLO 3 y responde.

1. Calcula el perímetro de los triángulos ABC y $A'B'C'$. ¿Cuál es la razón entre estos valores?
2. ¿Hay alguna relación entre la razón de los perímetros y el valor de k ? ¿Crees que sucederá lo mismo con el área? Explica.

■ EJEMPLO 4

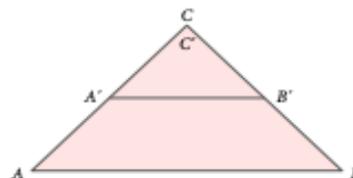
En la figura se muestra una homotecia de centro C y razón $0 < k < 1$ del triángulo ABC . ¿Qué proporción se puede establecer?

El triángulo ABC es homotético al triángulo $A'B'C'$ y, además, $C' = C$.

Luego, considerando el punto C como centro de homotecia, la razón está dada por:

$$k = \frac{CA'}{CA} = \frac{CB'}{CB}$$

Esta proporción se conoce como el teorema particular de Tales, y lo estudiarás en detalle más adelante en esta lección.



■ ACTIVIDADES EN TU CUADERNO

1. Construyan un triángulo ABC cualquiera y apliquen una homotecia de razón $k = \frac{3}{4}$ y centro el vértice A . Deduzcan alguna proporción que se establezca entre los lados del triángulo original y el triángulo imagen.

Figura 5: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio

(MINEDUC 2021, p. 109)

Homotecia de forma vectorial

En la imagen se muestra un logotipo universal que encontramos en papeleras, contenedores y otros lugares para referirse al reciclaje.

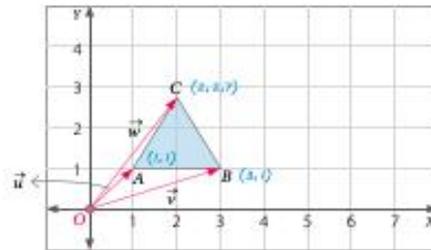


Representemos este símbolo en el plano cartesiano con el triángulo ABC y los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , que van desde el origen (O) a cada uno de los vértices del triángulo.

Tenemos que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, cuyas componentes son $(1, 1)$. Luego, al multiplicar por 2 el vector \vec{u} se obtiene:

$$2 \cdot \vec{u} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (2, 2)$$

- ¿Cuáles son las componentes de los vectores \vec{v} y \vec{w} ?
- ¿Cuál es el producto que obtienes al multiplicar los vectores \vec{v} y \vec{w} por 2?

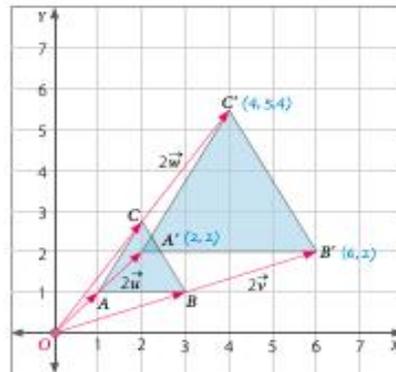


Al ubicar estos tres nuevos vectores en el plano cartesiano, obtenemos el triángulo $A'B'C'$, que resulta ser **homotético** al triángulo original.

$$2\vec{u} = \overrightarrow{OA'}$$

$$2\vec{v} = \overrightarrow{OB'}$$

$$2\vec{w} = \overrightarrow{OC'}$$



■ EJEMPLO 1

Identifica la razón de homotecia en el ejercicio anterior.

Como los triángulos son homotéticos, sus lados homólogos son proporcionales, por lo que se cumple

que $\frac{A'B'}{AB} = k$, entonces, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{2} = 2 \dots$

Figura 6: Abordaje Vectorial de la Homotecia según texto del estudiante de primero medio

(MINEDUC 2021, p. 114)

■ **ACTIVIDADES EN TU CUADERNO**

1. **Construye cada vector utilizando regla y compás, y explica el procedimiento a tus compañeros.**

a. Construir $3\vec{AB}$ a partir de \vec{AB} .

b. Construir $-2\vec{EF}$ a partir de \vec{EF} .



2. Considera los puntos $A(-3, 6)$ y $O(0, 0)$ y realiza lo pedido.

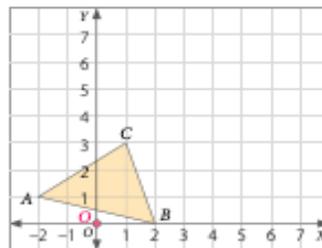
a. Construye el vector \vec{OA} .

b. Calcula las coordenadas del vector $3\vec{OA}$.

c. Determina la imagen del vector $3\vec{OA}$ que se obtiene mediante una homotecia de centro $O(0,0)$ y razón de homotecia $k = -3$.

d. ¿Qué ocurrió con el sentido del vector $3\vec{OA}$ luego de aplicar la homotecia? Explica.

3. **Analiza la figura, y luego resuelve.**



a. Aplica una homotecia al triángulo ABC considerando centro de homotecia $O(0, 0)$ y razón $k = -2$.

b. Aplica una homotecia al triángulo ABC considerando centro de homotecia $O(0, 0)$ y razón $k = 2$.

c. Aplica una homotecia al triángulo imagen $A'B'C'$ del ejercicio b. considerando centro de homotecia $O(0, 0)$ y razón $k = 0,5$.

4. **Realiza la siguiente actividad usando un software educativo. Puedes utilizar el software GeoGebra ingresando en el sitio <https://www.geogebra.org/geometry>. Luego, considera los siguientes pasos:**

1º Haz clic en y construye un polígono.

2º Con el botón ubicas el centro de homotecia.

3º Con el botón haces clic en el centro de homotecia de la figura, y luego debes ingresar el valor de la razón de homotecia.

Construye un cuadrilátero de vértices $A(-2, 4)$, $B(-4, 4)$, $C(-5, 1)$ y $D(-1, 1)$, y luego aplica una homotecia de centro $O(1, -1)$ y valor de la razón $k = -0,5$. ¿Cuáles son las coordenadas homotéticas de cada vértice?

Figura 7: Ejercicios entregados por el texto del estudiante de primero medio

(MINEDUC 2021, p. 118)

A través de las imágenes es posible observar que posteriormente el abordaje que prevalece es la representación verbal, simbólica, algebraica y vectorial, en donde se generan instancias para que el estudiante aplique matemáticamente el contenido y ejercite de manera reiterada.

Si bien el Ministerio de Educación logra cumplir propiamente tal con lo matemático, queda al debe con el último punto del OA8, ya que no logra acercarse del todo el concepto a la vida cotidiana del estudiante, lo más cercano fue establecer la relación con las Araucarias y el medioambiente, pero no logra cumplir a cabalidad el objetivo de la “vida cotidiana”.

Aprendizaje basado en proyectos (ABP)

La actualidad demanda que las escuelas, colegios, instituciones y universidades propicien espacios para que los estudiantes construyan su conocimiento y sean agentes activos de su propia enseñanza buscando soluciones a problemas reales, a través de la aplicación del aprendizaje basado en proyectos de manera transversal en las diferentes disciplinas como parte fundamental del desarrollo de competencias y habilidades que se involucren en la investigación.

El Aprendizaje Basado en Proyectos es una propuesta innovadora que formula una enseñanza muy distante de la tradicional, según Blank (1997) esta estrategia de enseñanza constituye un modelo de instrucción auténtico en el que los estudiantes planean, implementan y evalúan proyectos que tienen aplicación en el mundo real más allá del aula de clase. El ABP propone que, a través de proyectos dirigidos a la resolución de problemas de la vida cotidiana, o de su entorno, el estudiante logra ser el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje, implicándose activamente en su propio desarrollo cognitivo creando estrategias en pos de la resolución del problema propuesto, y así incorporar significativamente los contenidos en su formación. El docente por su parte es quien crea la situación de aprendizaje que permita que los estudiantes puedan desarrollar el proyecto, lo cual implica buscar materiales, localizar fuentes de información, gestionar el trabajo en grupos, valorar el desarrollo del proyecto, resolver dificultades, controlar el ritmo de trabajo, facilitar el éxito del proyecto y evaluar el resultado. (Trujillo, 2014, p.18)

Según Trujillo (2014) el Aprendizaje Basado en Proyectos consta de 8 elementos fundamentales:

1. **Contenido significativo:** Le docente debe ser capaz de localizar el contenido esencial dentro del currículum educativo para desarrollar el proyecto, y los estudiantes por su lado deben encontrar la significancia de este.
2. **Necesidad de saber:** Activar a los estudiantes desde la emotividad, crear un espacio que promueva la discusión y el debate resulta imprescindible para comenzar este trabajo.
3. **Una pregunta que dirija la investigación:** El planteamiento de una interrogante con el objetivo de desafiar a los estudiantes, y que se caracteriza por tener respuesta abierta y envolver la motivación del proyecto.
4. **Voz y voto para los estudiantes:** Es importante promover la autonomía en los estudiantes, dentro de este escenario, discutir las alternativas de cómo abordar el proyecto para solucionar la problemática, definir los tiempos, etc.
5. **Competencias del siglo 21:** “Un buen proyecto debería darle a los estudiantes la posibilidad de practicar y así aprender las competencias demandadas en nuestros tiempos: expresión del pensamiento crítico, comunicación efectiva, uso de tecnologías y trabajo en equipo.” (Trujillo, 2014, p.25)
6. **Investigación lleva a innovación:** En este punto, es fundamental incentivar a los estudiantes a investigar, es decir, a partir de la interrogante base del proyecto generar más preguntas o hipótesis coherentes a este, para así construir recursos o vías que resuelvan la problemática.
7. **Evaluación, retroalimentación y revisión:** Le docente debe supervisar los instrumentos trabajados por sus estudiantes en la realización del proyecto, dirigiendo esta siempre con críticas constructivas, tanto de su parte como de los estudiantes, aprendiendo que el “trabajo de calidad no sale del primer intento, que en la vida real nuestro trabajo está sujeto a continua revisión” (Trujillo, 2014, p.26)
8. **Presentación del producto final ante una audiencia:** Exponer los resultados al público en general (internos y externos a la comunidad educativa), reflexionando sobre los nuevos conocimientos obtenidos.

En síntesis, se puede definir el ABP *“como una modalidad de enseñanza y aprendizaje centrada en tareas, un proceso compartido de negociación entre los participantes, siendo su objetivo principal la obtención de un producto final.”* (García-Varcácel & Basilotta, 2017, p.114)

Aprendizaje Basado en Proyectos en Chile según MINEDUC

La serie de cambios acelerados que actualmente nos afectan en los ámbitos social, político, tecnológico y económico son el resultado del desarrollo histórico de procesos que vienen transformando la sociedad desde siglos anteriores. El sistema educativo juega hoy un rol crucial en los nuevos retos sistémicos a los que nos enfrentamos como comunidad, un desafío colectivo en el que participan gobiernos, ciudadanía, instituciones públicas y privadas y todos los actores de la educación. Como espacio de formación de los ciudadanos del futuro, la educación tiene el gran desafío de ponerse a la vanguardia del proceso de transformación. Un cuadro que refleja este reto es el que presenta Charles Fadel en su libro *“La Educación en Cuatro Dimensiones”* (2015), que muestra el desfase entre la formación académica y el desarrollo tecnológico y sus consecuencias. El siglo XXI demanda un nuevo modelo de aprendizaje, que promueva que los estudiantes sean constructores de conocimiento, y protagonistas de su proceso de aprendizaje. Estos son elementos centrales del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), metodología que los profesores utilizan para que sus estudiantes adquieran conocimientos académicos, así como desarrollen habilidades cognitivas y socioafectivas, trabajando en el desarrollo de un proyecto por un período de tiempo extendido, investigando y respondiendo a una pregunta compleja.

De esta forma, durante los últimos 3 años, se ha ido implementando paulatinamente el ABP en el sistema educativo chileno. Por parte de la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación en el año 2019 se emitió el documento *“Metodología de aprendizaje basado en proyectos”*, el cual existe con el fin de establecer orientaciones curriculares para 3° y 4° medio, además de entregar una basta información sobre el ABP con el objetivo de introducir a cualquier docente que quiera empaparse de dicha metodología. Uno de los puntos tratados establece explícitamente que:

La integración disciplinar permite fortalecer conocimientos y habilidades de pensamiento complejo que faculten la comprensión profunda de ellos. Para lograr esto, es fundamental que los docentes incorporen en su planificación instancias destinadas a trabajar mediante la metodología del Aprendizaje Basado en Proyecto (ABP) y en Resolución de Problemas. Por este motivo, se integran orientaciones concretas en los enfoques de cada asignatura y en los programas de estudio, que facilitarán esta tarea a los docentes y que fomentarán el trabajo y la planificación conjunta de algunas actividades entre docentes de diferentes asignaturas. (Metodología de aprendizaje basado en proyectos, 2019, p. 6)

Esto evidencia que la iniciativa del MINEDUC de trabajar con proyectos cada vez toma más fuerza, ya que ha establecido formal y explícitamente que los docentes integren la metodología en sus planificaciones.

Mientras, para los otros niveles educativos desde hace 5 años distintas entidades sin fines de lucro han implementado a lo largo del país esta modalidad de enseñanza, capacitando a los docentes y directivos han logrado excelentes resultados en el aprendizaje de los estudiantes. Algunas de estas entidades o fundaciones son Enseña Chile, Educación 2020, Programa PACE UCH y EducarChile con la colaboración del Ministerio de Educación, Ministerio del Medio Ambiente, Embajada de Finlandia, entre otros. Cada entidad tiene en sus registros cómo y dónde implementan o han implementado los proyectos, además de los resultados obtenidos.

Un documento elaborado por el Área de Formación de la Fundación Enseña Chile (2015) señala que trabajar con Aprendizaje Basado en Proyectos abrió grandes posibilidades para desafiar las habilidades de los estudiantes y de esta forma entregarles los conocimientos necesarios para mejorar su aprendizaje. Por lo tanto, esta metodología demanda un rol diferente del estudiante en su proceso de aprendizaje, ya que debe integrar hábitos de estudio que le permitan expandir su autonomía y competencias. Le estudiante al ser gestor e involucrarse en su aprendizaje se verá motivado porque logra relacionar de manera práctica lo aprendido con su vida cotidiana.

El Centro de Innovación del MINEDUC declara que la gran mayoría de los estudiantes, especialmente los de menores oportunidades, no están preparados para enfrentar los desafíos del siglo XXI. Si se continúa enseñando con las mismas metodologías y estrategias pedagógicas del pasado, tomará mucho tiempo lograr una mejor calidad en la educación. Frente a este desafío, se ha visto que el desarrollo de las llamadas habilidades del siglo XX (creatividad, aprendizaje colaborativo, empatía, investigación, entre otras) fomentan un ambiente de aprendizaje práctico, lúdico y experiencial en las salas de clases y prepara a los estudiantes para el mundo del trabajo que les tocará vivir. Además, el Ministerio de Educación expresa que buscan fomentar el desarrollo de las “competencias del siglo XXI” de los estudiantes de Chile, apoyando su éxito académico, personal y profesional, por lo que el ABP es una metodología de aprendizaje que desarrolla dichas competencias, ayudándoles a enfrentar los desafíos de sus vidas y del mundo que heredarán.

CAPITULO 3: Marco Metodológico

En este capítulo se revisará la metodología de investigación a utilizar en la presente tesina, la cual tiene un enfoque cualitativo, ya que corresponde a una propuesta sobre un concepto específico, la homotecia. Esta propuesta se ejecutará para poder recolectar datos y así finalmente analizar los resultados.

Es importante señalar que esta investigación se realiza en contexto pandemia, por lo que la experimentación de la propuesta se ve afectada por la nueva modalidad no presencial de enseñanza, la cual se detallará en este apartado.

Para el análisis de datos utilizaremos los pasos de la Ingeniería Didáctica, metodología que se detalla a continuación.

Ingeniería Didáctica

Nos basaremos en el capítulo 4 “Ingeniería Didáctica” (1995. Artigue) del libro Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (1995. Artigue, Douady, Moreno y Gómez) para explicar esta metodología.

La Ingeniería Didáctica es una metodología de investigación matemática, que surge a principios de los años ochenta, la cual se asemeja a un trabajo de ingeniero, ya que se caracteriza por tener una secuencia.

Este método pretende tener un análisis completo de la investigación de una situación didáctica matemática, lo cual comprende análisis a priori y a posteriori, los cuales se validan luego de su confrontación, por lo que es muy importante registrar todo lo sucedido en cada fase.

Para que la investigación sea un éxito, es muy importante considerar en todo momento el objetivo de investigación en cada caso. Esta metodología se destaca por ser amoldable a los distintos objetivos de investigación, ya que enfatiza en su funcionamiento metodológico y no los objetivos.

Las fases de investigación son:

1. Los análisis preliminares

En esta fase es uno de los principales apoyos a las fases siguientes, ya que se analiza no solo teoría, sino que también diversos factores importantes que influyen en quienes serán parte del estudio, tales como análisis de sus conocimientos previos, qué tipo de educación han tenido, cuáles son sus principales errores y dificultades, cuáles son las restricciones por considerar, etc.

Cabe señalar, que los factores a analizar dependerán de los objetivos de investigación, por lo que estos pueden ser distintos en cada caso.

2. La concepción y el análisis a priori

La concepción corresponde al proceso donde se desarrolla el instrumento con el cual se actuará, tomando en consideración los factores estudiados en el análisis preliminar, además de decidir las variables a considerar en la investigación.

Con esto, se realiza el análisis a priori que corresponde a hipótesis que tendrán que ser validadas al final de la investigación, este análisis es descriptivo y predictivo sobre el comportamiento de los estudiantes en la experimentación.

3. Experimentación, análisis a posteriori y validación

La experimentación corresponde a la fase donde se presenta el instrumento a estudiantes, se deben recoger los datos en base a observación de la situación, además de preguntas que hicieron estudiantes y sus respuestas.

Con los datos recolectados en la fase de experimentación, se sigue a la siguiente fase de análisis a posteriori, donde se analizan y comparan las distintas situaciones que se generaron en la experimentación. Se pueden complementar el análisis con teorías y estudios anteriores.

Luego, viene el proceso de validación donde se confronta el análisis a priori con el análisis a posteriori, para fundamentar la validación de las hipótesis de la investigación.

Experimentación

En un principio planeábamos experimentar la propuesta completa a los estudiantes de los tres colegios donde estábamos realizando nuestras prácticas, sin embargo, por la considerable disminución de horas pedagógicas de la asignatura matemáticas, solo un colegio nos dio la oportunidad de realizar las actividades, donde pudimos experimentar la primera actividad de la propuesta, no hubo tiempo de realizarla las dos actividades restantes.

La experimentación se lleva a cabo en el Colegio Cardenal Carlos Oviedo Cavada, institución que recibe a niños en situación de vulnerabilidad de la comuna de Maipú, donde se están realizando las actividades académicas de manera on-line.

La actividad 1 se presentará al curso primero medio A de 40 estudiantes, quienes realizarán la actividad de manera on-line por la plataforma Zoom, donde las investigadoras estarán presentes. La recolección de datos de esta actividad se realiza de dos formas, dependiendo de si los estudiantes cumplen con los requisitos para la actividad o no. El detalle es el siguiente:

- Los estudiantes que cumplen con los requisitos, realizan la actividad individualmente contestando las preguntas en la programación, quedando registro en un archivo Excel de las respuestas.
- Los estudiantes que no cumplen los requisitos, realizan la actividad grupalmente entregando sus respuestas por chat de zoom a la investigadora a cargo del grupo quien recolecta la información.

CAPITULO 4: Propuesta Didáctica

Diseño de la propuesta

Como se mencionó en el capítulo anterior, haremos una propuesta de tres actividades sobre homotecia, las cuales tienen como objetivo que los estudiantes conozcan el concepto de homotecia y lo desarrollen usando la socioepistemología, es decir, usando conceptos cotidianos para ellos.

El tema por tratar se enmarca en el currículum nacional en el curso de primero medio con el objetivo de aprendizaje número 8 (OA08):

Mostrar que comprenden el concepto de homotecia:

- Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano.
- Midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia.
- Aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con software educativo.
- Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas. (MINEDUC. 2015)

Donde se podrán visualizar los siguientes indicadores de evaluación del OA:

- Representan modelos de la homotecia de manera concreta (fuente de luz puntual, vela, ampolleta, lápiz, bloque, etc.).
- Reconocen las propiedades de la homotecia, como paralelismo, conservación del ángulo y conservación de razones.
- Conjeturan sobre el factor de la homotecia.
- Resuelven problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas. (MINEDUC. 2015)

Siguiendo las recomendaciones del MINEDUC, realizaremos estas actividades usando la metodología aprendizaje basado en proyectos. Donde se plantea el proyecto “Construir una piñata” a estudiantes de primero medio.

En la primera actividad, los estudiantes recordarán el término semejanza mediante una programación en mBlock, en la cual podrán interactuar para saber la relación de tamaños de figuras proporcionales a través de la luz de una linterna y la sombra formada por una plantilla. En la segunda actividad deberán activar sus conocimientos previos sobre razones y proporciones con un problema en el que deben calcular dimensiones de sombras al cambiar la distancia de una plantilla a una linterna. Finalmente, en la tercera actividad los estudiantes aplicarán todo lo aprendido durante las clases anteriores sobre las propiedades de homotecia para construir una piñata usando luz y sombra. Cabe destacar que recomendamos a la docente que entre la segunda y tercera actividad explique los contenidos de homotecia, asociando y usando como ejemplo las actividades anteriores.

La idea es que, en estas tres actividades, los estudiantes puedan relacionar la homotecia con algo tan cotidiano y natural como las sombras, y así, de esta manera acercaremos la homotecia a estudiantes generando un aprendizaje significativo.

Actividad 1

La actividad consiste en una programación mBlock realizada por nosotras, donde los estudiantes tendrán que interactuar con ella, realizando actividades y contestando preguntas para nuestro posterior análisis.

Requerimientos para la ejecución de la actividad:

- Computador, se encuentra una opción para realizar la actividad para estudiantes que no cuenten con éste.
- Internet

Objetivos para estudiantes:

- Entender la semejanza de figuras como la misma figura, pero de distinto tamaño, manteniendo las proporciones.
- Comprender lo que sucede con la sombra proyectada en una pared de una plantilla al acercarla o alejarla de la luz.

Objetivo para investigadoras:

- Diagnosticar si los estudiantes comprenden la semejanza, como conocimiento previo de homotecia.
- Diagnosticar si los estudiantes son capaces de comprender el fenómeno ocurrido con la sombra proyectada en una pared de una plantilla al acercarla o alejarla de la luz.

Diseño de la actividad:

La actividad corresponde a la interacción entre el estudiante y la programación, las respuestas de cada estudiante quedan registradas en un archivo Excel que maneja el docente.

En primer lugar, los estudiantes deberán llenar sus datos personales



Figura 8: Datos personales de estudiantes



Figura 9: Datos personales de estudiantes

Es muy importante que los estudiantes escriban bien sus datos ya que con esto la programación podrá registrar sus respuestas, en el caso de que no lo hagan, la programación les pedirá que lo hagan nuevamente hasta que los datos que están en el Excel coincidan con los que escriban los estudiantes.



Figura 10: Corrección de datos personales de estudiantes



Figura 11: Corrección de datos personales de estudiantes

Cuando los estudiantes logren registrarse, a través de diálogos el panda introducirá con una historia sobre lo que ha hecho durante la cuarentena ya que tuvo que reinventarse y crear una PYME de piñatas, realidad que han vivido la mayoría de las personas por la actual pandemia. Además, les advierte que necesitan hacerlas de forma más rápida, pero para esto, primero, otro personaje les ayudará a comprender algunas palabras que son necesarias.



Figura 12: Introducción actividad



Figura 13: Introducción actividad



Figura 14: Introducción actividad



Figura 15: Introducción actividad



Figura 16: Introducción actividad



Figura 17: Introducción actividad

En seguida, la programación cambiará de fondo y aparecerá un nuevo personaje, este se encargará de hacer la definición de semejanza. Comenzará advirtiéndote que a pesar de que usamos como sinónimos las palabras “parecido” y “semejante”, matemáticamente esto no es así. Para esto muestra ejemplos de cómo comúnmente usamos estas palabras como sinónimos, utilizando estas frases: “estos edificios son muy parecidos” y “estos pájaros son semejantes”.



Figura 18: Introducción actividad



Figura 19: Concepto semejante

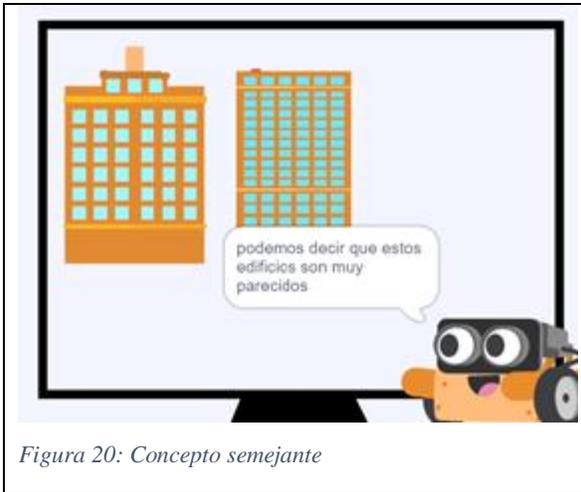


Figura 20: Concepto semejante



Figura 21: Concepto semejante

Luego, señala que matemáticamente estas palabras no se pueden usar como sinónimos y menciona la definición de semejanza: “La semejanza hace referencia a forma idéntica, igualdad de los ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes”. Cabe destacar que esta definición es presentada conforme a lo planteado por los textos escolares del Ministerio de Educación.



Figura 22: Concepto semejante



Figura 23: Concepto semejante

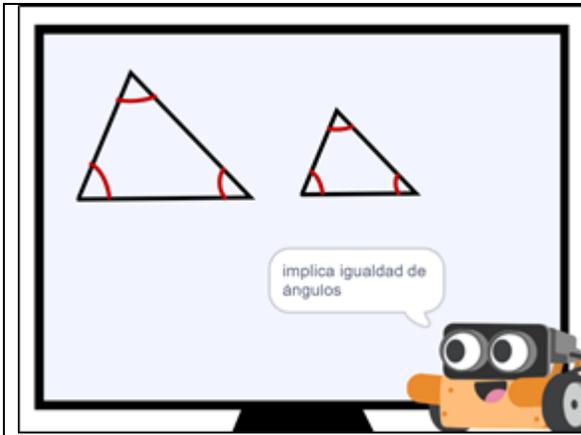


Figura 24: Concepto semejante

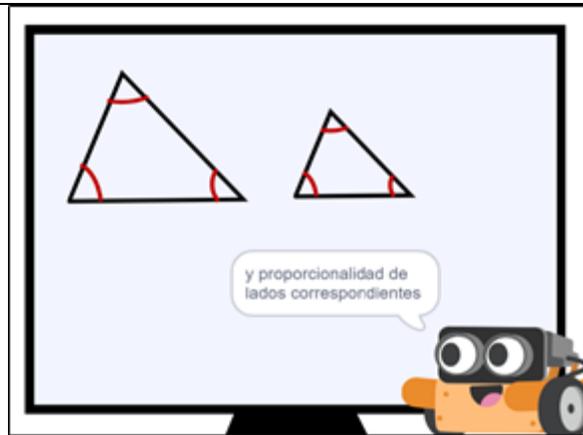


Figura 25: Concepto semejante

Posteriormente, se muestra un ejemplo con dos fotos de distinto tamaño de la arquera de la selección y se afirma que a pesar de su tamaño estas son semejantes, ya que sus ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. Para mostrar esto agranda la imagen más pequeña hasta hacerlas del mismo tamaño y finalmente se expresa que ahora son congruentes.



Figura 26: Ejemplo semejanza

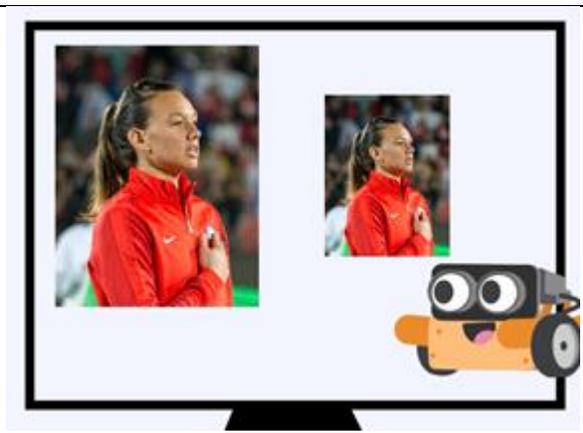


Figura 27: Ejemplo semejanza



Figura 28: Ejemplo semejanza

Para concluir con esta etapa de la programación se realiza la primera pregunta:

P1. Entonces, ¿Cómo definirías la semejanza matemáticamente?

La respuesta que entreguen los estudiantes quedará guardada en la hoja de cálculo de google en la fila correspondiente al nombre de los estudiante.



Figura 29: Pregunta 1

Después de enviar la pregunta, se cambiará el fondo y el personaje, aparecerá el panda y un murciélago que introducirá la próxima actividad que tiene relación con la señal que utiliza Batman.



Figura 30: Introducción a segunda parte



Figura 31: Introducción a segunda parte

Al comienzo de la siguiente actividad se presentan los elementos que son necesarios para crear la señal de Batman: una linterna, una lámina con la figura que se quiere proyectar, en este caso un murciélago y una pared para proyectar esta figura. Luego, se invitará a los estudiantes a que exploren lo que pueden hacer con el botón derecho e izquierdo.

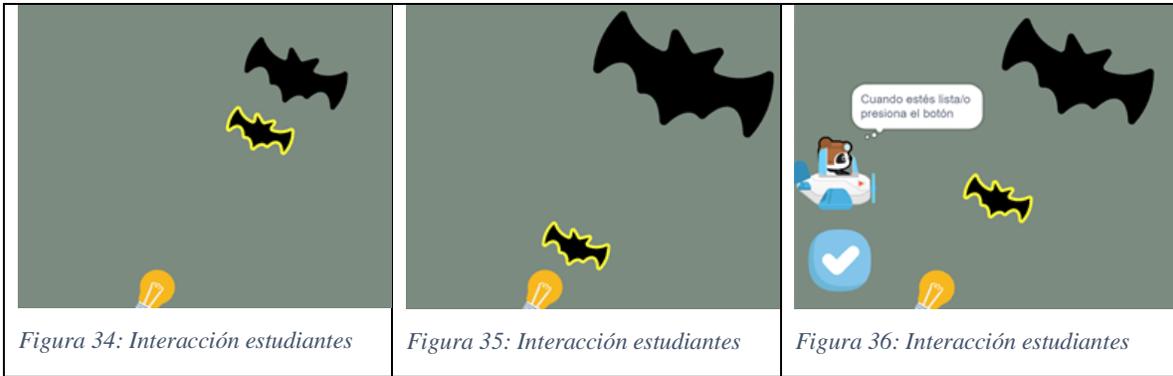


Figura 32: Introducción a segunda parte



Figura 33: Introducción a segunda parte

Al utilizar estos botones se podrán dar cuenta de que el botón derecho aleja la lámina de la luz haciendo que la proyección se vea más pequeña y al presionar el botón izquierdo la lámina se acerca a la luz generando que la proyección se vea más grande. Después de unos segundos se les mostrará un mensaje a los estudiantes para que cuando estén listos presionen un botón.



Para finalizar se realiza una rutina del pensamiento donde se les harán las siguientes preguntas: ¿Qué veo?, ¿qué observo? y ¿qué pienso?, el objetivo de estas es que ellos reflexionen sin la necesidad de escribir o comentar sus respuestas. Por último deberán responder las siguientes preguntas:

P2. ¿Qué hace Batman para que la proyección del murciélago se vea más grande?

P3. ¿Qué pasa si Batman aleja la lámina de la luz?

P4. ¿El murciélago proyectado se parece al original? ¿son semejantes? ¿por qué?

Las respuestas que escriban los estudiantes quedarán registradas en la hoja de cálculo de google que maneja el docente.





Figura 39: Pregunta 2



Figura 40: Pregunta 3

Actividad 2

Esta actividad se presenta como un problema de una persona que hace piñatas, quien tiene que calcular la distancia a la que debe ubicar una plantilla de una luz para tener ciertos tamaños específicos de sombras. El problema lo pueden visualizar los estudiantes en un video que se encuentra en YouTube. Se recomienda realizar la actividad en equipos de 3 o 4 personas.

Objetivos para estudiantes:

- Calcular distancias utilizando proporcionalidad inversa

Objetivos para investigadoras:

- Diagnosticar si los estudiantes manejan los conceptos de razones y proporcionalidades.

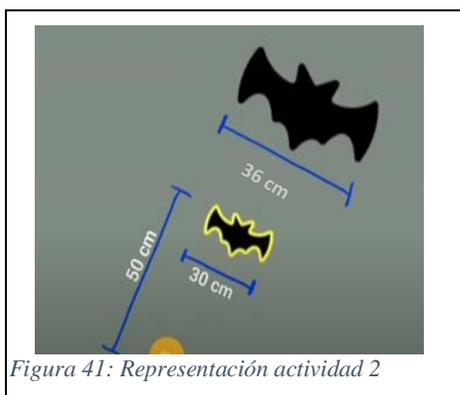
Diseño de la actividad

Se presenta el siguiente problema a los estudiantes en un video:

Daniela es una persona que trabaja haciendo piñatas, para poder hacerlas utiliza la estrategia de ubicar una plantilla de la forma de la piñata cerca de una linterna para que se proyecte su sombra en una pared y así poder visualizar la plantilla más grande.

Daniela sabe que, al ubicar una plantilla de 30 cm a una distancia de 50 cm de la linterna, la sombra proyectada de la plantilla será de 36 cm.

En el video, se muestra la siguiente representación de la situación planteada:



Actividad 3:

Es importante mencionar que para crear esta actividad nos guiamos en las habilidades dictadas por el currículum nacional en primero medio en la asignatura de matemática en la unidad 3: “Determinar el factor de una homotecia”.

Como se mencionó anteriormente, se recomienda que entre la actividad anterior y está le docente explique los contenidos de homotecia, ya que en la presente actividad esperamos que les estudiantes tengan los conocimientos necesarios para realizarla de forma autónoma, buscando sus propias estrategias para poder contestar las preguntas y lograr la construcción de una piñata.

Requerimientos para la ejecución de la actividad:

- Materiales para construir la piñata, les estudiantes decidirán cuáles utilizar.
- Láminas con diseño, le docente será le encargade de entregarlas.

Objetivos para estudiantes:

- Construir una piñata, utilizando la estrategia de luz y sombra.
- Decidir el tamaño de la piñata y calcular las distancias a las que se encuentran los elementos utilizados.
- Identificar y calcular el centro y razón de homotecia.

Objetivos para investigadoras:

- Determinar si les estudiantes comprenden el concepto de homotecia, aplican las aprendido para construir la piñata.
- Determinar si les estudiantes son capaces de elegir un tamaño y decidir las distancias a las que se encuentran los elementos utilizados.
- Determinar si les estudiantes logran identificar y calcular el centro y razón de homotecia.

Diseño de la actividad:

La actividad consiste en que los estudiantes apliquen los conceptos aprendidos en clases anteriores, utilizando la estrategia de luz y sombra para construir una piñata, al hacerlo serán libres de escoger el tamaño y los pasos a seguir para cumplir con este objetivo.

Se presentará el proyecto “Construir una piñata”, para esto le docente entregará tres láminas impresas de siluetas para que los estudiantes escojan una para construir la piñata, las láminas tendrán un ancho de 20cm. La piñata por construir deberá tener un tamaño entre 45cm y 80cm de ancho.

Se solicitará que los estudiantes propongan dos tamaños distintos, analicen algunas situaciones y respondan las siguientes preguntas:

- P1. ¿A qué distancia pusiste la lámina de la luz?
- P2. ¿De qué tamaño quedó la proyección?
- P3. ¿Cuál razón de la homotecia en cada caso?
- P4. Represente la situación con un dibujo y anote los datos
- P5. ¿Cuál es la razón de homotecia en cada caso?
- P6. ¿A qué distancia queda el centro de homotecia del extremo de la proyección?
- P7. ¿Por qué eligieron ese tamaño para la construcción y no el otro?

Luego, los estudiantes deberán construir la piñata con uno de los dos tamaños elegidos.

Finalmente, cada equipo de trabajo deberá presentar su piñata y mostrar los resultados a sus compañeros.

Las siluetas son:

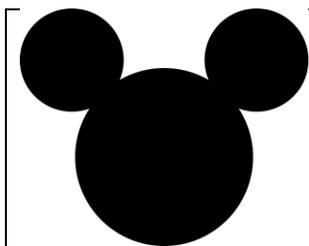


Figura 42: Lámina 1



Figura 43: Lámina 2



Figura 44: Lámina 3

Elaboración propia

Le docente podrá recomendar a los estudiantes una estrategia para la construcción, nosotras recomendamos el siguiente recurso digital encontrado en internet:

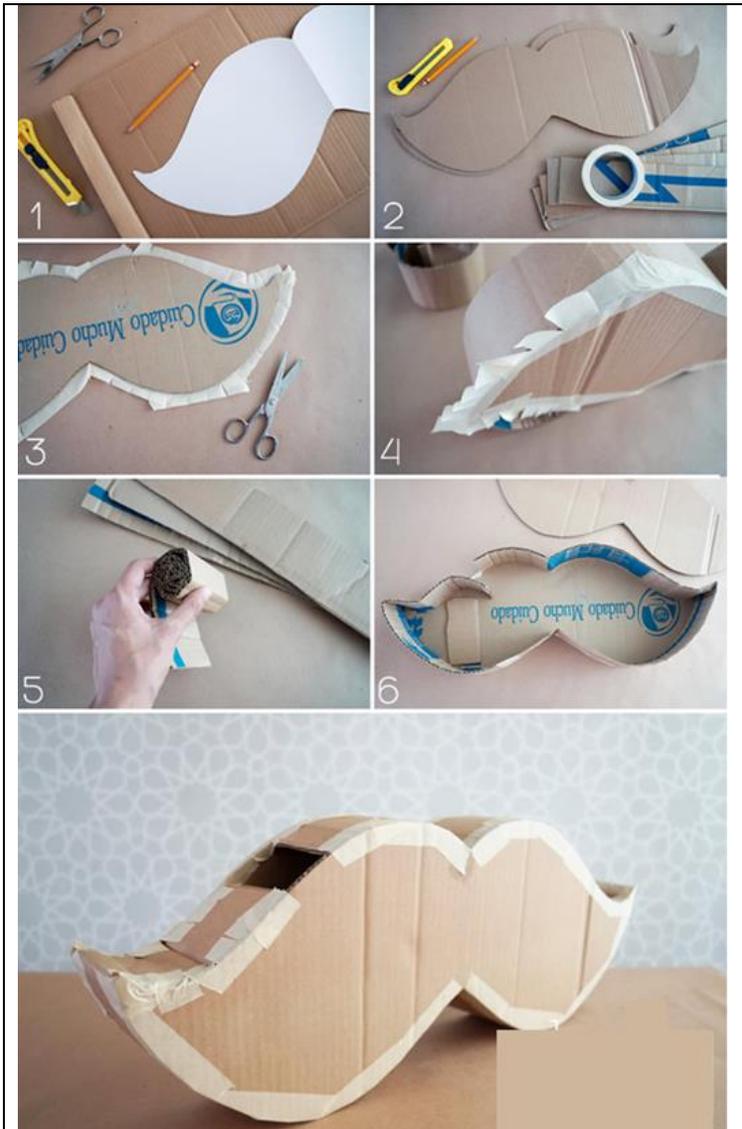


Figura 45: Recomendación de construcción de piñata

Recuperado de: <https://casahaus.net/diy-pinata-como-hacer-una-pinata-con-la-forma-que-quieras/>

Análisis de la propuesta

En esta sección se analizará la propuesta de actividades según la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

Análisis preliminar

Conocimientos previos

Los conocimientos previos de los estudiantes de primero medio para la ejecución de cada actividad son:

Actividad 1:

Contenido	Curso	Objetivo de Aprendizaje
Semejanza de triángulos	6° Básico	OA12: Construir y comparar triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y /o sus ángulos con instrumentos geométricos o software geométrico.
Razones y proporciones	7° Básico	OA08: Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: <ul style="list-style-type: none">- Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales.- Graficando los valores de la tabla.- Explicando las características de la gráfica. Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Tabla 2: Contenidos previos de actividad 1

Actividad 2:

Contenido	Curso	Objetivo de Aprendizaje
Razones	6° Básico	OA03: Demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo.
Proporción inversa	7° Básico	OA08: Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: <ul style="list-style-type: none">- Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales.- Graficando los valores de la tabla.- Explicando las características de la gráfica.- Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Tabla 3: Conocimientos previos de actividad 2

Actividad 3:

Contenido	Curso	Objetivo de Aprendizaje
Homotecia	1° Medio	OA08: Mostrar que comprenden el concepto de homotecia: <ul style="list-style-type: none">- Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano.- Midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia.- Aplicando propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con software educativo.- Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas.

Tabla 4: Conocimientos previos de actividad 3

Es importante señalar que todos los conceptos señalados como conocimientos previos son contenidos priorizados (nivel 1 y nivel 2) en el currículum por pandemia.

Análisis epistemológico de la homotecia

Este análisis se encuentra en el marco teórico de esta investigación.

Análisis didáctico del contenido según MINEDUC

Este análisis se encuentra en el marco teórico de la investigación, el cual se basa en el texto del estudiante de primero medio del MINEDUC.

Dificultades

Las principales dificultades para que los estudiantes puedan realizar las tres actividades son:

Actividad 1:

- Seguir correctamente las instrucciones para poder visualizar la programación correctamente.
- Tener acceso a computador, pues solo se puede realizar en este tipo de equipo. En la ficha de la actividad se encuentra una alternativa para que estudiantes sin este dispositivo puedan realizar la actividad de igual forma.
- Que los estudiantes no comprendan el concepto de semejanza.
- Que los estudiantes no entiendan la relación entre el tamaño de la sombra de la figura y la ubicación de la plantilla con la luz.

Actividad 2:

- Que los estudiantes no recuerden los conocimientos previos.
- Que por la modalidad on-line los estudiantes no tengan la posibilidad de realizar la actividad en equipo.

Actividad 3:

- Que los estudiantes no recuerden los conocimientos previos.
- Que por la modalidad on-line los estudiantes no tengan la posibilidad de realizar la actividad en equipo.

Concepciones y análisis a priori

Actividad 1:

La actividad se presentará de manera on-line al curso de primero medio A de 40 estudiantes del Colegio Cardenal Carlos Oviedo Cabada. Se dispondrá de una hora cronológica para realizar la actividad completa.

En primer lugar, se deben dar las instrucciones a los estudiantes para poder acceder a la programación, en este momento es importante que el docente sea capaz de distinguir qué estudiantes no están desde un computador o no pudieron acceder a la programación para que puedan realizar la actividad guiados por el docente (en el anexo se detalla cómo realizar esta opción).

Luego que empieza la programación, es importante que el estudiante quede bien registrado para un correcto análisis en la experimentación, de esta manera los estudiantes ya están en condiciones de realizar la actividad.

Una vez que empieza la programación los estudiantes tendrán que responder las preguntas que van apareciendo.

Se espera que las respuestas entregadas por los estudiantes sean de carácter intuitivo, es decir, que respondan según lo que entendieron durante la programación de cada concepto o fenómeno.

Las respuestas esperadas a cada pregunta son las siguientes:

Preguntas	Respuestas esperadas
P1: ¿Cómo definirías la semejanza matemáticamente?	R1. Definición de semejanza de figuras según MINEDUC, que corresponde a la semejanza de figuras como figuras con proporcionalidad de lados correspondientes y con ángulos correspondientes congruentes. (Fresno, Torres y Ávila. 2020) R2. Figuras iguales, pero de distinto tamaño R3. Figuras proporcionales

	R4. Figuras con todos sus ángulos iguales
P2: ¿Qué hace Batman para que la proyección del murciélago se vea más grande?	Batman acerca la lámina a la luz.
P3: ¿Qué pasa si Batman aleja la lámina de la luz?	La sombra se hace más pequeña.
P4: ¿El murciélago proyectado se parece al original? ¿Son semejantes? ¿Por qué?	Sí, son semejantes, porque... Le estudiante debe justificar con alguna de las respuestas esperadas de P1.

Tabla 5: Respuestas esperadas actividad 1

Las preguntas evalúan el logro de los objetivos de la actividad, en este caso la P1 y P4 evalúan el objetivo 1, mientras las P2 y P3 evalúan el objetivo 2.

Actividad 2:

Según el diseño de esta actividad se recomienda que la realicen en grupos de trabajo (3 a 4 personas), por lo que el primer paso es que los estudiantes organicen sus grupos.

Luego el docente mostrará el video de la actividad, entregará 30 minutos para resolver el problema, donde cada equipo deberá entregar sus respuestas para finalmente exponerlas al sus compañeros.

El docente debe recomendar a los estudiantes que primero analicen la situación, luego encuentren una estrategia y calculen las soluciones y finalmente concluyan.

A continuación, se mostrará lo que se espera de cada grupo de trabajo y luego se indicarán algunas posibles preguntas que pueden realizar los estudiantes al docente durante el desarrollo de la actividad.

Respuestas esperadas

Análisis de datos

En un primer momento los estudiantes deberán analizar la situación y datos que se presentan.

Se espera que los estudiantes identifiquen lo siguiente:

<p>Existen 3 variables:</p> <p>V1.Tamaño de la lámina (en cm)</p> <p>V2.Distance a la que se ubica la lámina de la luz (en cm)</p> <p>V3.Tamaño de la sombra proyectada (en cm)</p>
<p>Clasificación y relación de las variables:</p> <ul style="list-style-type: none"> • La variable V1 es una constante, pues su valor no varía, ya que siempre se utilizará la misma lámina. • La variable V3 depende de la variable V2, por lo tanto, V2 es la variable independiente (X) y V3 es la variable dependiente (Y).
<p>Contenido a tratar: Proporcionalidad inversa, pues a medida que la variable V2 aumenta, la variable V3 disminuye.</p>

Tabla 6: Análisis de datos

Estrategias

Al detectar que el problema se soluciona utilizando la proporcionalidad inversa, se espera que:

1. Les estudiantes organicen los datos identificando a qué variable corresponde cada valor.

A modo de ejemplo, se presentarán una posible organización:

V1 (cm)	V2 (cm)	V3 (cm)
30	50	36
30	X_1	45
30	X_2	80

Tabla 7: Organización de datos opción 1

Como los estudiantes ya saben que la variable V1 es constante, puede que la omitan, quedando de la siguiente manera:

V2 (cm)	V3 (cm)
50	36

X_1	45
X_2	80

Tabla 8: Organización de datos opción 2

2. Estudiantes encuentren una estrategia que les acomode para realizar los cálculos y encuentren las soluciones.

Según la metodología de enseñanza de proporciones que tuvieron en séptimo básico, creemos que hay dos alternativas posibles para encontrar la solución:

1)

Encontrar la constante de proporcionalidad (k) dada por: $k = x \cdot y$.

En este caso, utilizando los datos entregados tenemos que: $k = 50 \cdot 36 = 180$

Luego, se tienen que encontrar los valores solicitados X_1 y X_2 , (i) planteando ecuaciones o (ii) dividiendo constante por el valor V_3 o (iii) realizando el cálculo mental.

(i)

$$X_1 \cdot 45 = 180$$

$$X_2 \cdot 80 = 180$$

(ii)

$$X_1 = \frac{180}{45} = 40$$

$$X_2 = \frac{180}{80} = 22,5$$

(iii) ¿Por cuál número se debe multiplicar 45 para que resulte 180? Y ¿Por cuál número se debe multiplicar 80 para que resulte 180?

2)

Utilicen la metodología regla de tres, usualmente utilizada por profesores como generalización del cálculo de proporciones inversas: Multiplicar ambas variables y dividir por el dato que no está acompañado.

En este caso sería lo siguiente:

$$X_1 = \frac{50 \cdot 36}{45} = 40$$

$$X_2 = \frac{50 \cdot 36}{80} = 22,5$$

Tabla 9: Estrategias posibles

Conclusión

Es muy importante que los estudiantes entreguen una respuesta final que relacione los valores de las soluciones con el contexto del problema.

La respuesta esperada es:

Para que la proyección de la sombra tenga un tamaño de 45 cm se debe ubicar la lámina a 40 cm de la luz.

Y para que la proyección de la sombra tenga un tamaño de 80 cm se debe ubicar la lámina a 22,5 cm de la luz.

Preguntas que podrían realizar los estudiantes al docente

En este apartado indicaremos algunas preguntas que creemos pueden realizar los estudiantes durante el desarrollo de la actividad y las respuestas que proponemos.

¿La distancia de la luz a la lámina cómo se mide?

R: Es importante considerar en este caso la distancia como se muestra en la imagen que representa la situación, en este caso desde la luz a uno de los extremos del ancho de la imagen.

¿La lámina se ubica en cualquier posición frente a la luz?

R: Como se muestra en la imagen y para que no existan confusiones, se considerará ubicar la lámina derecha frente a la luz y centrada.

¿Influye el tamaño de la ampollita/linterna?

R: Imagine la situación, ¿en este caso es necesario conocer el tamaño de la ampollita?

¿La distancia de la lámina a la luz desde dónde se considera, desde el soquete o desde la ampollita?

R: Imagine la situación en la vida real, usted tiene una linterna y ubica una lámina frente a ella para proyectar la sombra, ¿desde dónde mediría la distancia?

¿Cuántos decimales utilizamos?

R: Se deben utilizar dos decimales, aproxime a la centésima.

Profe no sabemos qué hacer

En este caso solicitamos que le docente analice qué es lo que les estudiantes han hecho, qué han pensado para ayudarles según el avance que tengan.

Para esto se definirán algunos avances importantes para recomendar a le docente según el avance.

- Estudiantes no han realizado nada

Si les estudiantes no han podido realizar nada recomendamos antes de contestar cualquier consulta le docente motive a les estudiantes a resolver el problema indicándole que pueden lograrlo.

Luego de la motivación solicitar que les estudiantes analicen el caso y que les sugiere empezar ordenando los datos en sus cuadernos.

- Estudiantes sólo han registrado los datos

Realizar las siguientes preguntas a les estudiantes:

- Usando los datos, ¿ustedes creen que la lámina tiene que estar más cerca o más lejos de la luz?
- ¿Se acuerdan qué sucedía en la actividad anterior cuando se acercaba o alejaba la lámina de la luz?

De esta manera esperamos que les estudiantes logre recordar el fenómeno y concluir que la lámina debería acercase a la luz.

- Estudiantes reconocen el fenómeno, pero no saben cómo realizar los cálculos

Recomendamos que le docente plantee dos ejercicios, uno sobre proporcionalidad directa y otro sobre proporcionalidad inversa para que les estudiantes lo analicen, los ejercicios a plantear son:

- Si un kilogramo de pan cuesta \$1.200 ¿cuánto cuesta 1,5kg? ¿y 2kg? ¿y 3kg?
- Si dos pintores demoran 3 días en pintar una casa ¿cuánto tiempo demorará un pintor? ¿y 3 pintores?

Luego que les estudiantes entreguen las soluciones a los ejercicios preguntar:

- ¿Qué cálculo realizó para resolver el problema del pan?
- ¿Qué cálculo realizo para el problema de los pintores?
- ¿Alguno de estos ejercicios tiene relación con el problema inicial?

Se espera que con estas preguntas les estudiantes comprendan que el problema de los pintores tiene similares características y busquen una metodología para resolverlo usando este ejercicio.

- Estudiantes entienden lo anterior, pero no logran encontrar la forma de resolver el ejercicio.

En este caso se recomienda que le docente plantee el ejercicio de los pintores y explique el concepto de la constante de proporcionalidad inversa.

Si esta situación se repite considerablemente, recomendamos a le docente realizar un repaso de proporcionalidades para que luego todes les estudiantes entiendan la homotecia.

Actividad 3:

Le docente mostrará el proyecto a realizar con sus respectivas instrucciones.

Luego los estudiantes se organizarán con sus compañeros para agruparse en equipos de trabajo de 3 a 4 estudiantes, en el caso que por el contexto de pandemia los estudiantes no puedan realizar en grupos, se recomienda realizar la actividad de manera individual.

Como se indica en el diseño de la actividad, cada equipo de trabajo deberá decidir con qué modelos trabajarán y cuáles serán los tamaños por analizar y realizar. Es por esta razón que existen muchas posibilidades de análisis, por lo que en este apartado realizaremos un análisis a modo de ejemplo, con este se podrá replicar resultados en diversos casos.

La situación que plantearemos para el análisis es la siguiente:

- Se escoge la lámina 3 (corazón)
- Se decide analizar la situación en los tamaños 50cm y 70cm
- Cuando la lámina se encuentra a 10cm de distancia de la luz, el ancho de la proyección es 75cm.

Esta actividad es muy similar a la actividad 2, por lo que se espera que las estrategias para realizar los cálculos de distancias sean análogas.

Respuestas esperadas:

¿A qué distancia pusiste la lámina de la luz? ¿De qué tamaño quedó la proyección?

Para responder las dos primeras preguntas, se espera que los estudiantes utilicen las estrategias de la actividad anterior, ordenar los datos en una tabla y calcular usando proporciones, identificando y relacionando las variables:

V1.Tamaño de la lámina (en cm)

V2.Distancia a la que se ubica la lámina de la luz (en cm)

V3.Tamaño de la sombra proyectada (en cm)

V1	V2	V3
20	10	75
20	X_1	50
20	X_2	70

Lo cual lo pueden realizar utilizando regla de 3 simple o buscando la constante de proporcionalidad, en este caso realizaremos la regla de 3 simple.

$$X_1 = \frac{10 \cdot 75}{50} = 15$$

$$X_2 = \frac{10 \cdot 75}{70} = 10,71$$

En este caso, para que la sombra proyectada tenga un ancho de 50cm la lámina se debe ubicar a 15cm de la luz y para que la sombra proyectada tenga un ancho de 70cm la lámina se debe ubicar a 10,7143cm de la luz.

¿Dónde se ubica el centro de homotecia?

Se espera que los estudiantes respondan que el centro de homotecia es la ampolleta.

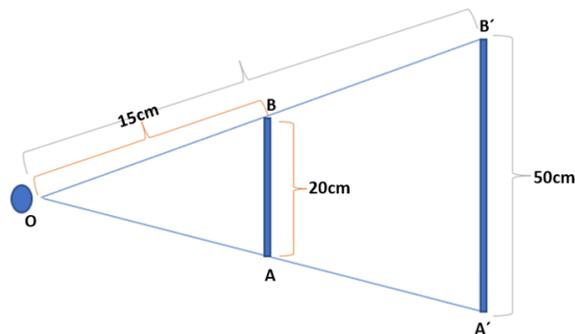
Represente la situación con un dibujo y anote los datos

¿Cuál es la razón de homotecia en cada caso?

¿A qué distancia queda el centro de homotecia del extremo de la proyección?

Se espera que los estudiantes representen mediante un diagrama la situación, según lo revisado en clases o en el texto escolar y respondan las preguntas para cada caso utilizando este diagrama.

i. Caso1:



Según lo revisado en clases, los estudiantes buscarán la razón de homotecia de la siguiente forma:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = 2,5$$

La razón de homotecia en este caso es 2,5

Luego, utilizando las relaciones que ocurren en este contenido, tenemos las siguientes fórmulas para poder buscar la distancia desde el centro de homotecia hasta el extremo de la proyección, en este caso la distancia OA'

$$k = \frac{OB'}{OB}$$

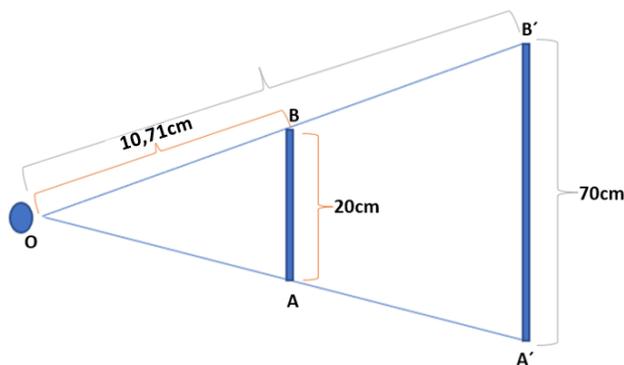
Reemplazamos los datos que tenemos en la fórmula:

$$2,5 = \frac{OB'}{15}$$

$$OB' = 37,5$$

La distancia desde el centro de homotecia al extremo de la proyección es 37,5cm

ii. Caso 2:



Análogamente al caso anterior, tenemos que:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{70}{20} = \frac{7}{2} = 3,5$$

La razón de homotecia en este caso es 3,5

Luego, la distancia desde el centro de homotecia hasta el extremo de la proyección, en este caso la distancia OA', se calcula de la siguiente manera.

$$k = \frac{OB'}{OB}$$

$$3,5 = \frac{OB'}{10,71}$$

$$OB' = 37,49$$

Luego, la distancia desde el centro de homotecia al extremo de la proyección es 37,49cm

¿Por qué eligieron ese tamaño para la construcción y no el otro?

Se espera que los estudiantes justifiquen la decisión, en este caso como se trata de construir una piñata real, se debería elegir el caso 1, pues la distancia y el tamaño de la sombra proyectada corresponden a números enteros, los cuales son fáciles de medir con una huincha o regla.

Tabla 10: Respuestas esperadas actividad 3

Preguntas de estudiantes a le docente:

Al ser una actividad donde ya se han realizado cálculos similares, se espera que no existan preguntas de los estudiantes, sin embargo, es importante considerar las siguientes aclaraciones a los estudiantes, correspondientes a preguntas de la actividad anterior:

¿La distancia de la luz a la lámina cómo se mide?

R: Es importante considerar en este caso la distancia como se mostró en la actividad anterior, la distancia se mide desde la luz a uno de los extremos del ancho de la imagen.

¿La lámina se ubica en cualquier posición frente a la luz?

R: Como se mostró en la actividad anterior y para que no existan confusiones, se considerará ubicar la lámina derecha frente a la luz y centrada.

¿Cuántos decimales utilizamos?

R: Se deben utilizar dos decimales, aproxime a la centésima.

Experimentación

En esta sección se mostrará lo sucedido en la experimentación de la actividad 1.

Por el poco tiempo que tuvimos para realizar esta investigación, no pudimos experimentar las actividades 2 y 3, por lo que quedará pendiente para una próxima oportunidad.

Actividad 1:

La actividad se lleva a cabo el martes 29 de junio de 2021 a las 8:00 horas vía zoom. En esta instancia nos encontramos las investigadoras, el profesor de matemáticas del curso y los estudiantes del curso.

Participan 17 estudiantes en la actividad, de los cuales 14 tenían acceso a computador y 3 no tenían acceso a computador. Los estudiantes que contaban con computador realizaron la actividad individualmente, mientras que quienes no contaban con computador realizaron la actividad grupalmente guiados por una investigadora.

Si bien la actividad está diseñada para realizarla en 15-20 minutos, demoramos cerca de 30 minutos en que todos los estudiantes estuvieran preparados para iniciar la programación, esto dado que tuvimos que repetir varias veces las instrucciones de cómo instalar la programación en sus computadores. En este momento estuvimos constantemente preguntando a los estudiantes si alguien estaba con problemas tecnológicos para realizar la actividad, ya sea por no estar en un computador o bien no pudieron instalar la programación, de esta forma los identificamos para realizar la actividad de otra manera.

Luego que todos tuvieron instalada la programación, les mostramos sus números y nombres de identificación para que se enrolaran y proseguimos a separar a los estudiantes en tres salas de zoom, dos grupos de 7 estudiantes cada uno, quienes accedieron a la programación y el tercer grupo de 3 estudiantes quienes lo realizaron en forma grupal. Cada grupo estaba a cargo de una evaluadora, en el caso del grupo que estaba sin acceso a la programación, la evaluadora estuvo a cargo de proyectar la programación y tomar nota de las respuestas.

El desarrollo de la interacción con la programación duró 8 – 10 minutos en los grupos que realizaron la actividad de forma individual y aproximadamente 15 minutos en el grupo que realizaron la actividad colectivamente.

Análisis a posteriori

Como se indica anteriormente, sólo se pudo experimentar la actividad 1, por lo que sólo podremos realizar el análisis a posteriori de esta actividad.

En esta sección evaluaremos el logro de los objetivos de la actividad 1 mediante el análisis de las respuestas de los estudiantes en cada pregunta, con los resultados obtenidos validaremos el instrumento y finalmente, con toda la información obtenida en los pasos anteriores, entregaremos mejoras a la propuesta.

Es de suma importancia señalar que en este ítem pueden existir faltas de ortografías propias de la recolección de datos, pues las respuestas se encuentran escritas tal cual como lo hicieron los participantes.

Análisis de las respuestas

Pregunta 1: ¿Cómo definirías la semejanza matemáticamente?

Esta pregunta evalúa el logro del objetivo 1 de la actividad: Entender la semejanza de figuras como la misma figura, pero de distinto tamaño, manteniendo las proporciones.

Para esto, dividimos las respuestas de los estudiantes entre logrado, medianamente logrado y no logrado.

Respuestas logradas:

Las respuestas logradas corresponden a 9 estudiantes que contestaron alguna de las respuestas esperadas por nosotras, las cuales son:

- R1. Definición según MINEDUC, que corresponde a la semejanza de figuras como figuras con proporcionalidad de lados correspondientes y con ángulos correspondientes congruentes.
- R2. Figuras iguales, pero de distinto tamaño
- R3. Figuras proporcionales
- R4. Figuras con todos sus ángulos iguales

Las respuestas de los estudiantes que lograron aproximarse a la definición de semejanza, según las respuestas esperadas son:

Respuesta	Respuesta Esperada
que es como "igual" pero mas chiquito, con el mismo ángulo pero mas pequeño; algo así entendí.	R1
dos figuras, no importa si tiene un tamaño distinto, mientras sus angulos sean iguales esta todo bien	R1
forma identica diferente tamaño	R2
son semejantes cuando tienen la misma forma sin importar el tamaño	R2
tienen los mismos angulos aunque pueda variar el tamaño siguen siendo iguales	R1
son formas de iguales angulos pero de distinto tamaño	R1
Figura con proporcionalidad	R3
como iguales pero distinto tamaño	R2
son 2 figuras o terminos que tienen igual forma, ángulos y misma proporcionalidad de lados , pero se diferente tamaño	R1

Tabla 11: Respuestas de estudiantes logradas en P1

Respuestas medianamente logradas:

Corresponden a 4 estudiantes que se acercan al concepto de semejanza, sin embargo, sus respuestas no están completas o tienen alguna característica que no corresponde.

A continuación, se muestran las respuestas de les estudiantes y nuestra justificación del indicador de logro.

Respuesta	Comentario
que son iguales sin importar su tamaño ni su forma	Esta respuesta se acerca al concepto de semejanza, sin embargo, al decir que no importa la forma, nos queda la duda si le estudiante entendió realmente, pues es un error.
Dos cosas son semejantes si tienes dos partes de ángulos iguales	Si bien le estudiante escribe sobre igualdad de ángulos y se acerca a la definición matemática, falta que detalle sobre el tamaño de la figura.

Algo cuyos ángulos y lados son iguales, pero que a simple vista no se podría reconocer esto tan rápido	Le estudiante comenta sobre igualdad de ángulos y lados, sin embargo, el concepto indica sobre proporcionalidad de lados, no de igualdad, por lo que estudiante se acerca más al concepto de congruencia que semejanza.
Son semejantes teniendo la misma forma pero de ángulos diferentes	Estudiante entiende que son figuras de la misma forma, sin embargo, creemos que confunde el concepto ángulo con tamaño de la figura.
cosas que tienen el mismo ángulo	Es muy sutil la diferencia entre la respuesta esperada y la entregada, pues si esta estuviese escrita en plural, indicando "...los mismos ángulos"

Tabla 12: Respuestas de estudiantes medianamente logradas en P1

Repuestas no logradas:

Corresponden a 3 estudiantes que no se acercan a las respuestas esperadas, sus respuestas son las siguientes:

Respuesta	Comentario
No entiendo	No tenemos más información, pues estudiante no realizó preguntas durante el desarrollo de la actividad.
no pude escuchar bien el audio por qué tengo problemas de conexión y a cada rato me sacado de la sala	Su problema tiene que ver con problemas de conexión, por lo que es importante analizar más adelante si las siguientes respuestas las pudo contestar o no.
Figuras parecidas o no	Estudiante no se acerca a ninguna de las respuestas esperadas.

Tabla 13: Respuestas de estudiantes no logradas en P1

Pregunta 2: ¿Qué hace Batman para que la proyección del murciélago se vea más grande?

En esta pregunta evalúa una parte del objetivo 2 de la actividad: Comprender lo que sucede con la sombra proyectada en una pared de una plantilla al acercarla o alejarla de la luz.

En este caso, tenemos tres tipos de respuestas, logradas, no logradas y correctas no esperadas, las cuales corresponden a respuestas que, si bien describen fenómenos correctos, no es el fenómeno que buscábamos evaluar con la pregunta.

Respuestas logradas:

Los estudiantes que contestan lo esperado, es decir, la lámina se debe acercar a la luz, son 10. Sus respuestas son las siguientes:

Respuesta
acerca la lamina a la luz
acerca el murciélago a la linterna para que su sombra se proyecte más grande
pone el murciélago más cerca de la luz
poner un objeto serca para que la sombra del objeto se haga mas grande
Se acercaba a la linterna y batman se hacia más grande
Lo acerca hacia la luz
acercar la luz al objeto
el murciélago tenía que estar más cerca ala luz para vese más grande
acercar la figura con su logo a la linterna
acerca el coso mas a la luz¿

Tabla 14: Respuestas de estudiantes logradas en P2

Respuestas no logradas:

Corresponde a solo un estudiante que entrega una respuesta errónea, su respuesta es la siguiente:

Respuesta
lo aleja mas de la luz

Tabla 15: Respuestas de estudiantes no logradas en P2

Respuestas correctas no logradas:

Existen 6 estudiantes que dan respuestas correctas, pero no enfocadas a lo que nosotras buscábamos. Las respuestas son las siguientes:

Respuesta
lo ilumina y la sombra se proyecta en la pared
la lamina tiene que ser mas grande para que la proyeccion sea grande
usar una linterna
proyectarlo en una pared alumbrando el murcielago con una linterna
Juega con la perspectiva y los ángulos de la silueta del muscielago.
lo proyecta en una pared con una linterna

Tabla 16: Respuestas de estudiantes correctas no logradas en P2

Efectivamente para agrandar la figura, se usa la luz para proyectar la sombra, sin embargo, nuestra pregunta consideraba ya esta estrategia y se enfocaba en el movimiento de la lámina hacia la luz. Por lo que se considerará un cambio en la redacción de la pregunta en las mejoras a la propuesta.

Pregunta 3: ¿Qué pasa si Batman aleja la lámina de la luz?

Esta pregunta complementa a la anterior para evaluar el logro del objetivo 2: Comprender lo que sucede con la sombra proyectada en una pared de una plantilla al acercarla o alejarla de la luz.

Al igual que en la pregunta anterior existen tres tipos de respuestas, logradas, no logradas y correctas no esperadas, las cuales corresponden a respuestas que, si bien describen fenómenos correctos, no es el fenómeno que buscábamos evaluar con la pregunta.

Respuestas logradas:

Corresponden a 12 estudiantes que entregan la respuesta esperada, es decir, se achica la sombra. Cabe señalar, que esta pregunta es la que tuvo más cantidad de respuestas correctas de la actividad. El detalle es el siguiente:

Respuesta
la sombra seria mas chiquita
la proyección se ve mas pequeña
disminuye
la sombra se vulve mas pequeña
se vera mas pequeño
se ve mas chico
La silueta se verá más pequeña.
se achica el murciélago
la imahgen se hara mas pequeña
y cuando se alejaba batman se hacia más pequeño
el murciélago es mas pequeño
se achica la sombra

Tabla 17: Respuestas de estudiantes logradas en P3

Respuestas correctas no logradas:

Por otra parte, al igual que en la pregunta anterior, dos estudiantes entregaron respuestas correctas, pero no esperadas, lo que también nos hace reflexionar sobre la redacción de la pregunta, la cual será revisada en las mejoras a la propuesta. Las respuestas son:

Correctas, no esperadas	Comentarios
no se verá la imagen	Efectivamente si la lámina se aleja hasta la pared, es decir, sobre la pared no se verá proyección.
se va a ser mas grande la luz	En este caso es correcta la descripción del fenómeno, se da más espacio para la luz que en el caso anterior.

Tabla 18: Respuestas de estudiantes correctas no logradas en P3

Respuestas no logradas:

Corresponde a 3 estudiantes que no contestaron lo esperado, sus respuestas fueron las siguientes:

Respuesta
se agranda el murciélago
se hace mas grande?
la sombra sera mas grande

Tabla 19: Respuestas de estudiantes no logradas en P3

Pregunta 4: ¿El murciélago proyectado se parece al original? ¿Son semejantes? ¿Por qué?

Esta pregunta evalúa nuevamente el objetivo 1: Entender la semejanza de figuras como la misma figura, pero de distinto tamaño, manteniendo las proporciones. Sin embargo, esta vez se evalúa a modo de cierre de la actividad, esperando que los estudiantes entendieran el concepto de semejanza usando como ejemplo la sombra proyectada en la pared por la linterna de la lámina.

Como se menciona anteriormente, se espera que los estudiantes respondan que las figuras son semejantes y lo justifiquen con alguna de las expresiones planteadas (R1, R2, R3 o R4)

Esta pregunta que era la más importante de todas a nuestro parecer, por ser la pregunta de cierre de la actividad, en la cual se evalúa si el estudiante realmente aprendió el concepto de semejanza, tuvo gran éxito ya que todos los estudiantes que la contestaron entregaron la respuesta esperada.

El detalle de las respuestas es el siguiente:

Respuesta	Respuesta esperada
se parece al original y si son semejantes porque tienen la misma figura pero de diferentes ángulos	R1
si, se parecen y son semejantes porque si los ponemos del mismo tamaño son iguales	R2
si se parece y si son semejantes ya que tienen la misma forma solo cambia el tamaño	R2
ah simple vista si porque los dos son negros y toman la forma de un murciélago	R2
si se parece al original, son semejantes, porque son de la misma forma pero de distinto tamaño	R2
si, porque tienen la misma forma pero solamente tienen diferentes tamaños	R2
si, porque tienen los mismos ángulos y la misma forma, solamente cambia el tamaño pero eso no importa	R1
si porque lo único que cambia es el tamaño y no la forma	R2
si son iguales por qué de todas formas son el mismo murciélago	R2
si, son semejantes porque no cambia su proporción	R3
si, porque sus ángulos se asemejan o son iguales	R4
si, son los mismos pero con diferente tamaño	R2
Si, el murciélago proyectado se parece a el original, ya que aunque no son del mismo tamaño, el ángulo y sus lados son iguales.	R1
si, si porque son la misma figura con los mismos ángulos solo que uno es mas grande	R1
si se parece, son semejantes, porque es lo mismo pero mas grande	R2

Tabla 20: Respuestas de estudiantes logradas en P4

Esta pregunta fue omitida por dos estudiantes, si bien se entregó la posibilidad de hacer otra vez la actividad, ningún estudiante lo hizo.

Validación

Para finalizar el análisis de esta actividad revisaremos el conjunto de respuestas de cada estudiante, para ver si con el desarrollo de la programación fueron mejorando, manteniendo o empeorando sus respuestas. Se confrontarán las respuestas de los estudiantes con las respuestas esperadas para validar el instrumento Actividad 1.

En la siguiente tabla se muestran los indicadores de logros de las respuestas de los estudiantes (E1, E2, ..., E17) en cada pregunta (P1, P2, P3 y P4).

Estudiante	P1	P2	P3	P4
E1				
E2				
E3				
E4				
E5				
E6				
E7				
E8				
E9				
E10				
E11				
E12				
E13				
E14				
E15				
E16				
E17				

Lograda
Medianamente lograda
No lograda
Correctas no logradas
No contesta

Tabla 21: Indicadores de logro de las respuestas de los estudiantes

Podemos notar en general que:

- 5 estudiantes (E1, E3, E6, E12 y E17) entregaron todas las respuestas esperadas por nosotras y lograron ambos objetivos de la actividad.
- Todos los estudiantes que lograron medianamente la primera pregunta (E4, E8, E9 y E10) sobre el concepto de semejanza respondieron correctamente la última pregunta sobre el mismo concepto, por lo que se considera como logro del objetivo 1.

- Le estudiante E11 que no logró responder correctamente la primera pregunta, luego del desarrollo de la actividad si respondió correctamente la última pregunta sobre el mismo tema, lo que se considera como logro del objetivo 1.
- 10 estudiantes (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E12, E14, E15 y E17) contestaron correctamente las preguntas 1 y 4, por lo que se logra el objetivo 1.
- 9 estudiantes (E1, E3, E4, E6, E8, E11, E12, E16 y E17) respondieron correctamente las preguntas 3 y 4, por lo que se cumple el objetivo 2 de la actividad.
- Les estudiantes que en la pregunta 2 entregan respuestas correctas no esperadas y luego responden correctamente la pregunta 3 (E7, E9 y E14), se considerarán como estudiantes que logran el objetivo 2, pues en sus respuestas de la P3 demuestran que entienden el fenómeno.
- 3 estudiantes (E2, E13 y E15) no lograron comprender lo que sucede con la sombra proyectada en una pared de una plantilla al acercarla o alejarla de la luz (Objetivo 2), pues respondieron una o ambas preguntas referentes a este objetivo de forma incorrecta.
- Les estudiantes E5 y E10 no logran el objetivo 2, pues no responden lo esperado en las preguntas P2 y P3, sin embargo, creemos que, al cambiar la redacción de ambas preguntas, sus respuestas podrían estar logradas.

Dado lo anterior, se puede concluir que 15 estudiantes, correspondiente a un 88,24% de los participantes, lograron el objetivo 1 de la actividad: Entender la semejanza de figuras como la misma figura, pero de distinto tamaño, manteniendo las proporciones.

Además, 12 estudiantes, correspondiente a un 70,59% de los participantes, lograron el objetivo 2 de la actividad: Comprender lo que sucede con la sombra proyectada en una pared de una plantilla al acercarla o alejarla de la luz.

Para finalizar, 11 estudiantes, correspondiente a un 64,71% de los participantes, lograron ambos objetivos de la actividad.

Se infiere por el alto porcentaje de logro de los objetivos de la actividad, que la propuesta es un buen instrumento, donde los estudiantes logran comprender el concepto de semejanza y la relación que existe entre la distancia de una plantilla a una luz y el tamaño de la sombra proyectada, lo cual es muy importante como introducción al concepto de homotecia que se desarrollará en las siguientes actividades, ya que nos entrega una buena base en los estudiantes para el trabajo posterior.

Mejoras a la propuesta

Como se menciona anteriormente, se ha detectado en el análisis de la experimentación de la actividad errores de interpretación en las preguntas P2 y P3, por lo que se cambiarán las preguntas quedando de la siguiente forma:

Pregunta 2:

Para que la sombra de la lámina sea más grande que la original ¿la lámina se debe acercar o alejar de la luz?

De esta manera las posibles respuestas serían acercar o alejar, siendo acercar la esperada.

Pregunta 3:

¿Qué sucede con el tamaño de la sombra cuando Batman aleja la lámina de la luz?

Con este nuevo planteamiento de la pregunta, esperamos que los estudiantes se centren solo en el tamaño de la proyección y respondan que la sombra se hace más pequeña.

Se espera que con el cambio de redacción además de disminuir la posibilidad de problemas de interpretación de la pregunta, aumente la cantidad de respuestas correctas y el porcentaje de logro de los objetivos de la actividad.

CAPÍTULO V: Conclusiones y Proyecciones

Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones de la investigación. Se consideraron tres secciones para abordar de forma detallada las deducciones de las autoras respecto a los diferentes apartados de este escrito.

En relación a los objetivos:

En la presente investigación se buscó desarrollar una propuesta didáctica para estudiantes de primero medio sobre homotecia basada en la socioepistemología, para lograr esto se proponen tres actividades en las que las dos primeras se utilicen como diagnóstico de conocimientos previos y se finalice con el proyecto de construir una piñata. Decidimos crear esta investigación con el propósito de disminuir la brecha que existe entre los distintos grupos socioeconómicos que ha ido aumentando por los diferentes cambios que ha sufrido la forma de hacer clases por la actual pandemia. Luego, determinamos que el contenido elegido sería homotecia por los bajo porcentajes de aprobación que tienen los contenidos de geometría, además de que es contenido relativamente nuevo y que al analizar el texto de estudio del MINEDUC no se logra abordar de forma cotidiana la homotecia.

Dado a lo anterior, podemos concluir que se cumple el objetivo general de la investigación, el cual corresponde a realizar un recurso digital sobre Homotecia para que profesores de estudiantes de primero medio puedan usarlo en sus clases.

También se cumplen los objetivos específicos, los cuales son:

- Proponer tres actividades cotidianas sobre homotecia para el recurso digital, las cuales estarán basadas en la Socioepistemología y deberán incluir la planificación de la situación didáctica.
- Presentar las actividades a estudiantes de primero medio para analizar sus respuestas y posteriormente evaluar la propuesta y así, en el caso que sea necesario, mejorarlas.

En relación con lo teórico:

Luego de analizar las directrices del MINEDUC en cuanto al método Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), se infiere que a pesar de todos los esfuerzos realizados no se logra llevar a cabo, al menos en matemática, los usos que este método trae consigo y por consiguiente los beneficios del mismo. Debido a esto es que el tratamiento específico de la Homotecia es tan lejano a la realidad de los estudiantes, no se utilizan los constructos epistemológicos y sociales del contenido en cuestión, el enfoque que se le propone a la enseñanza es netamente verbal, simbólico, vectorial y algebrista, dejando totalmente a los estudiantes apartados de su propia construcción y aprehensión del conocimiento.

Es necesario considerar que, todo lo que fue analizado es para llevar a cabo en clases de forma presencial, por ende, si se aplica lo entregado por el Ministerio al contexto actual, efectivamente el contenido de Homotecia se aleja más de la realidad de los estudiantes y los objetivos de aprendizajes establecidos no se lograrán cumplir.

Teniendo en consideración lo previamente mencionado, es que se diseña esta propuesta didáctica, la cual es aplicable tanto para un contexto digital como presencial. En este proyecto se considera la realidad de los estudiantes y se incluye como protagonista, en donde sus conocimientos previos y posteriores decisiones son parte fundamental de la construcción de la conceptualización y aprehensión del contenido. Además, como el sustento fundamental de este diseño pedagógico es el método ABP, se procura también que el tema a tratar sea totalmente aplicable a la resolución de problemas de la vida cotidiana, tal como lo es la construcción de una piñata, buscar los materiales adecuados para aquello, resolver dificultades, controlar el ritmo de trabajo, facilitar el éxito del proyecto y evaluar el resultado. (Trujillo, 2014, p.18)

En relación a los resultados:

Con respecto a los resultados del análisis de la propuesta, creemos que, si bien no pudimos experimentar todas las actividades, podemos proyectar resultados con la actividad 1.

En dicha actividad logramos captar la atención de los estudiantes y que participaran en el desarrollo de ésta, lo cual es gratificante para nosotras, pues la actividad resultó atractiva para ellos.

Como se observa en la validación de la actividad, la mayoría de los estudiantes lograron los objetivos propuestos para ellos y con ello, se logran los objetivos que buscábamos las investigadoras con la realización de la actividad.

Las primeras dos actividades están diseñadas para tanto acercar a los estudiantes la homotecia con un fenómeno cotidiano, como para diagnosticar si los estudiantes manejan los conocimientos previos para tratar el contenido homotecia, por lo que independiente de no haber podido realizar la segunda actividad, ésta será una buena herramienta para que el docente realice el diagnóstico y sea capaz de decidir si es necesario realizar un repaso de los contenidos previos o no, entendemos que las realidades son distintas, por lo que dependiendo de los resultados de las actividades en cada grupo de estudiantes cada docente que realice las actividades deberá tomar esta decisión.

Como se menciona en el diseño de la propuesta, luego de la actividad 2 el docente deberá tratar el contenido homotecia con los estudiantes para finalmente poder realizar la última actividad.

La actividad 3 corresponde a una evaluación del contenido homotecia, la cual se enmarca en las recomendaciones del MINEDUC sobre el ABP, siendo una actividad que podría servir como herramienta para los estudiantes en un futuro, en ella se logran evaluar los indicadores de evaluación propuestos por el MINEDUC sin necesidad de hacer una prueba corriente en base al álgebra. Lo cual es una oportunidad de aprendizaje para los estudiantes sin la tensión que provoca una prueba.

Dado a todo lo anterior, esta propuesta será de ayuda tanto para docentes como para el aprendizaje de la homotecia de los estudiantes.

Finalmente, concluimos que nuestra propuesta didáctica acerca el contenido homotecia a los estudiantes.

Proyecciones

En primer lugar, nos gustaría experimentar las actividades faltantes para poder terminar el análisis de la propuesta, además de presentar el recurso a profesores de 1° Medio para solicitar su retroalimentación y así poder realizar las mejoras necesarias.

Esta propuesta resulta por los pocos recursos digitales que podemos encontrar sobre homotecia, por lo que queremos publicar en el corto plazo las actividades en un blog para que esté disponible para todo quien lo requiera y así colaborar a no seguir aumentando las brechas en educación.

Esta propuesta es un aporte a las matemáticas, específicamente al eje de geometría que en general tiene baja aprobación de los estudiantes (Valenzuela, 2015), presentando este recurso como puntapié inicial al acercamiento a la vida cotidiana de las matemáticas.

Referencias Bibliográficas

- Área de Formación, Fundación Educa Chile, (2015). Aprendizaje basado en proyectos, Chile: Fundación Chile
- Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Ayuda MINEDUC (2021) Pagina Web Ayuda MINEDUC. Recuperado de <https://www.ayudamineduc.cl/ficha/aprendo-por-proyecto>
- Blank, W. (1997). Authentic instruction. In W.E. Blank & S. Harwell (Eds.), Promising practices for connecting high school to the real world (pp. 15–21). Tampa, FL: University of South Florida. (ERIC Document Reproduction Service No. ED407586)
- Casares, J. (1984). Diccionario ideológico de la lengua española: desde la idea a la palabra; desde la palabra a la idea (2ª ed.). Barcelona, España: G. Gill.
- Centro UC de Encuestas y Estudios Longitudinales (2020). Clases online, computadores y acceso a internet durante la pandemia. Recuperado de <https://www.uc.cl/site/efs/files/11636/presentacion-estudio-empleo-covid19-datos-de-empleo-en-tiempo-real-8-octubre2020.pdf>
- Chambadal, L. (1972). Diccionario de las matemáticas modernas. Francia, Paris: Larousse.
- Curriculum Nacional (2019) Recursos Educativos, Documento de Apoyo: Metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos. Recuperado de <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Curso/Tecnico-Profesional/3-Medio-TP/140166:Metodologia-de-aprendizaje-basado-en-proyectos>
- Curriculum Nacional (2021) Chile Aprende por Proyectos: ¿Qué es ABP?. Recuperado de <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Secciones/ABP-Chile-aprende-por-proyectos/134607:Que-es-ABP>

- De Burgos, J. (1977). Curso de álgebra y geometría. Madrid, España: Editorial Alhambra, S. A.
- Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias*, 23(3), 379-392.
- Espinosa de los Monteros, J. (2004). Diccionario de matemáticas. Madrid, España: Cultura, S. A
- Fresno, Torres y Ávila. (2020) Texto del estudiante 1° Medio. Edición especial para el Ministerio de Educación.
- García-Varcácel Muñoz-Repiso, A. y Basilotta Gómez-Pablos, V. (2017). Aprendizaje basado en proyectos (ABP): evaluación desde la perspectiva de alumnos de Educación Primaria. *Revista de Investigación Educativa*, DOI. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.6018/rie.35.1.246811>
- Gobierno de Chile (2021). Gestión de Chile en la pandemia. Recuperado de <https://www.gob.cl/coronavirus/gestionpandemia/>
- Grupo Norma. (1992). Diccionario enciclopédico ilustrado práctico. Colombia: Editorial Norma, S. A
- Jackson, W. (Ed.). (1973). Diccionario léxico hispano Enciclopedia ilustrada en la lengua española. D. F., México: W. M. Jackson, Inc
- Julio, L. (2014). Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia
- Lemonides, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(23), 295-324.
- MINEDUC (2005). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2005. Recuperado de <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/269/MONO-213.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- MINEDUC (2009). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009. Recuperado de <http://peib.mineduc.cl/wp-content/uploads/2018/05/Objetivos-fundamentales-y-contenidos-mi%CC%81nimos-obligatorios-de-la-educacio%CC%81n-Actualizacio%CC%81n-2009-.pdf>
- MINEDUC (2020, marzo 25) Se extiende el periodo de suspensión de clases. Recuperado de <https://www.mineduc.cl/se-extiende-periodo-de-suspension-de-clases/>
- MINEDUC (2020). Fundamentación Priorización Curricular Covid-19. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-179650_recurso_pdf.pdf
- MINEDUC (2021) Página web Sigamos aprendiendo. Recuperado de <https://sigamosaprendiendo.mineduc.cl/>
- MINSAL (2020, marzo 15). Presidente anuncia suspensión de clases y reduce actos públicos. Recuperado de <https://www.minsal.cl/presidente-anuncia-suspension-de-clases-y-reduce-actos-publicos/>
- Moriena, S. (2006). Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométrías en el plano. Recuperado de <http://www.soarem.org.ar/Documentos/31%20Moriena.pdf>
- OMS (2020). Brote de enfermedad por coronavirus (COVID-19). Recuperado de <https://www.who.int/es/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>
- Schwartzman, S. (1994). The words of mathematics. An etymological dictionary of mathematical terms used in english. Washington, DC.: Mathematical Association of America
- Trujillo, F. (2014). Aprendizaje basado en proyectos: infantil, primaria y secundaria. Madrid, Ministerio de Educación de España. Recuperado de <https://elibro.net/es/ereader/umce/114145?page=26>
- Valenzuela (2015) Análisis de las habilidades y dimensiones medidas en la prueba SIMCE de lenguaje, matemáticas y TIC mediante análisis factorial.

Zurita, F. (2011). Semejanza de figuras. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.