

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas



El Fascinante Mundo de los Poliedros

**Memoria para optar al título de Profesor de Matemáticas
e Informática Educativa**

Autores : Álvaro Alexsanders Góngora Valdés
Oscar Elías Vargas Ochoa
Profesor Guía: Lorna Benavente Kennedy

SANTIAGO - CHILE 2007

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática



El Fascinante Mundo de los Poliedros

**Memoria para optar al título de Profesor de Matemáticas
e Informática Educativa**

Autores : Álvaro Alexsanders Góngora Valdés
Oscar Elías Vargas Ochoa
Profesor Guía: Lorna Benavente Kennedy

SANTIAGO - CHILE 2007

Dedicatoria

A Dios, por capacitarme siempre, dándome sabiduría e inteligencia para alcanzar una meta que me ha dado ya muchas satisfacciones. A mis padres, Oscar e Isabel, que me han apoyado y animado siempre a ser un profesional, a mis hermanos, Sergio, Daniel y Gimena, que estuvieron conmigo durante todo este largo proceso en la universidad. A don Juan Yáñez, que impulso mi estudio hacia la geometría y apporto de sus grandes conocimientos para encausarme en esta gran labor docente. A doña Lorna Benavente, por su constante apoyo profesional y técnico para avanzar en esta tesis. Y a todos mis profesores del departamento que influenciaron nuestro avance cognitivo, que sus enseñanzas y métodos han formado el carácter de este futuro profesor de matemáticas.

Oscar Vargas O.

En estos instantes en los que me encuentro culminando una de las etapas de mi vida, una de las etapas que marcará mi senda, no puedo dejar de pensar en las personas que me acompañaron y ayudaron a superar todos los obstáculos que pudieron surgir en este proceso, es por eso que con un profundo sentimiento quiero agradecer por medio de estas palabras a mi familia, en particular a mi madre y hermana, ya que siempre estuvieron en los momentos mas difíciles aliviando y aconsejando, a Eduardo Piña por tener la mejor de las disposiciones, a Don Juan Yáñez por creer en mí, al profesor Fernando Córdoba, porque produjo que me superara y por último a Andrés Varas que fue un apoyo importante en el trabajo de esta memoria.

Álvaro Góngora V.

Índice General

Prólogo.....	9
Marco Teórico.....	11
0.1 Fundamentación.....	11
0.2 Objetivos Generales.....	13
0.3 Objetivos Específicos.....	13
0.4 Aspectos Psicológicos.....	14
Capítulo 1: Los Poliedros.....	16
1.1 Introducción.....	16
1.2 Origen y Desarrollo de los Poliedros.....	17
1.2.1 Notación de Schläfli.....	22
1.3 Sólidos Platónicos.....	23
1.4 Propiedades de los Sólidos Platónicos.....	24
1.4.1 Dimensiones Fundamentales.....	24
1.4.2 Simetrías.....	26
1.4.3 Dualidad.....	27
1.5 Los Sólidos Regulares.....	30
1.5.1 El Tetraedro.....	30
1.5.2 El Cubo.....	32
1.5.3 El Octaedro.....	34
1.5.4 El Dodecaedro.....	36
1.5.5 El Icosaedro.....	38
1.5.6 Sólidos de Kepler – Poinot.....	40
1.6 Sólidos de Arquímedes.....	44
1.6.1 Tetraedro Truncado.....	47
1.6.2 Cuboctaedro.....	48
1.6.3 Cubo Truncado.....	49
1.6.4 Octaedro Truncado.....	50

1.6.5 Rombicuboctaedro.....	51
1.6.6 Cuboctaedro Truncado.....	52
1.6.7 Cuboctaedro Snub.....	53
1.6.8 Icosidodecaedro.....	54
1.6.9 Dodecaedro Truncado.....	55
1.6.10 Icosaedro Truncado.....	56
1.6.11 Rombicosidodecaedro.....	57
1.6.12 Icosidodecaedro Truncado.....	58
1.6.13 Icosidodecaedro Romo.....	59
1.6.14 Resumen de los Sólidos de Arquímedes.....	60
1.7 Sólidos de Catalán.....	61
1.8 Sólidos de Johnson.....	66
1.9 Prismas y Antiprismas.....	71
1.9.1 Algunos Prismas.....	73
1.9.2 Algunos Antiprismas.....	75
1.10 Pirámides.....	77
1.10.1 Tronco de Pirámide.....	78
1.11 Deltaedros.....	79
1.12 Proyecciones de Schlegel.....	80
Capítulo2: Visión Algebraica de los Poliedros.....	85
2.1 Introducción.....	85
2.2 Fórmula de Euler y su relación con los Poliedros.....	86
2.3 Relación de Euler con los poliedros convexos.....	87
2.3.1 Una consecuencia importante del Teorema de Euler.....	88
2.4 Euler, Poliedros y Topología.....	93
2.4.1 Fórmula de Euler y Topología.....	93
2.4.2 Teoría de grafos.....	95
2.4.3 Grafos Eulerianos.....	98
2.4.4 Relación entre la fórmula de Euler y grafos planos.....	98

2.4.5 Los grafos y su relación con los poliedros.....	100
2.4.6 Demostración de la fórmula de Euler mediante Grafos.....	101
2.4.7 Otra generalización de la fórmula de Euler.....	102
Capítulo 3: Los Poliedros en la Ciencia, Tecnología y Arte.....	103
3.1 Introducción.....	103
3.2 Los poliedros en la Biología.....	104
3.3 Los poliedros en la Química.....	109
3.3.1 Poliedros regular y su relación con la cristalización de minerales.....	109
3.4 Enlaces Químicos, grafos y poliedros.....	111
3.5 Los Fullerenos.....	112
3.6 Los Poliedros y la Tecnología.....	114
3.6.1 Aplicaciones de los poliedros en la Arquitectura.....	116
3.7 Los poliedros en el Arte.....	118
Capítulo 4: Propuestas Didácticas, Aplicaciones y Recursos Tecnológicos	127
4.1 Introducción.....	127
4.1.1 Análisis de los Contenidos Mínimos Obligatorios.....	128
4.1.2 Propuestas Didácticas.....	130
4.2 Taller I: El dodecaedro y el dodecaedro estrellado.....	132
4.3 Taller II: Principio de Arquímedes y el volumen de los cuerpos.....	138
4.4 Taller III: Puzzles en el Espacio.....	140
4.5 Taller IV: Construcción de un dodecaedro mediante origami modular...	144
4.6 Taller V: Los Sólidos Platónicos y las Teselaciones de Escher.....	147
4.7 Taller VI: Teselando el Espacio.....	149
4.8 Taller VII: Conociendo el Teorema de Euler.....	151
4.9 Taller VIII: Creando un poliedro nuevo ¿Será posible?	153

4.10 Ejercicios Enseñanza Básica.....	155
4.10.1 Actividad N° 1: Sobre Prismas.....	155
4.10.2 Actividad N° 2: Sobre Pirámides.....	156
4.10.3 Actividad N° 3: Sobre Volúmenes.....	158
4.11 Ejercicios Enseñanza Media.....	159
4.11.1 Ejercicios resueltos.....	159
4.11.2 Guía N° 1.....	169
4.11.3 Guía N° 2.....	170
4.11.4 Guía N° 3.....	171
4.11.5 Ejercicios con sólidos platónicos.....	173
4.11.6 Actividades con otros sólidos.....	175
4.12 Recursos Tecnológicos.....	177
4.12.1 Actividad: Diseño de Clase.....	177
4.12.2 Actividad: Exploración de recursos digitales.....	182
4.12.3 Software de apoyo pedagógico en aula.....	192
4.13 Páginas Web.....	194
 Conclusiones.....	 199
Sugerencias.....	202
Bibliografía.....	203
Bibliografía Digital y Software.....	204

Resumen

El mundo de los poliedros ha causado gran admiración desde su descubrimiento hasta hoy, especialmente entre quienes realizan aplicaciones en distintos ámbitos del conocimiento. La historia da cuenta de como este fascinante mundo fue tomando lugar en el arte y la ciencia, como también en la vida cotidiana. Este maravilloso campo de las matemáticas no ha encontrado un lugar donde se reúnan en el todas estas aplicaciones, para ser consultadas. Este trabajo pretende transformarse en un marco teórico donde se alberguen estas relaciones entre las propiedades de los poliedros y sus aplicaciones a diversos campos del conocimiento como los son; el arte, la ciencia y la tecnología. De esta forma, nuestro trabajo estará dividido en tres áreas, en primer lugar haremos una mirada al desarrollo histórico - cronológico de los poliedros, luego, expondremos la relación existente entre los poliedros y la topología algebraica, enseguida relacionaremos las propiedades de los poliedros aplicadas a la ciencia y el arte. Para finalizar, realizaremos una aplicación pedagógica en la cual plantearemos ejercicios a modo de ejemplo y sus métodos de resolución para facilitar la tarea de estudio y enseñanza.

Palabras claves: *poliedros, propiedades, historia, aplicaciones, arte, ciencia, pedagogía.*

Abstract

The world of the polyhedrons has caused great admiration from his discovery up to today, specially between whom applications realize in different areas of the knowledge. The story gives an account of how this fascinating world was taking place in the arts and sciences as well as in everyday life. This wonderful field of mathematics has not found a place to meet him in all these applications, to be consulted. This work aims to transform itself into a theoretical framework which is hosting these relationships between the properties of polyhedra and its applications to various fields of knowledge as the son; art, science and technology In this way, our work will be divided into three áreas, first we will look at the historical development – chronological polyhedrons, then expose the relationship between polyhedra and algebra, now, we are going to relate the properties polyhedrons applied to the science and art. Finally, an application will make educational exercises which will raise by way of example and methods of resolution to facilitate the task of studying and teaching.

Keywords: *polyhedrons, property, history, applications, art, science, pedagogy.*

Prólogo

La presente memoria está dedicada al interesado en interdisciplinar sus conocimientos geométricos correspondientes a figuras sólidas, y en particular, al estudio de los poliedros.

Mediante la contextualización histórica, se pretende presentar el origen y desarrollo de los poliedros a través del tiempo, situando al lector en un contexto pocas veces abarcado por los textos matemáticos. Éste hecho no nos aleja de la teoría, ya que siempre se considerará como un elemento importante dentro del proceso enseñanza-aprendizaje.

También, con la idea de abarcar este tópico desde una perspectiva poco usual, es que se expone una relación entre los poliedros y una rama de la matemática llamada topología, que es considerada de nivel superior y estudiada por alumnos de pregrado con formación en ciencias matemáticas.

Con el ideal de crear un texto que involucre no sólo teoría matemática, es que existe un capítulo dedicado solamente a relacionar las estructuras poliedrales con otras ramas de la ciencia, como es la biología y la química, además, en el mismo capítulo se describen situaciones donde las características o propiedades que poseen algunos poliedros permiten construir adecuadas y mejores herramientas tecnológicas. Por último, para finalizar el capítulo, se desarrolla la relación entre el arte y estas figuras a lo largo del tiempo.

El capítulo final es parte esencial del texto, ya que complementa de manera práctica lo estudiado en la memoria. Presenta un esquema de tres secciones, donde se abarcan:

Aplicaciones didácticas: orientadas al aprendizaje lúdico de los contenidos vistos en el texto.

Ejercicios resueltos y propuestos: orientada a la adaptación, adquisición de métodos matemáticos para la solución de problemas y al entrenamiento mediante una serie de ejercicios propuestos.

Recursos tecnológicos: dirigidos para orientar a docentes sobre el material de apoyo dispuesto en la red y en software de aplicaciones matemáticas.

Marco Teórico

0.1 Fundamentación

Considerando que la geometría es un sector de la matemática que debe enseñarse a los estudiantes según los planes y programas que plantea el Ministerio de Educación, y que también la geometría es una herramienta para en el desarrollo de capacidades como: el pensamiento lógico, abstracto, motriz y sistemático de nuestros estudiantes, por lo que es necesario estar en constante búsqueda de nuevas metodologías que apoyen el aprendizaje.

¿Por qué elegimos este tema?

Durante nuestra formación docente, hemos observado los poliedros desde el punto de vista netamente matemático, el conocer ciertos poliedros y algunas de sus propiedades no nos basta, y quisiéramos conocer a cabalidad sus propiedades, como se clasifican y sus aplicaciones para hacer de este estudio un gran avance profesional que enriquecerá nuestro trabajo docente, creando un texto que relacione otras áreas como la ciencia y el arte, apoyados en la teoría matemática para reforzar y fundamentar de mejor forma nuestros contenidos ya adquiridos.

También, estudiaremos un tema que no se ha abordado en memorias anteriores, donde no existe una vasta bibliografía que nos sirviera de referencia, donde lo encontrado se encuentra disperso en textos muy heterogéneos, nos permitirá innovar en nuestro campo al adentrarnos y compilar un tema poco estudiado y profundizado en detalle.

¿Cuál es el problema a resolver?

Existe escasa bibliografía pertinente al tema, la que encontramos se vuelve muchas veces vaga y abstracta, pero por sobre todo, diseminada en distintos textos.

Al no haber un texto que abarque todo el contenido y que realice un pasaje entre lo histórico y lo matemático, llevándonos desde lo pasado hacia lo moderno, es que nos hemos propuesto tratar de solucionar esta carencia.

Otro problema a resolver, es hacer ver a los poliedros como un objeto matemático pero no sólo ello, sino que poder relacionarlo con otras áreas de la ciencia, el arte y la tecnología, con el fin de mostrar una geometría menos teórica y más aplicada a la vida real.

¿Cuál es la propuesta?

Crear un material didáctico y dinámico, organizado y coherente, que nos permita avanzar en el tiempo, siguiendo el curso histórico del desarrollo del estudio de los poliedros, para contextualizar al lector en esta profundización y compilación de los contenidos que abordaremos.

Para ello, queremos mostrar una geometría viva, que está en cosas simples como también complejas de la vida cotidiana, relacionando nuestro mundo matemático con el mundo científico, artístico y tecnológico, proponiendo actividades que apoyen y mejoren el proceso para el aprendizaje, alcanzando el carácter significativo para el alumno, dando vida a los poliedros, que de un mundo abstracto se traslada a lo concreto y real de la vida.

De esta manera esperamos contribuir a la enseñanza de la geometría, y así, lograr que el proceso enseñanza-aprendizaje sea atractivo y eficaz en los estudiantes, entregando herramientas que permitan mejorar y enriquecer los contenidos a desarrollar propuestos por el Sistema Nacional de Educación.

También esperamos contribuir a la formación inicial de docentes, al entregar un material recopilatorio y detallado, donde el estudio de los poliedros, centrado en lo matemático, se entrelaza con ciencias, artes y tecnología, permitiendo una mayor variedad de herramientas de aplicación para los profesores.

0.2 Objetivos Generales

- Elaborar un material de apoyo que facilite y asista al estudiante el estudio de los Poliedros y su vinculación con otras formas de la cultura.
- Elaborar un marco teórico que incorpore aspectos históricos que permitan situar el tema en el tiempo. Contenidos de geometría y su relación con los ejes de Álgebra, Análisis y otros ámbitos de la cultura tales como el Arte y la Ciencia. Además, se considerarán recursos que faciliten el aprendizaje de los distintos subtemas.

0.3 Objetivos Específicos

- Elaborar un texto de apoyo para los cursos de Geometría, estructurados secuencialmente y que considere: contenidos, actividades, software específico, libros y sitios en Internet.
- Elaborar un material de apoyo que contenga un conjunto de problemas resueltos y propuestos, desarrollados secuencialmente y que este de acuerdo a los indicadores de la Formación Inicial de Profesores para la Enseñanza Media.
- Elaborar material Didáctico destinado a estudiantes de Enseñanza Básica y Media.

0.4 Aspectos Psicológicos

Esta memoria tiene como propósito presentar una propuesta integradora, estimulante y motivadora para la enseñanza-aprendizaje de algunos tópicos de la geometría, para esto se ha investigado a especialistas como Piaget, Vigotsky o Brousseau, pero, entre los investigadores de educación matemática que se han ocupado de la enseñanza de los distintos conceptos que esta tiene, se encuentra el matrimonio de Dina y Pierre Van Hiele, aunque la mayoría de las veces sólo a éste último se le atribuye la elaboración de una de las teorías más consideradas sobre el aprendizaje comprensivo de la geometría.

Tal teoría, considera dos partes fundamentales, que describiremos a continuación, pues serán la base para diseñar, secuenciar y organizar los contenidos y actividades propuestas en el texto. Dividiéndose en: Niveles de Pensamiento y Fases de Aprendizaje.¹

1. Los Niveles de Pensamiento: se reflexiona sobre los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de Ciencias.

Dichos niveles de pensamiento son cinco y generalmente se mencionan del nivel cero, al nivel cuatro.

Nivel 0: Visualización o Reconocimiento

Nivel 1: Análisis

Nivel 2: Ordenación o Clasificación

Nivel 3: Deducción Formal

Nivel 4: Rigor

¹ Seminario “Funciones de Variable Compleja, transformaciones de Moebius y estudio de algunas superficies y curvas”, año 2006 Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Es importante señalar que un estudiante puede estar según el contenido trabajado, en un nivel u otro distinto.

2. Las fases de aprendizaje: con el fin de ayudar al alumno a pasar de un nivel de pensamiento dado, al nivel inmediatamente superior, los Van Hiele propusieron un modelo de cómo puede uno como profesor organizar las actividades en sus clases. Dicho modelo se compone de cinco fases, al final de las cuales el alumno habrá alcanzado el nuevo nivel de pensamiento.

Las fases que postulan en su modelo son:

Fase 1: PREGUNTAS-INFORMACION

Fase 2: ORIENTACION DIRIGIDA

Fase 3: EXPLICACION (EXPLICITACION)

Fase 4: ORIENTACION LIBRE

Fase 5: INTEGRACION

Se trata de determinar, o acercarse lo más posible a la situación real de los alumnos.

Capítulo 1

1.0 Los Poliedros

1.1 Introducción

El presente capítulo introduce al lector en el mundo de los poliedros, presentando en primer lugar, el desarrollo histórico de estos, con el fin de motivar, incentivar y contextualizar al interesado en este fascinante mundo, para luego definir, describir secuencial y detalladamente cada uno de los Poliedros llamados Platónicos y Arquimedianos.

Introducidos estos Poliedros, continuaremos con otros Sólidos, llamados Poliedros de Catalán, relacionados directamente con los Sólidos Arquimedianos.

Considerado este inmenso mundo de formas geométricas, desarrollaremos otras clasificaciones de los poliedros.

1.2 Origen y Desarrollo de los Poliedros

A través de los siglos, los cuerpos geométricos han sido objeto de diversos estudios, siendo encontrados en la vida cotidiana, en la construcción de pirámides como un símbolo de señorío y religiosidad, en los juegos de azar, el dado, o en entretenimientos masivos, como la pelota de fútbol.

A continuación exponemos una definición de Poliedros:

Definición 1.2.1 *Poliedros son figuras geométricas que están formadas por la unión de polígonos planos adyacentes y no coplanarios que limitan a una región espacial finita.*

Bajo este contexto, podemos imaginar que existen muchos de estos poliedros, cinco de ellos son los llamados Sólidos Platónicos. El origen de estos sólidos platónicos, como elementos para ser estudiado por las matemáticas, se halla en la antigua Grecia, son ellos quienes por primera vez concuerdan que estos poliedros han de ser estudiados, con el objeto de realizarles un análisis más profundo.

En esta época de influencia artística y cultural, los integrantes de Los Pitagóricos veían en los resultados matemáticos una especie de verdad trascendental, y por eso se dedicaron a su estudio. Aristóteles dijo que “*suponían que los elementos de los números eran la esencia de todas las cosas, y que los cielos eran armonía y número*”¹. Bajo esta filosofía de pensamiento, fueron los cinco poliedros uno de los problemas que más les inquietó y fascinó, y sobre todo el dodecaedro, al que atribuían una especial relación con el cosmos. Se planteaban por qué eran en concreto cinco poliedros, ni más ni menos y bajo este contexto fue que por primera vez llamaron a estos cinco objetos con un nombre distintivo, los Sólidos Pitagóricos.

¹ Sólidos Platónicos, Historia, Propiedades y Arte, Carlos Quezada, 2006

Sin embargo, el interés provocado por estos cuerpos geométricos no termina ahí, pues tiempo después se cree que fue Empedocles (480 - 430 a.C.) quien por primera vez asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro, a la tierra, el fuego, el agua y el aire respectivamente. Platón, posteriormente, asoció el dodecaedro con la sustancia de la que estaban compuestas las estrellas, esto porque la corriente de pensamiento de la época decía que esta habría de ser diferente a cualquiera, de las de la Tierra.²

Fue tanta la importancia que tuvieron estas figuras en el pensamiento de la época que Platón, en su obra maestra, el Timeo, pone en boca de Timeo de Locri estas palabras: "El fuego esta formado por tetraedros; el aire de octaedros; el agua de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, Dios ha utilizado esta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo". Los sólidos Pitagóricos dejaron de llamarse así para llamarse Sólidos Platónicos, nombre que conservaron en el tiempo y con el que se conocen en la actualidad.³



Figura: Relación de los Poliedros con la naturaleza

Los Pitagóricos estaban fascinados por estos poliedros, pero sobre todo, por el dodecaedro ya que, como mencionamos anteriormente ellos le atribuían una relación con el cosmos, además esta el hecho que tiene relación con el pentagrama místico, el Pentalfa.⁴

² Los Sólidos Platónicos. Historia propiedades y arte, Carlos Quezada, 2006

³ Los Sólidos Platónicos. Historia propiedades y arte, Carlos Quezada, 2006

⁴ Estrella de 5 puntas, emblema de la salud y símbolo de identificación de los Pitagóricos.



Esta estrella se obtiene al trazar en un pentágono regular sus diagonales. Una de las bellas propiedades que tiene el pentagrama es que los cortes entre las diagonales determinan segmentos que están en proporción Áurea o divina, siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono.

Sin embargo, el geometra que entiende que los Sólidos Platónicos son elementos matemáticos dignos de formalizar dentro de la matemática y realiza construcciones de estos inscribiéndolos en esferas, es Euclides de Alejandría. Euclides alrededor del año 300 a.C. escribe los Elementos, que es una recopilación de conocimientos sobre matemática acumulados hasta su tiempo, incluyendo también resultados propios de su trabajo. Esta obra se divide en trece libros en los que estudia figuras, ángulos, áreas, volúmenes y construcciones, dejando evidencias de su vasto conocimiento respecto de los sólidos platónicos.

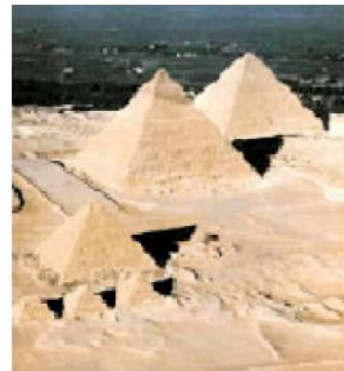
En estos libros Euclides describe cómo construir los Sólidos Platónicos y compara los lados de los poliedros, El lenguaje que utiliza para realizar estas construcciones es totalmente matemático, Llama a los vértices con letras A, B, C etc. y a las rectas que los unen (aristas), con la unión de las dos letras AB, BC, CA, etc. Las demostraciones que realiza, son difíciles de entender, ya que no utiliza ninguna ecuación, más bien describe todo con palabras.

Con todo, sigue los pasos rigurosamente y se basa en proposiciones anteriores del libro. Así pues, se llega en los Elementos a una formalización de los Sólidos Platónicos que quedan introducidos en el mundo de las matemáticas de forma definitiva.

Sin embargo, para que cualquier cultura se plantee estudiar algo con rigurosidad en un determinado momento de su historia, tienen que conocerlo con anterioridad. El conocimiento más antiguo que se tiene sobre los poliedros, procede de un yacimiento neolítico en Escocia, donde se encontraron figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C. las cuales se cree que se trataban de elementos decorativos o tal vez de algún tipo de juego.



Otras civilizaciones como la egipcia y la babilónica tenían conocimientos de algunos de estos poliedros. Una evidencia de ello la encontramos en las famosas pirámides, santuarios de eternidad de los faraones, en donde comienza a ponerse de manifiesto la conexión entre los poliedros y ciertos aspectos religiosos y místicos.



Las personas que conocen de antemano algunos sólidos, podrán pensar que las pirámides en Egipto, tienen la forma de un tetraedro, pero no es así, pues la base es cuadrada, por el contrario las pirámides presentan la forma de octaedros cortados por la mitad. Sin embargo, el hecho aislado de que se utilice esta forma para la construcción de un edificio no es absolutamente relevante, ya que no hay registros de que los egipcios utilizarasen otros sólidos platónicos en sus construcciones.

Lo que sí es importante, es ver cómo empiezan a aparecer en la historia estos objetos matemáticos y cómo civilizaciones o culturas como esta, les dieron algún tipo de importancia, como para construir sus templos sagrados.

Antes se mencionó, que Euclides probó que los únicos poliedros convexos regulares eran los Sólidos Platónicos. De hecho, este resultado es importante en la historia de las Matemáticas ya que constituye el primer ejemplo de teorema fundamental de clasificación: “Ninguna otra figura, además de estos cinco, se pueden construir con polígonos equiláteros y equiángulos”.

Su demostración es muy simple, ya que si tenemos un poliedro regular con m polígonos regulares de n lados que concurren en cada vértice entonces la suma (m sumandos) de los ángulos $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ que determinan las aristas en un vértice es menor que 360° , es decir:

$$m \cdot \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} < 360^\circ$$

Esto es, $(m-2) \cdot (n-2) < 4$. Las soluciones (m, n) a esta desigualdad son $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$ correspondiendo en cada caso con uno de los Sólidos Platónicos, esta nomenclatura para describir los Sólidos Platónicos se conoce con el nombre de notación de Schläfli, en honor a un profesor de escuela en Suiza llamado Ludwig Schläfli, quien en su tiempo libre se dedicaba a la investigación matemática.

1.2.1 Notación de Schläfli

Todos los sólidos regulares pueden ser denotados con el símbolo de *Schläfli* = $\{p, q\}$ donde p es el número de lados de cada cara y q el número de aristas que llegan a cada vértice. Cualquier otra información combinatoria, como el número de caras, de vértices o de aristas se puede hallar a partir de estos números, simplemente dándose cuenta de que cada arista une dos vértices y tiene dos caras adyacentes, así pues:

$$pC = 2A = qV \quad \text{donde} \quad \begin{cases} C = \text{número de caras} \\ A = \text{número de aristas} \\ V = \text{número de vértices} \end{cases}$$

Los grandes personajes de Grecia nombrados anteriormente como Pitágoras, Euclides, Solon o Tales entre otros, eran en efecto, por llamarlo de algún modo, hijos de Egipto, pues todos y cada uno de ellos viajó a Egipto y estudio con los sacerdotes, astrónomos y geometras. A través de ellos, y de otros, Egipto transmitió conocimiento, y permitió el desarrollo y expansión de él hasta nuestros días.

1.3 Sólidos Platónicos

Con lo expresado anteriormente, podemos identificar los sólidos platónicos, pero aún no tenemos una definición precisa de lo que son.

Antes de definirlos, mencionaremos ciertas características comunes en ellos, cada uno, sólo tiene un tipo de polígono como cara, el cual es un polígono regular por lo que se dice que un sólido platónico es un poliedro regular. Para entender de manera exacta qué es la regularidad de figuras en el espacio, recordemos la definición de polígono regular en el plano, que nos dice, que los polígonos son regulares si todos sus ángulos son congruentes entre sí y todos sus lados son también congruentes entre sí. El equivalente a esta condición en el espacio, sería que todas las caras del poliedro regular sean congruentes entre sí, como también sus ángulos poliedros. También, en el plano todos los polígonos regulares son convexos, propiedad que debemos conservar en tres dimensiones.

En los vértices tiene que existir la llamada regularidad, ya que en cada vértice del sólido, concurren el mismo número de aristas, como también de caras. Estamos en condiciones de dar una definición formal de poliedro regular o Sólidos Platónicos.

Definición 1.3.1 *Un sólido platónico es todo aquel poliedro convexo, cuyas caras son polígonos regulares, congruentes entre sí, y en cuyos vértices concurren el mismo número de aristas.*

1.4 Propiedades de los Sólidos Platónicos

1.4.1 Dimensiones fundamentales

Como en cualquier objeto matemático, en los sólidos platónicos existe una serie de dimensiones que es importante conocer, como son el área de la superficie y el volumen del sólido.

Cuando trabajamos con figuras planas, una manera fácil de calcular áreas es triangular la figura, es decir, podemos dividir en triángulos pues sabemos calcular su área, por lo que el área del polígono sería la suma de las áreas de todos los triángulos que forman el polígono dado.

Sin embargo, para calcular el área total de un poliedro regular, se calcula el área de una de sus caras y luego se multiplica esa cantidad por el número de caras que este poliedro posea.

Calcular el volumen de estas figuras puede ser mucho mas complicado, ya que hay que utilizar trucos parecidos al de la triangulación, pero con volúmenes, usando pirámides de las que sí que conocemos su volumen. En la actualidad, el Cálculo es una herramienta poderosa, utilizando integrales, que no se disponía de él en la antigüedad, y por otro parte la gente de hoy en día aún no esta familiarizada.

Como los cálculos son largos y constan sólo de operaciones sin demasiado interés para el lector, mostraremos directamente el resultado final de las fórmulas de áreas y volúmenes, para poliedros regulares de arista "a".

Poliedro	Cubo	Tetraedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Caras	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros
Vértices	8	4	6	20	12
Aristas	12	6	12	30	30
Área de la superficie exterior	$6a^2$	$\sqrt{3}a^2$	$2\sqrt{3}a^2$	$3\sqrt{25+19\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$
Volumen	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$

1.4.2 Simetrías

Los sólidos platónicos presentan un número significativo de simetrías. De hecho, tienen todos los tipos de simetrías que existen en el espacio, es decir, respecto a un punto, respecto a un eje y respecto a un plano, etc.

Simetría puntual: Para cada sólido Platónico existe un punto, que es el punto central del poliedro, que es su centro de simetría.

Simetría axial: Todos los sólidos tienen además varios ejes de simetría. Para cada poliedro la cantidad varía; pero en todos ellos el eje de simetría pasa por el centro de simetría.

Simetría de plano: todos los sólidos platónicos presentan simetrías respecto a planos, en las que los planos de simetría contienen al centro de simetría, y combinaciones de ejes de simetría.

Es demasiado complicado explicar cada simetría explícitamente para cada poliedro, pero hay que destacar que estas simetrías pueden ser clasificadas como grupos algebraicos. A continuación describiremos algunas características de estos grupos.

El grupo formado por las simetrías del tetraedro se llama Grupo de simetría del tetraedro T_d , este grupo tiene orden 24 lo que quiere decir que existen 24 simetrías diferentes para el tetraedro, de las cuales 6 son simetrías de plano. El grupo formado por las simetrías del cubo es el mismo que el grupo del octaedro y se llama Grupo de simetría del octaedro O_h , este grupo es de orden 48, y de estas simetrías, 9 son simetrías de plano.

También el dodecaedro e icosaedro tienen las mismas simetrías, es decir, comparten grupo de simetrías, siendo el Grupo de simetría del icosaedro I_h , este grupo tiene orden 120 de las cuales, 15 son simetrías respecto a un plano.

1.4.3 Dualidad

Entre los poliedros regulares existen relaciones llamadas duales, que se establecen entre parejas. De estas relaciones, unas son muy sencillas, otras más complejas, pero en definitiva todas responden al hecho de que los poliedros regulares no constituyen una serie de cinco cuerpos geométricos aislados, individuales y estáticos, en realidad, deben ser estudiados como un conjunto dinámico que permita entender mejor la generación particular de cada uno de ellos.

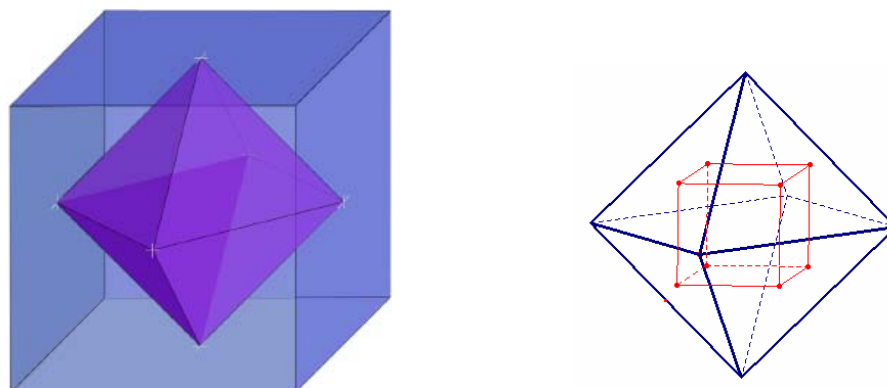
Bajo esta visión, si tomamos un tetraedro regular, y consideramos los puntos centrales de sus caras, uniendo estos puntos entonces nos damos cuenta que se forma otro tetraedro regular que esta invertido, pero que formalmente le llamaremos inverso. Si hacemos crecer este tetraedro inverso, llegará un momento en que los puntos medios de sus aristas se interceptarán en los puntos medios de las aristas del tetraedro original, dando origen a un octaedro, por lo tanto, se observa que el octaedro no es mas que el resultado de la región determinada por la intercepción de dos tetraedros congruentes e inversos. Además, si tomamos los vértices de los tetraedros iguales e inversos y los unimos, resulta un hexaedro o bien llamado cubo, luego, el octaedro que había resultado anteriormente esta circunscrito a este cubo. Ahora bien, si observamos con mucha atención, podemos darnos cuenta que bajo un razonamiento adecuado y con operaciones similares a las anteriores, se obtienen todos los sólidos regulares o de Platón.

Considerando las ideas del párrafo anterior podemos formalizar la idea de dualidad de los poliedros regulares.

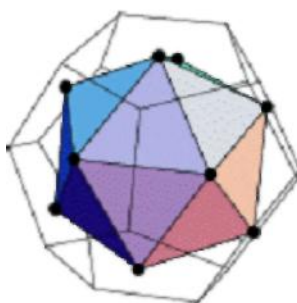
Definición 1.4.1 *Dos poliedros son duales, si en uno de ellos unimos entre sí los centros de sus caras, obtenemos como resultado otro poliedro cuyo número de caras coincide con el número de vértices del primero.*

El tetraedro regular tiene 4 caras, lo que nos indica que su dual ha de tener 4 vértices. Si nos fijamos bien, el propio tetraedro tiene 4 vértices y si construimos su dual resulta ser el propio tetraedro. A este tipo de poliedros cuyo dual es el mismo, se les llama autoduales.

El cubo y el octaedro son duales entre sí. Efectivamente, el número de caras de uno es el de vértices del otro, y viceversa, como se puede comprobar en la ilustración. Esta es la razón por la que ambos compartirían el mismo grupo de simetría, además, cada simetría que se puede establecer con las caras de uno, se obtienen con los vértices del otro.



También son duales el dodecaedro y el icosaedro, además como recordaremos, ambos tienen el mismo grupo de simetría.



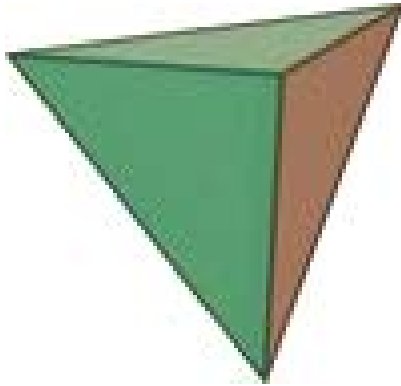
Para una mayor comprensión del trabajo realizado en el análisis de cada uno de los sólidos platónicos, encontraremos el siguiente formato:

- Definición.
- Representación gráfica del sólido en tres dimensiones.
- Tabla con detalle descriptivo del poliedro: número de caras, aristas y vértices. Medida del ángulo diedro, número de caras concurrentes y la notación de Schläffi.
- Fórmula de área y volumen del poliedro.
- Red del poliedro.
- Una visión de los poliedros denominada Geometría Sagrada.

1.5 Los Sólidos Regulares

1.5.1 El Tetraedro

Poliedro regular de cuatro caras, todas ellas triángulos equiláteros, se puede decir que es una pirámide triangular.



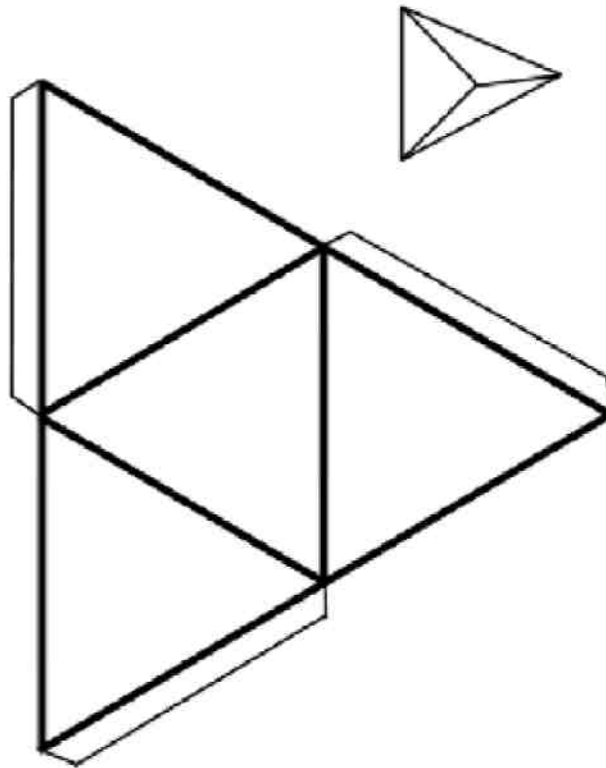
Algunas características notables son las siguientes:

Caras	Aristas	Vértices	Angulo Diedro	Caras concurrentes en un vértice	Notación de Schläfli
4	6	4	$70.53^\circ = \arccos(1/3)$	3	{3,3}

Cálculos de área y volumen, si la medida de la arista es “a” entonces

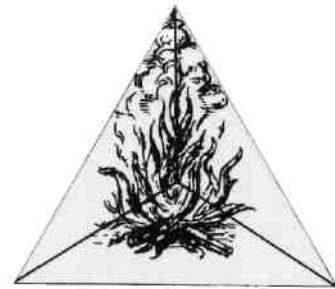
Área	Volumen
$a^2 \sqrt{3}$	$a^3 \sqrt{12}$

Red



Geometría Sagrada

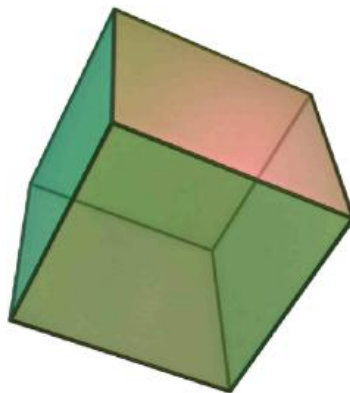
El Tetraedro es la forma más básica de los Sólidos Platónicos. Sus ángulos, caras y vértices, lo hacen una estructura muy estable. Nos muestra equilibrio y armonía, es una pirámide perfecta.



Esta asociado al elemento fuego, también simboliza el trabajo de elevación de la conciencia hasta los ámbitos sagrados del Ser. Su vértice representa la integración de los planos laterales para dar lugar al contacto con el ser supremo.

1.5.2 El cubo

Es uno de los cinco poliedros regulares, esta formado por seis caras cuadradas, también es conocido como hexaedro. Además, el cubo es un ortoedro, es decir, sus caras son perpendiculares.



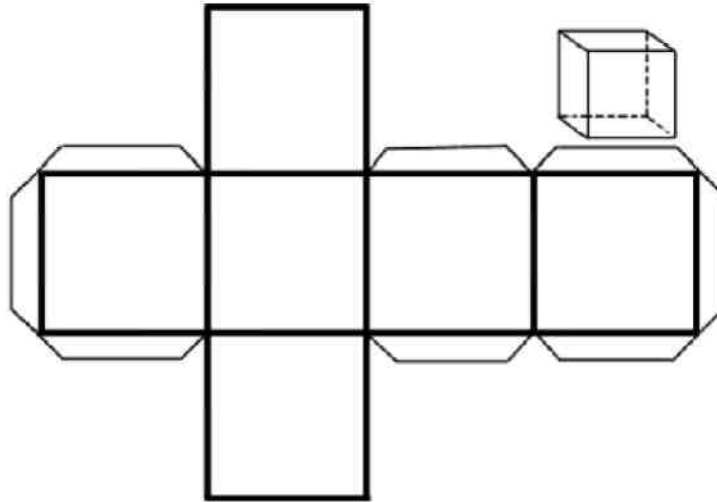
Algunas características notables son las siguientes:

Caras	Aristas	Vértices	Angulo Diedro	Caras concurrentes en un vértice	Notación de Schläfli
6	12	8	90°	3	{4,3}

Cálculo de área y volumen, si la medida de la arista es “a” entonces:

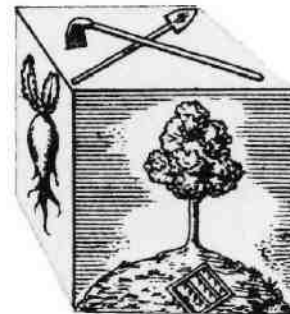
Área	Volumen
$6a^2$	a^3

Red



Geometría Sagrada

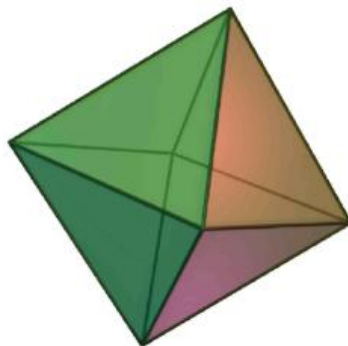
Desde los comienzos de estudio de estos sólidos, Platón asoció cada uno de ellos a los elementos de la tierra y el universo, esta visión particular de los poliedros regulares nos sitúa en un contexto espiritual poco usual para matemáticos pero necesario para entender el punto de vista que ellos tenían.



La relación sagrada que en esos tiempos se le atribuía al cubo era con el elemento tierra, esto porque consideraban que esta figura era fuerte y estable, sin embargo, meditaban que su relación arquetípica lo hacia inestable, flexible y en constante cambio como la tierra misma, pese a esto llegaron a concluir que puesto que sus cambios son mas lentos aparentemente se mueve poco o casi nada.

1.5.3 El Octaedro

Poliedro regular de ocho caras. Está formado por ocho triángulos equiláteros, todos congruentes entre sí.



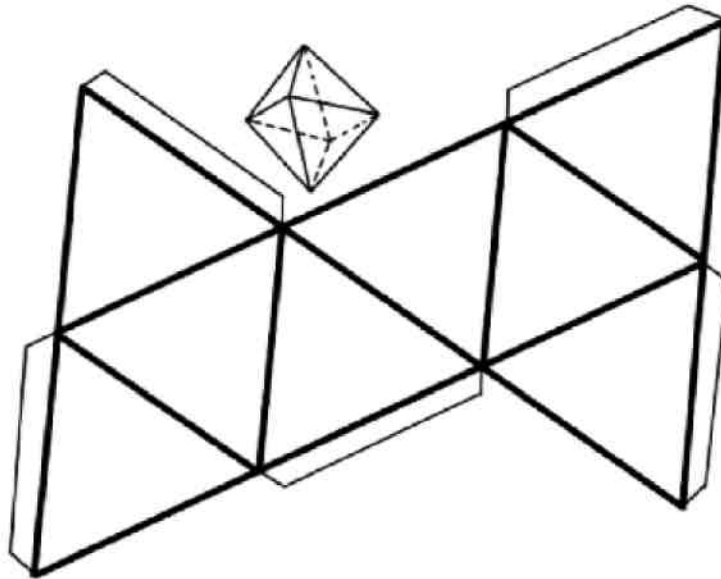
Algunas características notables son las siguientes:

Caras	Aristas	Vértices	Angulo Diedro	Caras concurrentes en un vértice	Notación de Schläfli
8	12	6	$109.47^\circ = \arccos(-1/3)$	4	{3,4}

Cálculo de área y volumen, si la medida de la arista es “a” entonces:

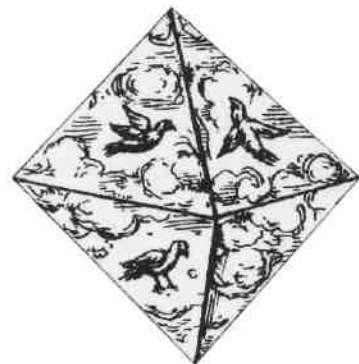
Área	Volumen
$2\sqrt{3} a^2$	$V = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot a^3$

Red



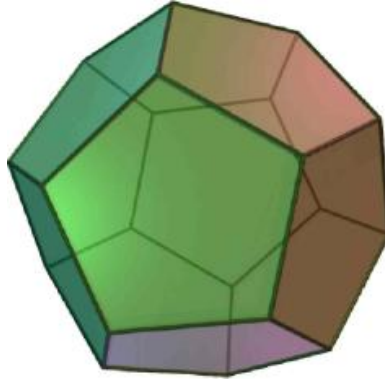
Geometría Sagrada

El Octaedro esta relacionado arquetípicamente con el elemento aire, estando referido al mundo de nuestra Mente: actividad mental, pensamientos, comunicación y conocimientos.



1.5.4 El Dodecaedro

Poliedro regular formado por doce caras. Todas sus caras son pentágonos regulares.



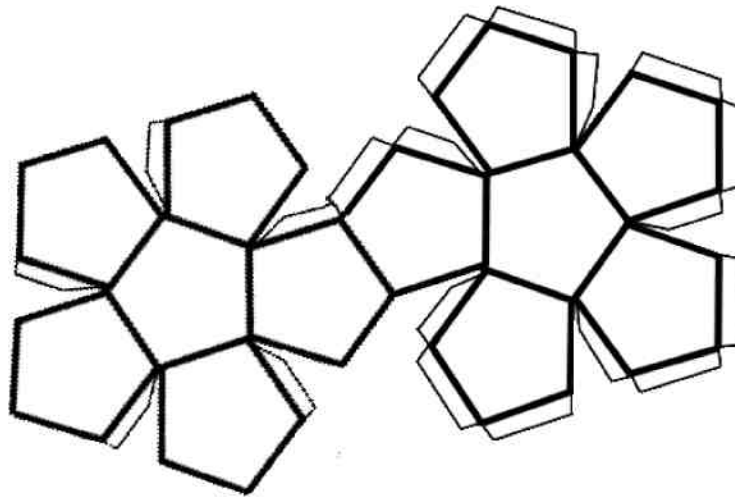
Algunas características notables son las siguientes:

Caras	Aristas	Vértices	Angulo Diedro	Caras concurrentes en un vértice	Notación de Schläfli
12	30	20	116.56°	3	{5,3}

Cálculo de área y volumen, si la medida de la arista es “a” entonces:

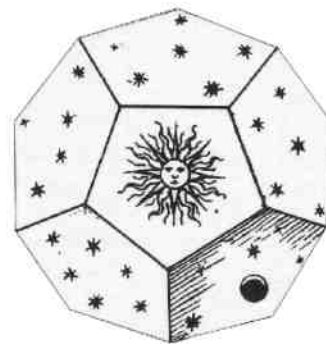
Área	Volumen
$A = 12 \cdot \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \cdot a^2 = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot a^2$ (Aproximadamente $20,65 \cdot a^2$)	$V = \frac{1}{4} (15 + 7\sqrt{5}) \cdot a^3$ (Aproximadamente $7,66 \cdot a^3$)

Red



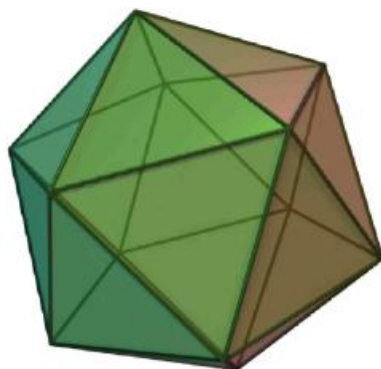
Geometría Sagrada

El Dodecaedro está considerado como el más complejo de los Sólidos Platónicos. El elemento asociado es el éter, que suponía era la materia oscura del universo por donde viajaba la luz. Simbolizaba la energía Cósmica en su proceso Creativo y que llegaba más allá de las fronteras físicas.



1.5.5 El Icosaedro

Poliedro regular formado por veinte caras. Todas sus caras son triángulos equiláteros.



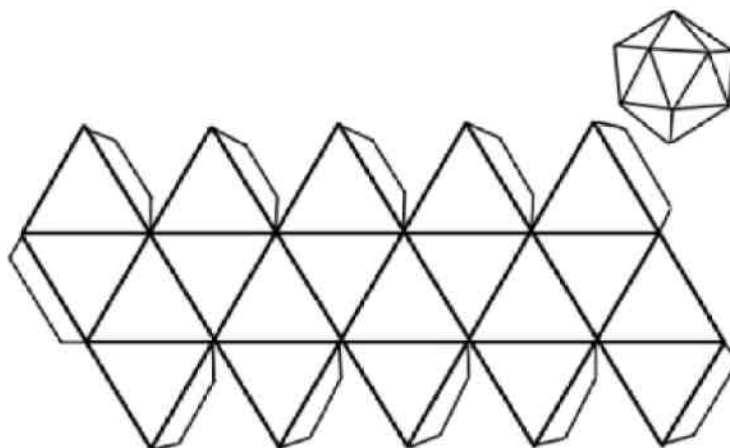
Algunas características notables son las siguientes:

Caras	Aristas	Vértices	Angulo Diedro	Caras concurrentes en un vértice	Notación de Schläfli
20	30	12	138.189685°	5	{3.5}

Cálculo de área y volumen, si la medida de la arista es “a” entonces:

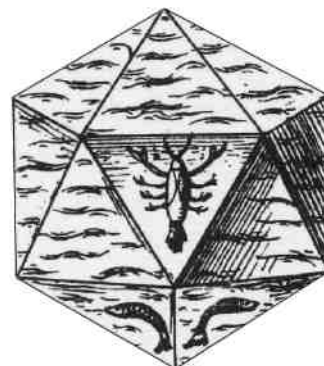
Área	Volumen
$A = 20 \cdot A_c = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = 5\sqrt{3} \cdot a^2$ (Aproximadamente $8,66 \cdot a^2$)	$V = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) \cdot a^3$ (Aproximadamente $2,18 \cdot a^3$)

Red



Geometría Sagrada

El Icosaedro se consideró relacionado originalmente con el elemento agua, por lo que está referido al mundo de la energía emocional. Sabemos que nuestros cuerpos están formados por un gran porcentaje de agua y esto hace que este elemento tenga una importancia vital en nuestros procesos internos.



Recientes estudios, del Dr. Masaru Emoto⁵ han demostrado que el agua es un receptor y fijador de los campos energéticos que se le acercan o se impregnan, por lo que equilibrar este elemento es básico para un estado de Salud.

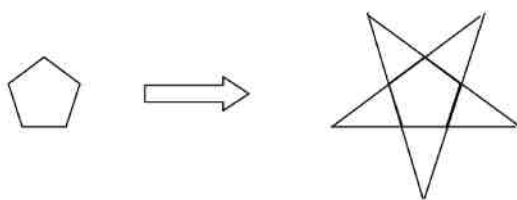
⁵ Para más información puedes visitar <http://www.masaru-emoto.net/english/entop.html>

1.5.6 Sólidos de Kepler-Poinsot

Como hemos visto, poliedros regulares convexos, sólo hay cinco. Si eliminamos la condición de ser convexo, tenemos cuatro más. Estos son conocidos como los poliedros de Kepler-Poinsot. Por lo tanto, una definición adecuada para estos Sólidos la tenemos a continuación.

Definición 1.5.1 *Un sólido de Kepler-Poinsot es todo aquel poliedro regular, no convexo.*

Una forma de visualizar y entender la construcción de estos sólidos es la siguiente: los poliedros clásicos son cóncavos. Sin embargo, para los Sólidos de Kepler-Poinsot se pide que las caras sean regulares, lo cual en principio parece un poco extraño, porque ya se han construido con anterioridad todos los poliedros posibles con polígonos regulares, entonces, se recurre a polígonos regulares estrellados, que es el equivalente a los polígonos regulares, pero en versión no convexa, y que se obtienen a partir de ellos, simplemente prolongando sus lados hasta que se corten, a este proceso se le llama estelación.



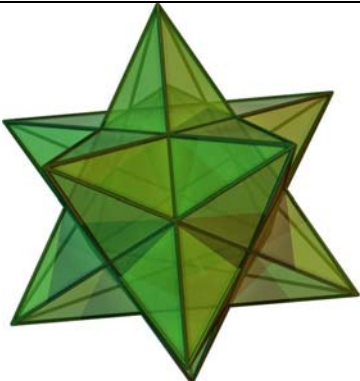
Johannes Kepler quien nació en 1571 y murió a los 59 de edad, aplicó en 1619 este proceso a los sólidos platónicos, sin embargo, para el Tetraedro, el Cubo y el Octaedro no funcionó, pues la prolongación de las aristas no vuelve a intersectarse con ninguna otra, pero para el Dodecaedro e Icosaedro obtuvo dos poliedros regulares no convexos, el Gran Dodecaedro Estrellado y el Pequeño Dodecaedro Estrellado. Aunque el segundo proceda del Icosaedro, los dos llevan Dodecaedro en su nombre porque ambos tienen doce caras con la forma de la estrella regular de cinco puntas llamada pentagrama. El poliedro se autointersecta, es decir, que sus caras no son visibles por completo porque otras la atraviesan ocultándola parcialmente.

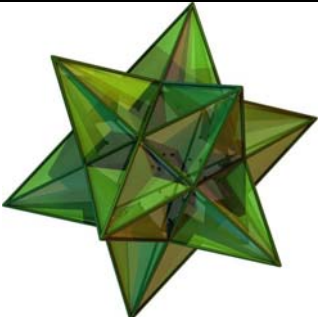
Posteriormente en 1809 Louis Poinot (1777-1859) descubrió dos poliedros no convexos regulares, el Gran Icosaedro y el Gran Dodecaedro.

Las 12 caras del Gran Dodecaedro son pentágonos, pero que, a diferencia del Dodecaedro, se intersecan unas a otras. El gran Icosaedro se obtiene con 20 triángulos, intersectándose entre si.

Una observación es que los Sólidos de Poinot son los duales de los Sólidos de Kepler.

Sólidos de Kepler-Poinot:

Nombre	Gráfica	Notación de Schläfli	Características
Pequeño Dodecaedro estrellado		$\{\frac{5}{2}, 5\}$	12 caras 30 aristas 12 vértices
Gran Dodecaedro estrellado		$\{\frac{5}{2}, 3\}$	12 caras 30 aristas 20 vértices

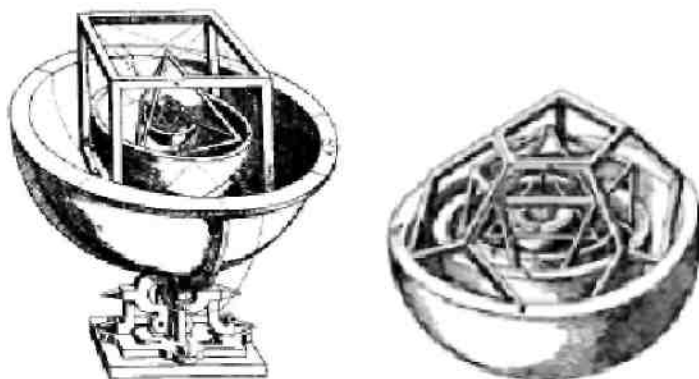
Gran Icosaedro		$\{3, \frac{5}{2}\}$	20 caras 30 aristas 12 vértices
Gran Dodecaedro		$\{5, \frac{3}{2}\}$	12 caras 30 aristas 12 vértices

“Un sólido de Kepler cubre su esfera circunscrita más de una vez, con los centros de las caras como puntos direccionales en los sólidos con caras en forma de pentagrama, mientras que en los otros son los vértices los que cumplen esa función. Por esta razón, no son necesariamente equivalentes topológicos de la esfera como lo son los sólidos platónicos, y en particular la característica de Euler $V - A + C = 2$ se verifica solamente para Gran Dodecaedro Estrellado y Gran Icosaedro”⁶

“Esto dependerá de como observemos el poliedro. Considérese, por ejemplo, el pequeño dodecaedro estrellado. Consiste de un dodecaedro con una pirámide pentagonal en cada una de sus 12 caras. En consecuencia, las 12 caras se extienden a pentagramas con el pentágono central dentro del sólido. La parte externa de cada cara consiste de cinco triángulos conectados por sólo cinco puntos. Si las contamos separadamente, hay 60 caras (pero estas son triángulos isósceles, no polígonos regulares). De modo similar, cada lado puede ser contado como tres, pero entonces los habrá de dos tipos. Igualmente, con los “cinco puntos” antes mencionados: en total habrá 20 puntos que pueden contarse como vértices, por lo que tendremos un total de 32 vértices (otra vez, de dos tipos). Ahora, la ecuación de Euler se verifica: $60 - 90 + 32 = 2$ ”.⁷

⁶⁻⁷ Sólidos de Kepler-Poinsot - Wikipedia la enciclopedia libre

Además Johannes Kepler estuvo muy interesado por las propiedades de los sólidos platónicos y busco ingeniosas justificaciones a la asociación de Platón entre poliedros y elementos. Por ejemplo, la asociación entre el Universo y el Dodecaedro la atribuye al hecho que el número de sus caras coincide con el de los signos del zodíaco. Luego en 1595 Kepler, convencido de haber comprendido los secretos del Universo, creó un modelo del sistema planetario que utilizaba los Sólidos Platónicos para describir las distancias entre las órbitas de los seis planetas que se conocían entonces. En su modelo Kepler parte de una esfera exterior, que representa la órbita de Saturno dentro de la cual va inscribiendo sucesivamente: un Cubo, la esfera de Júpiter, un Tetraedro, la esfera de Marte, un Dodecaedro, la esfera de la Tierra, un Octaedro y finalmente la esfera de Mercurio. En el centro del sistema colocó el Sol.⁸



⁸ Un análisis detallado puede encontrarse en su libro *El secreto del Universo*

1.6 Sólidos de Arquímedes

Poliedro en griego se escribe polyshedra, en donde, “polys”, significa “múltiples” y “hedra”, significa “cara”. También sabemos que un poliedro convexo es regular, si sus caras son polígonos regulares idénticos y si en cada vértice concurre el mismo número de aristas.

Definición 1.6.1 *Un poliedro se dice que está truncado, cuando se eliminan partes de él, mediante el corte con planos.*

Definición 1.6.2 *Un poliedro se llama de Arquímedes, cuando es el poliedro resultante del truncamiento de un sólido de Platón, en la razón un tercio o un medio, por cada una de sus aristas.*

Cabe destacar que ambas razones no se combinan entre sí para hacer el truncamiento, si no, que se realizan de manera independiente una de otra.

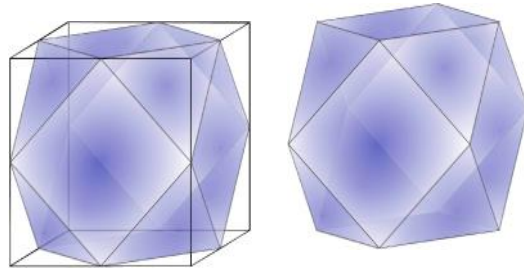
Los sólidos de Arquímedes tienen todas sus caras regulares pero no congruentes, también se les llama semirregulares.

Considerando que el universo y posibilidades que se pueden obtener a partir de los poliedros platónicos y sus truncamientos es incontable, destacaremos que son dieciocho los poliedros mas conocidos y se conocen con el nombre de Poliedros Clásicos, de estos, cinco son de Platón y trece de Arquímedes.

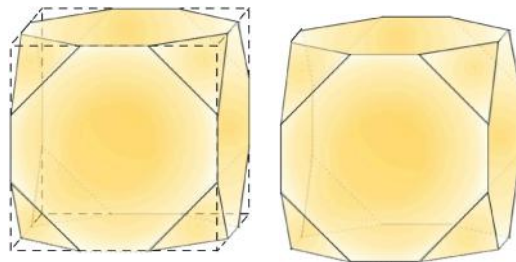
Esquematizaremos a continuación los mecanismos por los cuales se truncan los Sólidos Platónicos para obtener los Arquimedianos.

Como sabemos, los poliedros Arquimedianos resultan efectuando dos tipos de cortes o secciones:

1. Cortando con un plano que pase por el punto medio de todas las aristas que concurren en cada vértice. El nuevo poliedro tendrá algunas caras cuyo número de lados será igual al orden del vértice y otras del mismo número de lados que las caras del poliedro original.



2. Cortando con un plano que pase a una distancia del vértice igual a un tercio del valor de la arista. El poliedro resultante tendrá algunas caras con un número de lados igual al orden del vértice y otras con el doble del número de lados que tenía el poliedro original.



De esta manera, siete sólidos Arquimedianos se pueden obtener truncando sólidos platónicos: el tetraedro truncado, el cuboctaedro, el cubo truncado, el octaedro truncado, el icosido-decaedro, el dodecaedro truncado y el icosaedro truncado.

Los dos rombicuboctaedros se pueden obtener a partir del cuboctaedro mediante sucesivas operaciones de truncamiento.

De forma similar, los dos rombicosidodecaedros se pueden obtener a partir del icosidodecaedro mediante sucesivas operaciones de truncamiento.

Las dos redes del cuboctaedro romo o también llamado Snub se pueden obtener a partir del rombicuboctaedro, mediante una transformación más compleja que incluye una rotación coordinada de los cuadrados paralelos a los originales del cubo, de los triángulos que los conectan por sus vértices y, simultáneamente, la conversión de cada uno de los cuadrados que los conectan por las aristas en dos triángulos equiláteros.

De forma similar, las dos redes del Icosidodecaedro Romo se pueden obtener a partir del Rombicosidodecaedro, mediante una rotación coordinada de los pentágonos paralelos a los originales del Dodecaedro, de los triángulos que los conectan por sus vértices y, simultáneamente, la conversión de cada uno de los cuadrados que los conectan por las aristas en dos triángulos equiláteros.

El cuboctaedro es el caso coincidente del truncamiento del cubo y del octaedro. De forma similar, el icosidodecaedro es el caso límite coincidente del truncamiento del dodecaedro y del icosaedro. Ambos son los únicos sólidos arquimedianos cuyas aristas son uniformes.

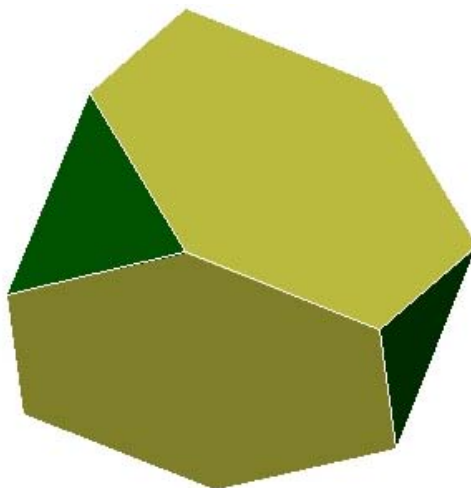
Dado que en los vértices de los sólidos arquimedianos se encuentran varios tipos de polígonos se ha buscado una forma de nombrar la forma de los vértices; se dice por ejemplo que un vértice tiene configuración (5,5,3) cuando en el vértice se encuentran dos pentágonos y un triángulo, como en el Icosidodecaedro. Este sistema se aplica para todos las demás familias de poliedros.

En esta sección se detallan los sólidos de la siguiente manera:

- Definición
- Representación gráfica en tres dimensiones.
- Tabla con detalle descriptivo del poliedro: número de caras, aristas y vértices, y el número de caras concurrentes.
- Red del poliedro

1.6.1 Tetraedro Truncado

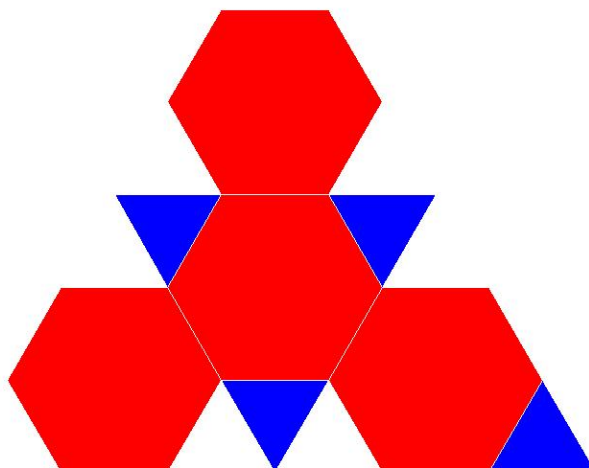
El Tetraedro truncado es un sólido arquimediano que se obtiene truncando en la tercera parte, cada vértice de un tetraedro con lo que resultan 8 caras: 4 del tetraedro original que se convierten de triangulares a hexagonales y 4 nuevas que resultan de los vértices, en este caso triangulares.



Características notables

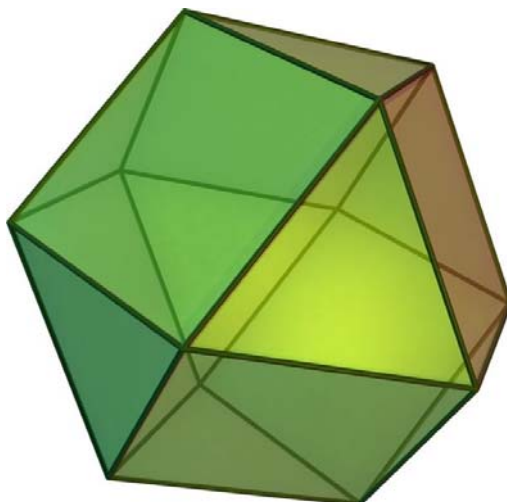
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
8	18	12	3

Red



1.6.2 Cuboctaedro

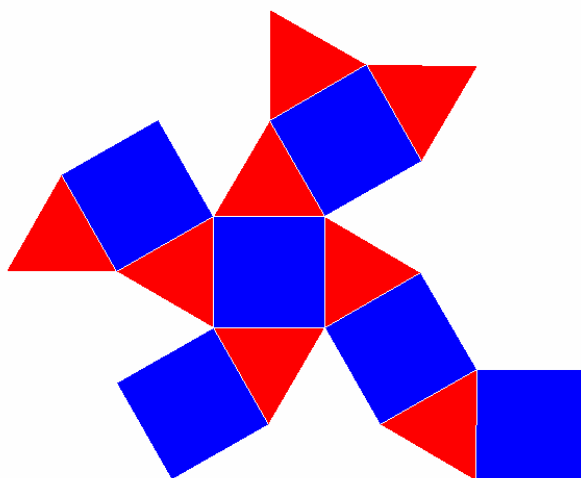
El cuboctaedro es un sólido que se obtiene truncando cada vértice de un cubo, con una razón de 1 : 2, con lo que resultan 14 caras: 6 del cubo, que continúan cuadradas y 8 nuevas caras que resultan del truncamiento de los vértices.



Características notables

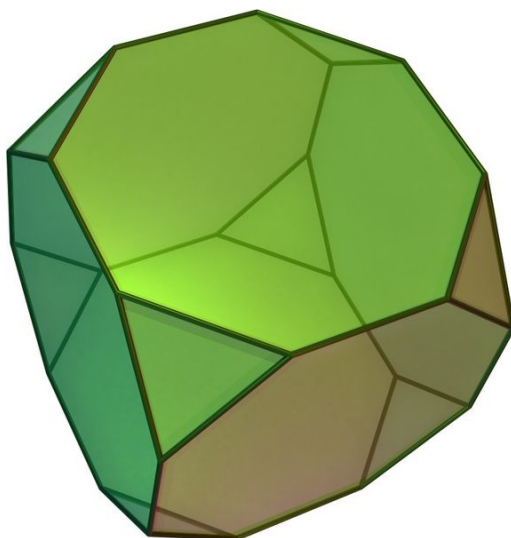
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
14	24	12	3

Red



1.6.3 Cubo Truncado

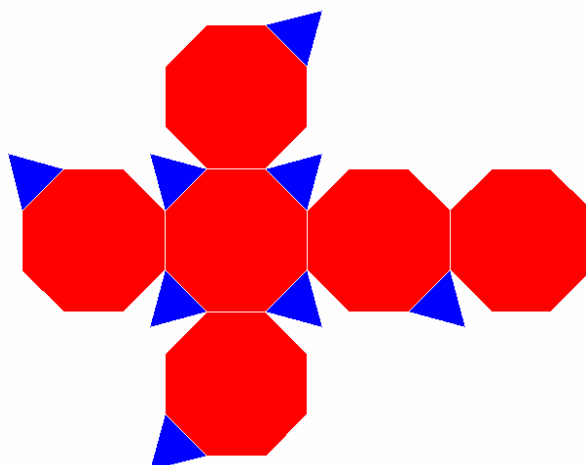
El Cubo truncado es un sólido de Arquímedes que se obtiene truncando un cubo, es una forma especial de cuboctaedro en el que el corte sólo llega hasta un tercio de la cara cuadrada del cubo original. Por esta característica tiene el mismo número de caras que el Cuboctaedro: 14 caras 8 de ellas son triángulos y 6 de ellas octágonos; tiene 24 vértices; 34 aristas.



Características notables

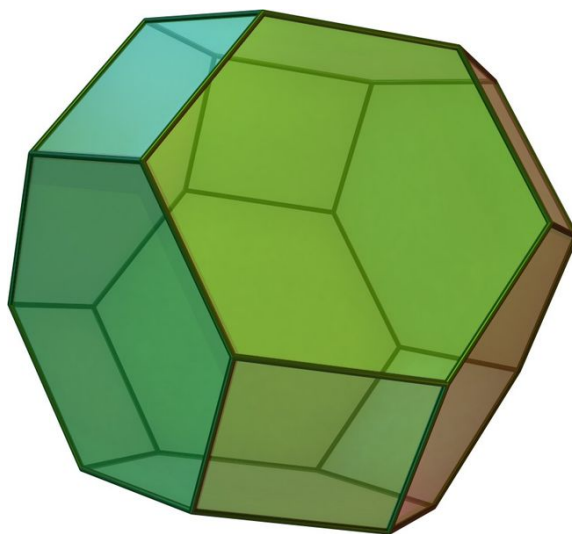
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
14	36	24	3

Red



1.6.4 Octaedro Truncado

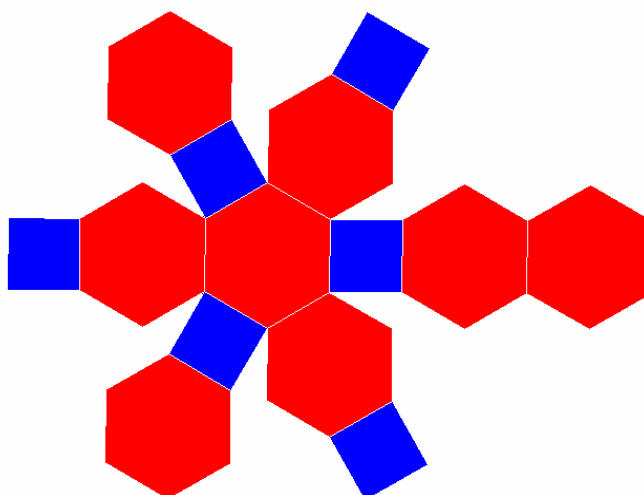
El Octaedro Truncado es un sólido de Arquímedes que se obtiene truncando cada vértice de un Octaedro en una razón de 1:3.



Características notables

Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
14	36	24	3

Red



1.6.5 Rombicuboctaedro

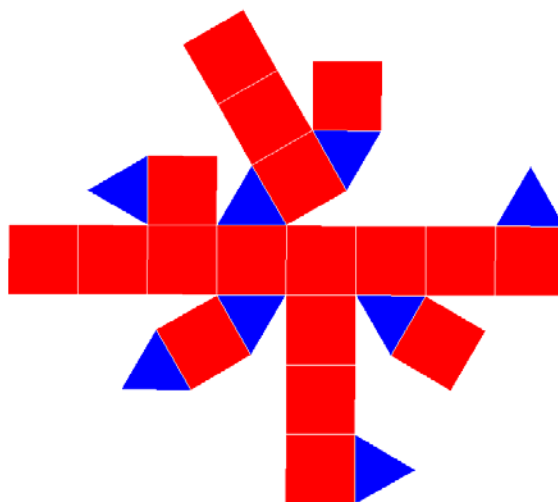
El Rombicuboctaedro o Pequeño Rombicuboctaedro es un Sólido de Arquímedes que se obtiene truncando cada vértice de un cuboctaedro en la razón 1:2, con lo que resultan 8 caras: 4 del tetraedro original que se convierten de triangulares a hexagonales y 4 nuevas que resultan de los vértices, en este caso triangulares.



Características notables

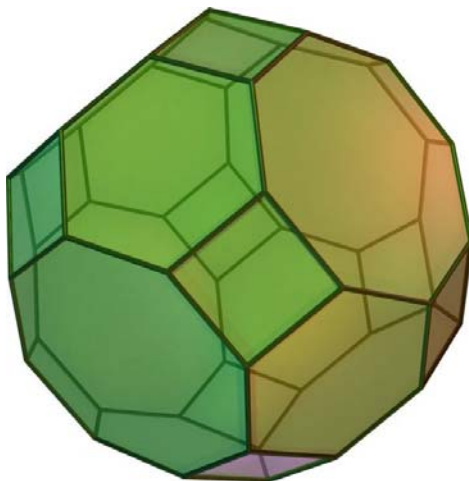
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
26	48	24	4

Red



1.6.6 Cuboctaedro truncado

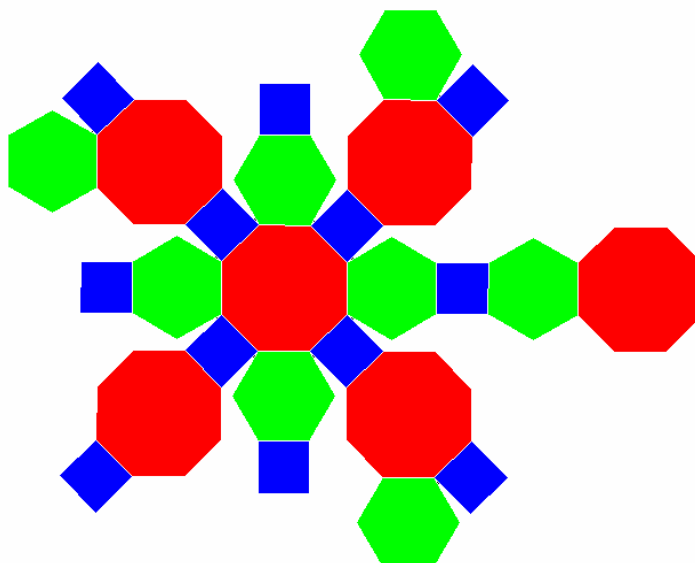
El Cuboctaedro truncado es un sólido que se obtiene truncando un cuboctaedro en sus vértices en la razón 1:3, quedando 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octágonos regulares.



Características notables

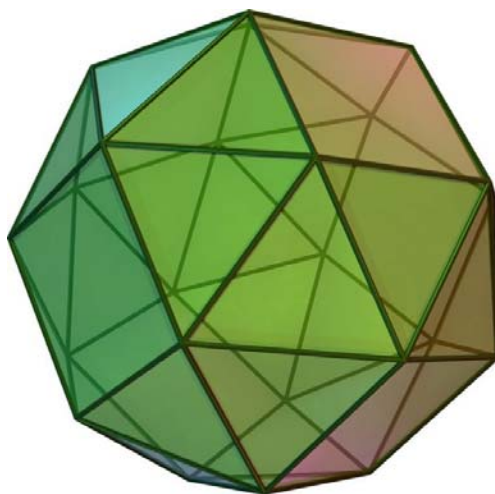
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
26	72	48	3

Red



1.6.7 Cuboctaedro Snub

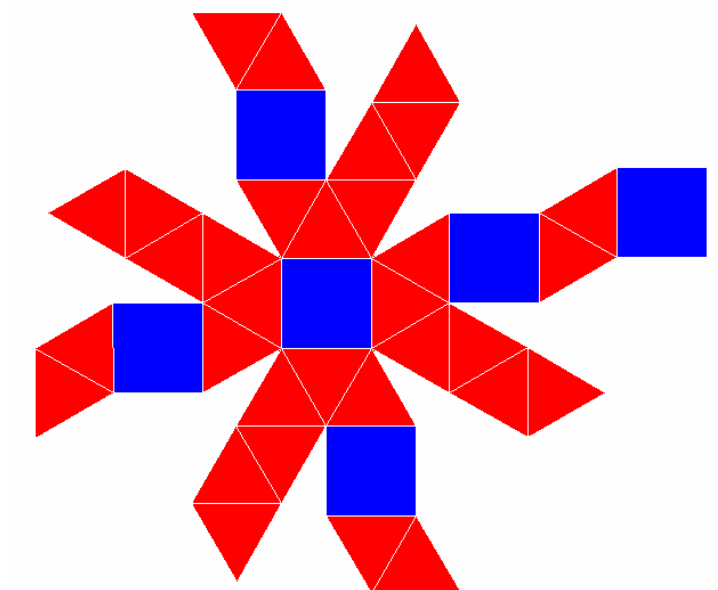
El cuboctaedro snub es un sólido que se obtiene truncando un cuboctaedro, quedando conformado por: 32 triángulos equiláteros y 6 cuadrados.



Características notables

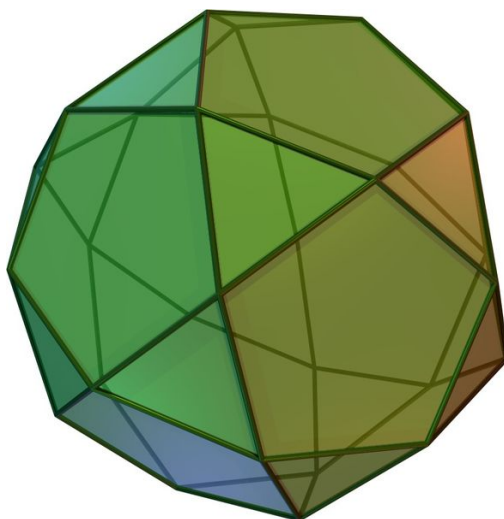
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
38	60	24	5

Red



1.6.8 Icosidodecaedro

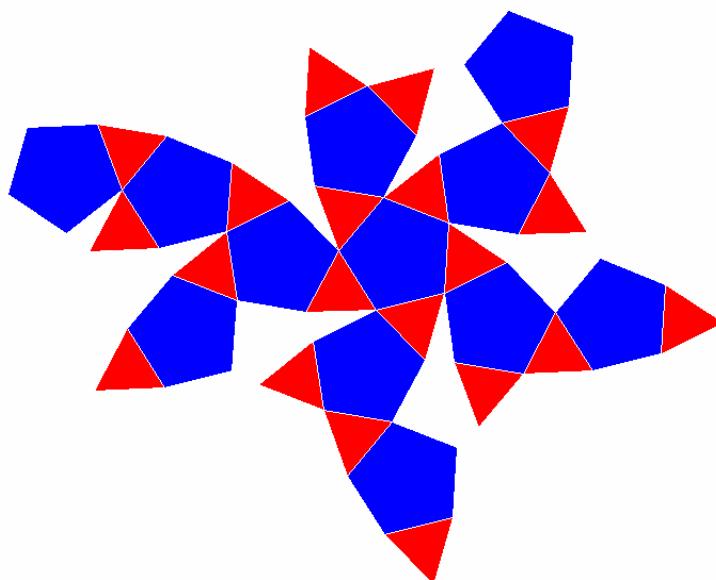
El Icosidodecaedro esta formado por 20 triángulos equiláteros y 12 pentágonos regulares.



Características notables

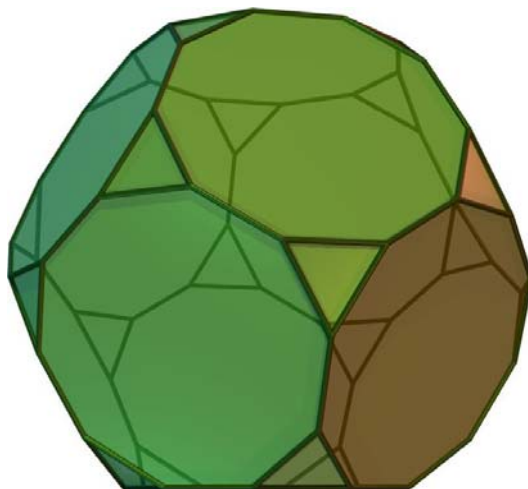
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
32	60	30	4

Red



1.6.9 Dodecaedro Truncado

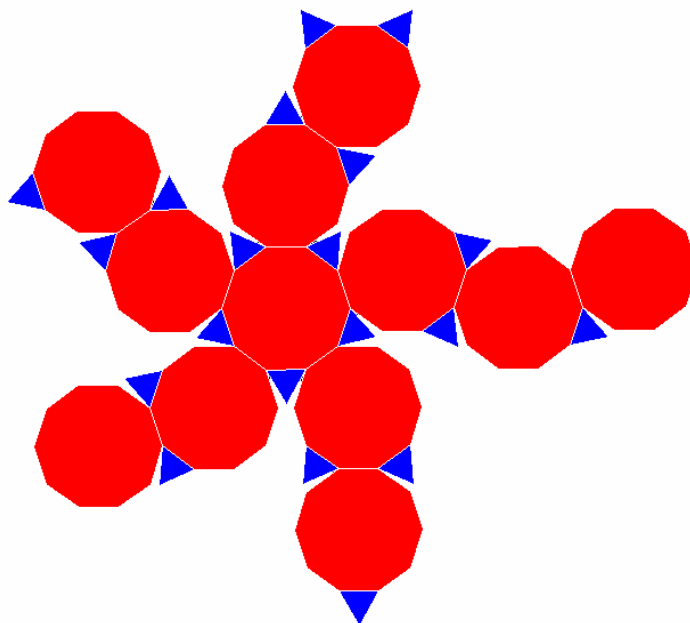
El dodecaedro truncado es un sólido de Arquímedes que se obtiene truncando cada vértice de un dodecaedro en una razón de 1:3, obteniendo 20 triángulos equiláteros y 12 decágonos regulares.



Características notables

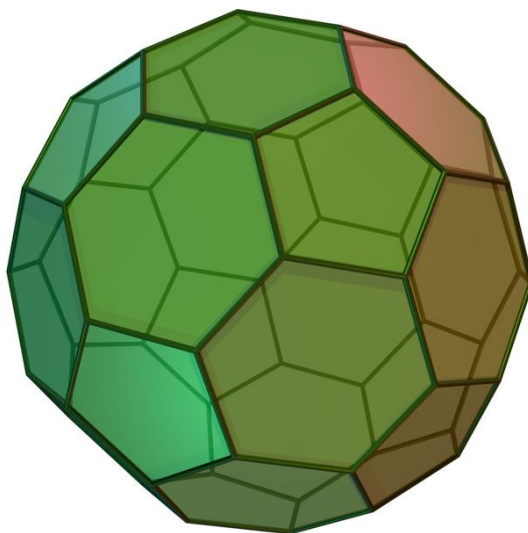
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
32	90	60	3

Red



1.6.10 Icosaedro Truncado

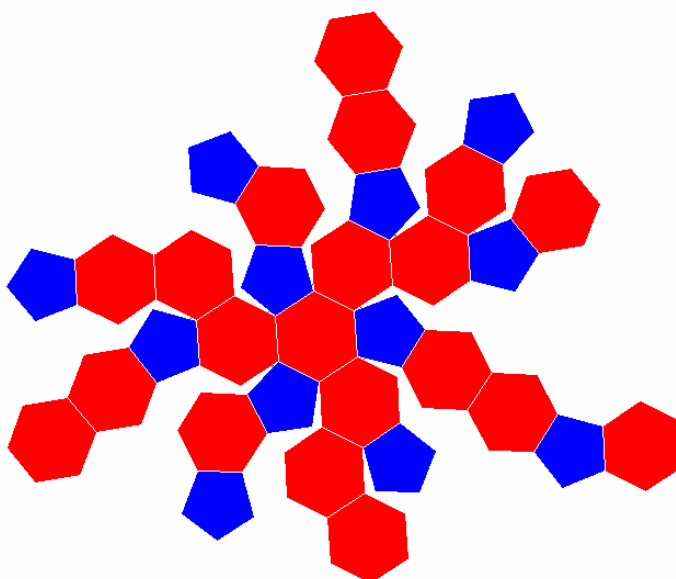
El icosaedro truncado es un sólido de Arquímedes que se obtiene truncando cada vértice de un icosaedro en una razón 1:3, se obtienen 12 pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares.



Características notables

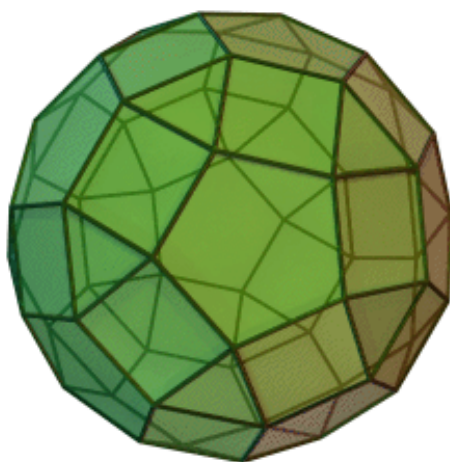
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
32	90	60	3

Red



1.6.11 Rombicosidodecaedro

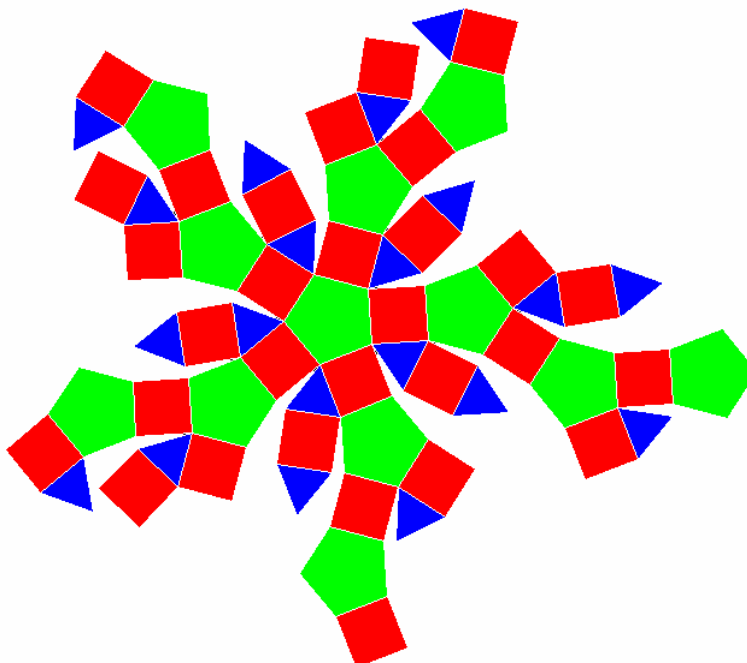
El Rombicosidodecaedro es un sólido de Arquímedes. Su volumen puede llenar hasta el 93.32% de una esfera. Está formado por 12 pentágonos, 30 cuadrados y 20 triángulos.



Características notables

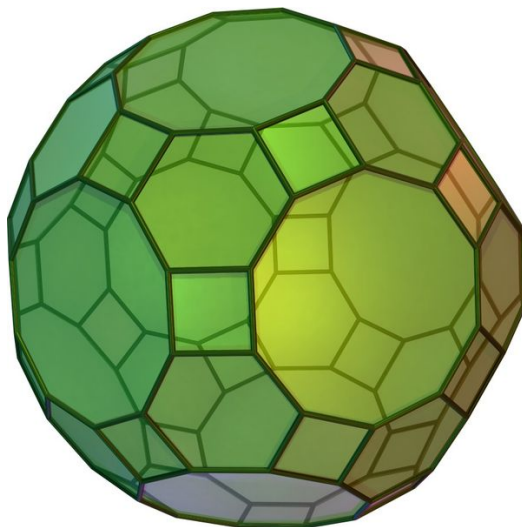
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
62	120	60	4

Red



1.6.12 Icosidodecaedro Truncado

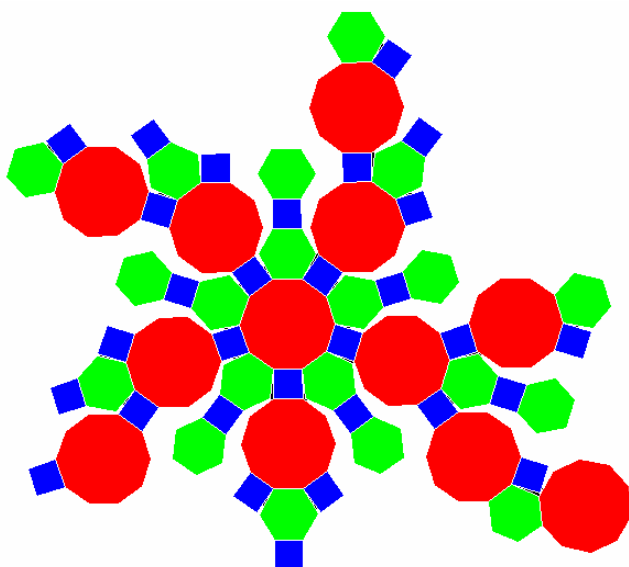
El icosidodecaedro truncado es un sólido que se obtiene truncando los vértices de un icosidodecaedro en la razón 1:3, quedando formado por 30 cuadrados, 20 hexágonos regulares y 12 decágonos regulares.



Características notables

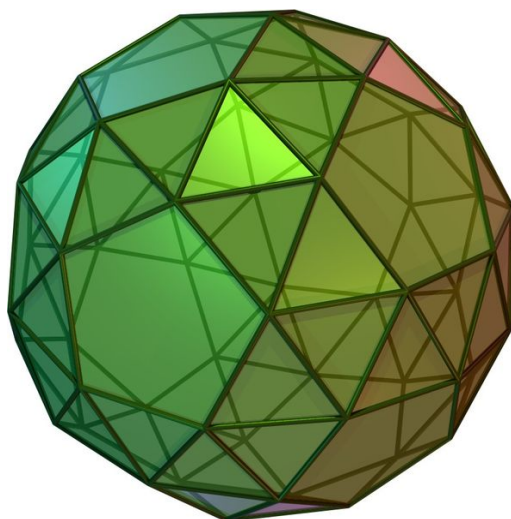
Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
62	180	120	3

Red



1.6.13 Icosidodecaedro Romo

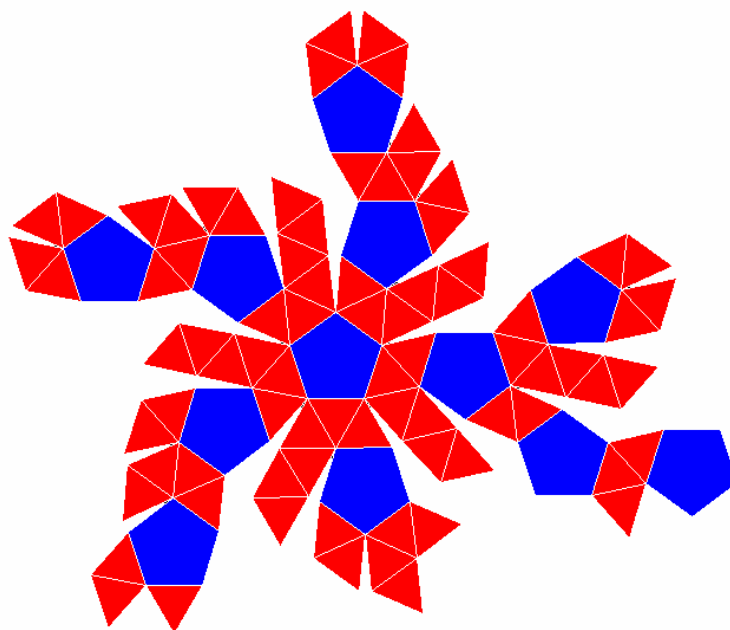
El icosidodecaedro romo o dodecaedro romo está formado por 80 triángulos equiláteros y 12 pentágonos regulares.



Características notables

Caras	Aristas	Vértices	Caras concurrentes en un vértice
92	150	60	5

Red



1.6.14 Resumen de los Sólidos de Arquímedes

Vértices	Aristas	Caras	Nombre	Procede	Polígonos regulares que los forman					
					Tr.	Cu.	Pe.	Hx.	Oc.	De.
12	18	8	Tetraedro Truncado	Tetraedro	4		4			
12	24	14	Cuboctaedro	Cubo	8	6				
24	36	14	Cubo Truncado	Cubo	8				6	
24	36	14	Octaedro Truncado	Octaedro		6		8		
24	48	26	Rombicuboctaedro	Cuboctaedro	8	18				
48	72	26	Cuboctaedro truncado	Cuboctaedro		12		8	6	
24	60	38	Cuboctaedro Snub	Cuboctaedro	32	6				
30	60	32	Icosidodecaedro		20		12			
60	90	32	Dodecaedro Truncado	Dodecaedro	20					12
60	90	32	Icosaedro Truncado	Icosaedro			12	20		
60	120	62	Rombicosido-decaedro		20	30	12			
120	180	62	Icosidodecaedro Truncado	Icosidodecaedro		30		20		12
60	150	92	Icosidodecaedro Romo	Icosidodecaedro	80		12			

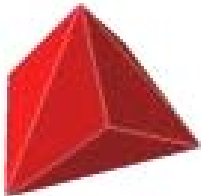
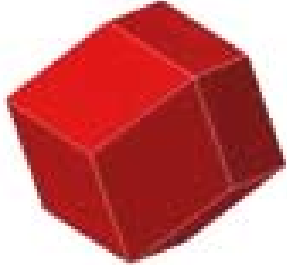
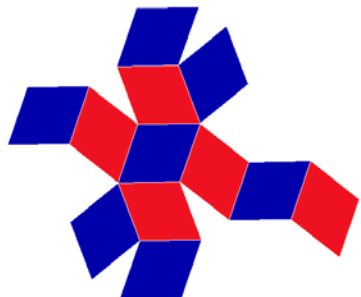
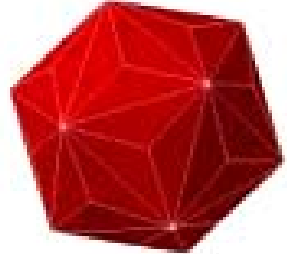
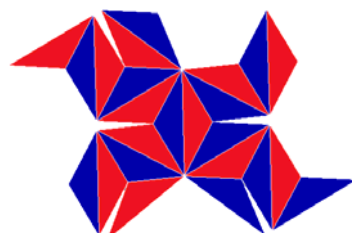
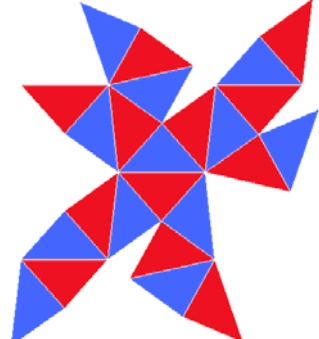
1.7 Sólidos de Catalán

Definición 1.7.1 *Los sólidos de Catalán son una familia de poliedros que se generan con el dual de los sólidos de Arquímedes.*

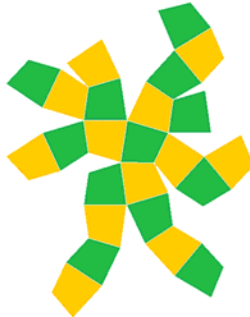
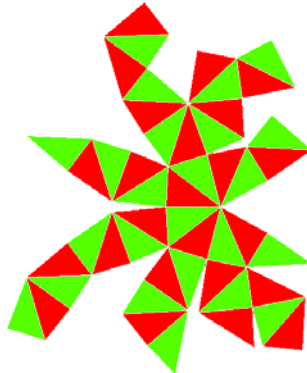
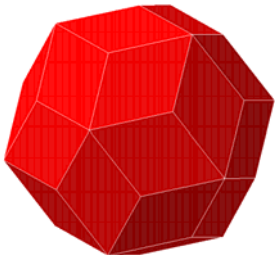
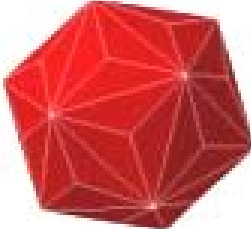
Fueron nombrados así por el matemático belga Eugene Charles Catalán, quien fue el primero en referirse a ellos.

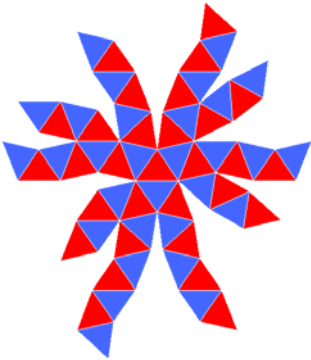
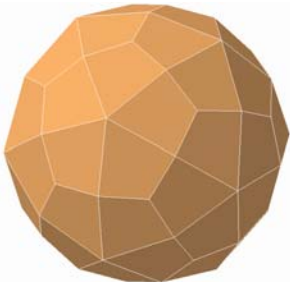
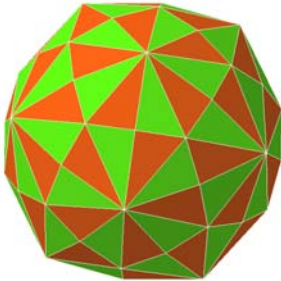
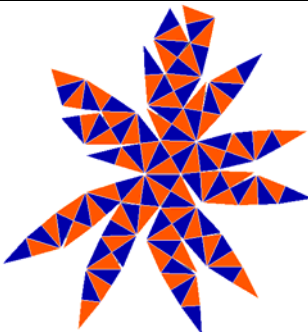
Los sólidos de Catalán son trece en total, así como los sólidos de Arquímedes, y se nombran a continuación:

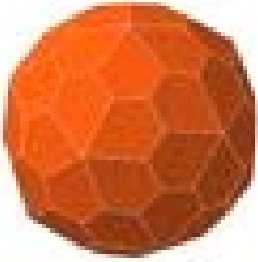
1. Triaquistetraedro o Tetraedro Triakis
2. Rombododecaedro o Dodecaedro Rómbico
3. Triaquisoctaedro u Octaedro Triakis
4. Tetraquishexaedro o Hexaedro Tetrakis
5. Icositetraedro Deltoidal
6. Hexaquisoctaedro o Dodecaedro Disdiakis
7. Triacontaedro Rómbico
8. Triaquisicosaedro o Icosaedro Triakis
9. Pentaquisdodecaedro o Dodecaedro Pentakis
10. Hexecontaedro Deltoidal
11. Hexaquisicosaedro o Triacontaedro Disdiakis
12. Icositetraedro Pentagonal
13. Hexecontaedro Pentagonal

Nombre	Gráfico	Características	Red
Triaquistetraedro Dual: Tetraedro truncado		Caras: Triángulos Isósceles 12 caras 18 aristas 8 vértices	
Rombododecaedro Dual: Cuboctaedro		Caras: Rombos 12 caras 24 aristas 14 vértices	
Triaquisoctaedro Dual: Cubo truncado		Caras: Triángulos Isósceles 24 caras 36 aristas 14 vértices	
Tetraquishexaedro Dual: Octaedro truncado		Caras: Triángulos Isósceles 24 caras 36 aristas 14 vértices	

Observación: Todos estos poliedros y sus respectivas redes, se pueden ver y manejar cargando el programa Poly en el computador, que viene en el cd adjunto, como material de apoyo.

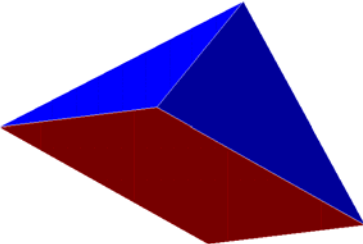
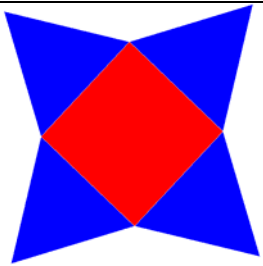
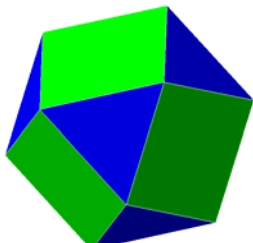
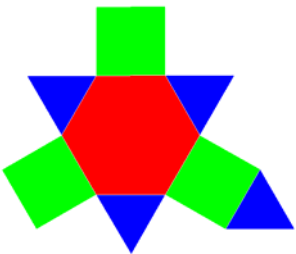
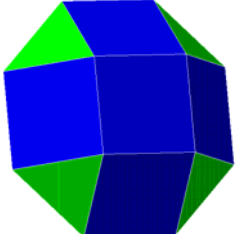
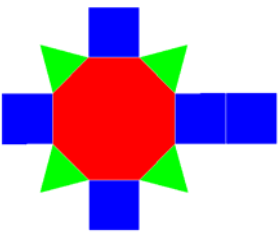
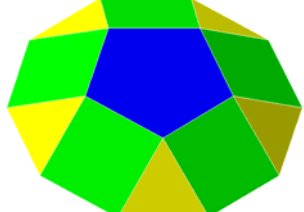
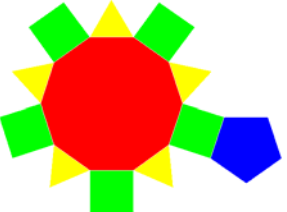
Icositetraedro deltoidal Dual: Rombicuboctaedro		Caras: Deltoides 24 caras 48 aristas 26 vértices	
Hexaquisoctaedro Dual: Cuboctaedro truncado		Caras: Triángulos escalenos 48 caras 72 aristas 26 vértices	
Triacontaedro rómbico Dual: Icosidodecaedro		Caras: Rombos 30 caras 60 aristas 32 vértices	
Triaquisicosaedro Dual: Dodecaedro truncado		Caras: Triángulos Isósceles 60 caras 90 aristas 32 vértices	

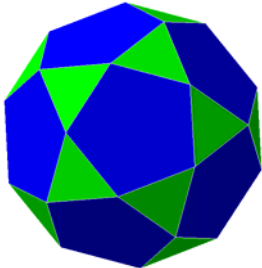
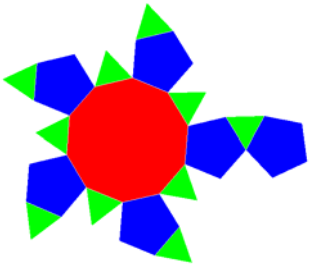
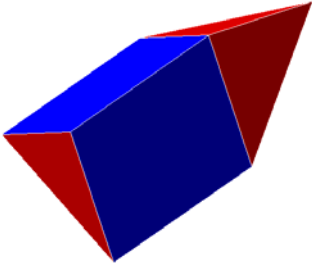
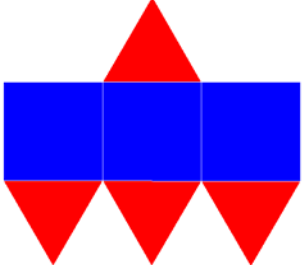
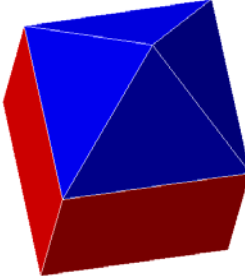
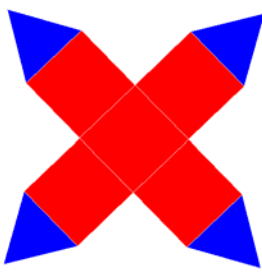
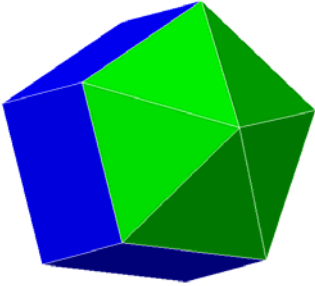
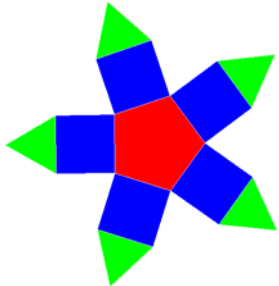
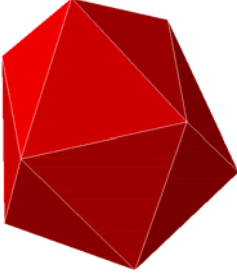
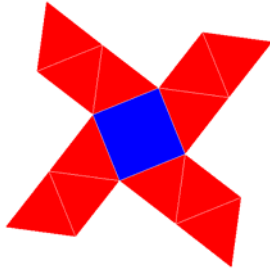
Pentaquis dodecaedro Dual: Icosaedro truncado		Caras: Triángulos isósceles 60 caras 90 aristas 32 vértices	
Hexecontaedro deltoidal Dual: Rombicosidodecaedro		Caras: Deltoides 60 caras 120 aristas 62 vértices	
Hexaquisicosaedro Dual: Icosidodecaedro truncado		Caras: Triángulos Escalenos 120 caras 180 aristas 62 vértices	
Icositetraedro pentagonal Dual: Cubo romo (continúa en siguiente fila)		Caras: Pentágonos Irregulares 24 caras 60 aristas 38 vértices	

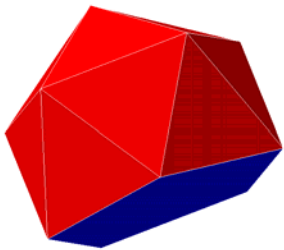
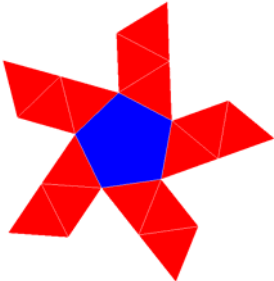
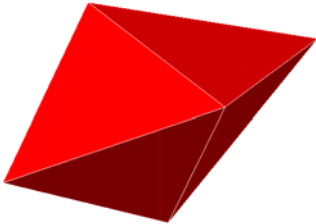
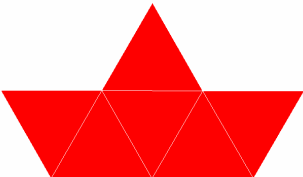
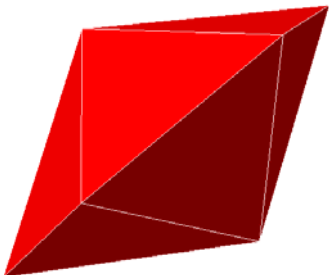
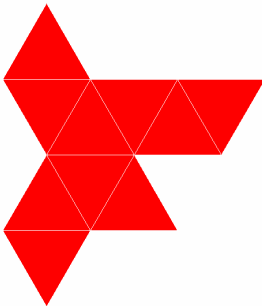
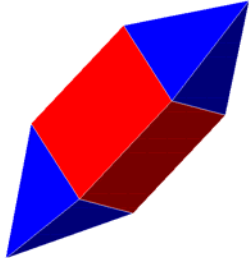
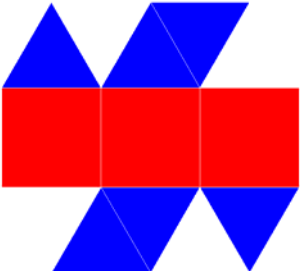
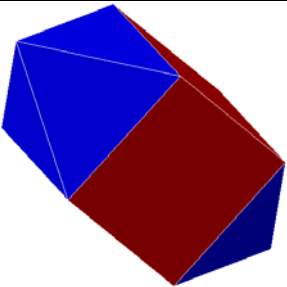
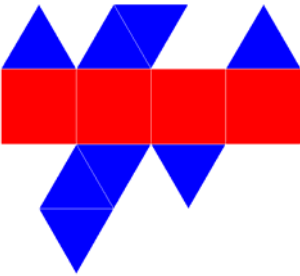
			
Hexecontaedro pentagonal Dual: Icosidodecaedro romo	 	Caras: Pentágonos irregulares 60 caras 150 aristas 92 vértices	 

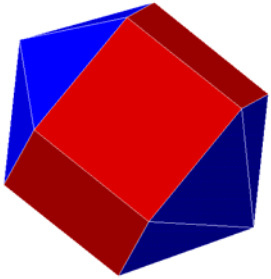
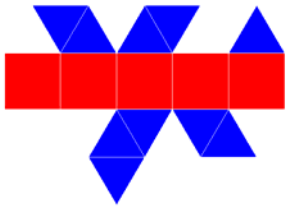
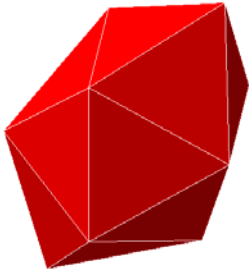
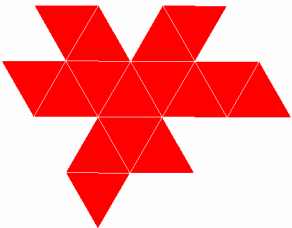
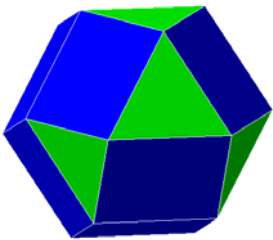
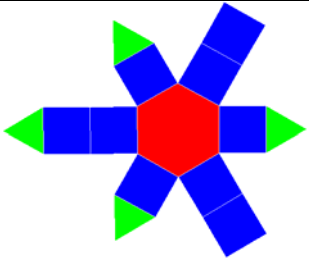
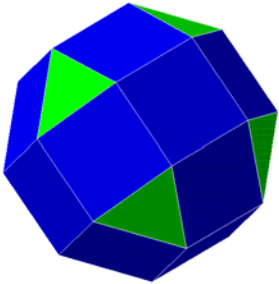
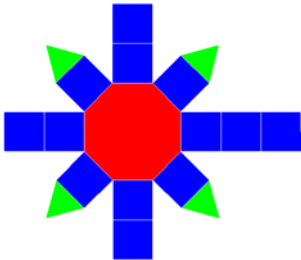
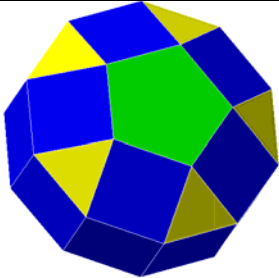
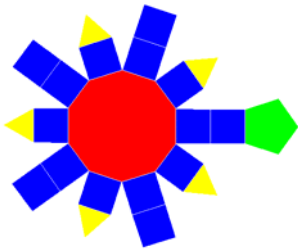
1.8 Sólidos de Johnson

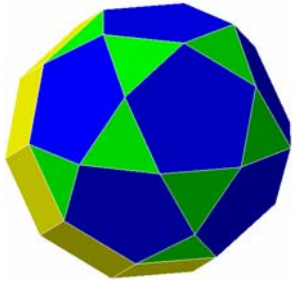
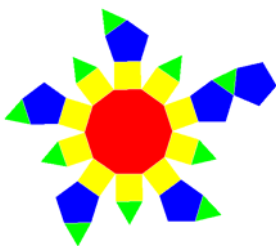
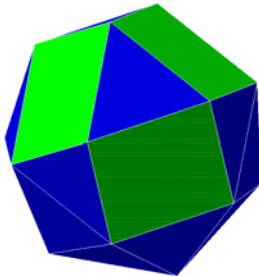
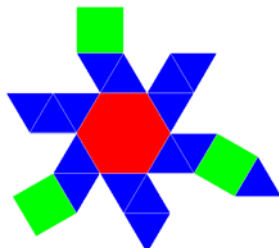
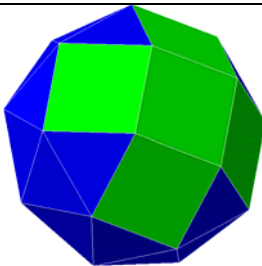
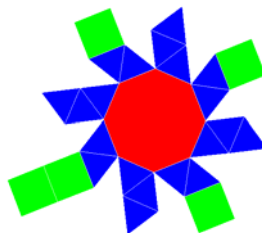
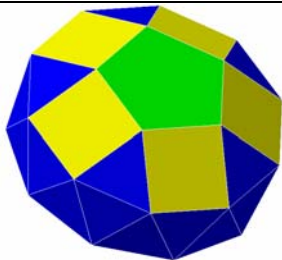
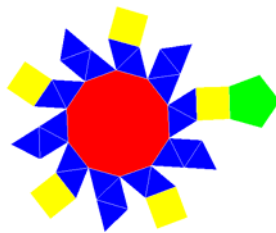
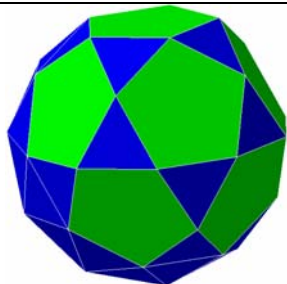
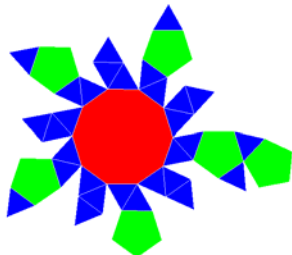
Son noventa y dos, y la mayor parte de estos poliedros son derivados de los Sólidos Platónicos y Arquimedianos, sólo hay que agregar o quitar pedazos. En ocasiones se toman dos polígonos regulares, por ejemplo, podemos tomar dos cuadrados iguales, y se sitúan en forma paralela a una cierta distancia, entonces se gira uno de ellos, y se une cada uno de los vértices superiores con los dos que tiene debajo, finalmente se añade en cada cara cuadrada una pirámide, con lo que se obtiene una Pirámide Cuadrangular Giroelongada.

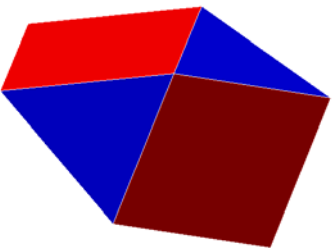
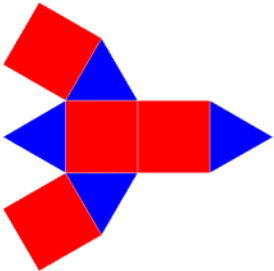
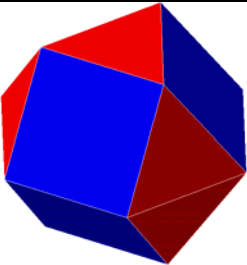
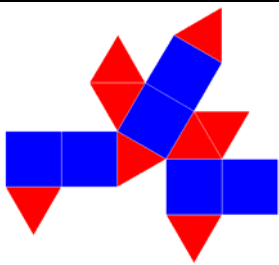
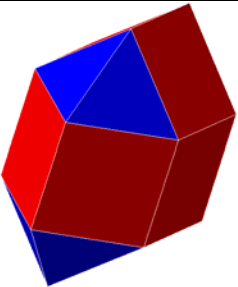
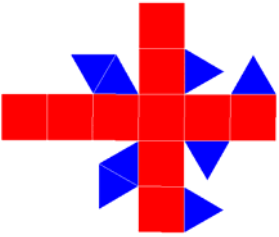
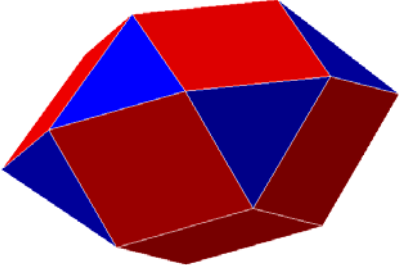
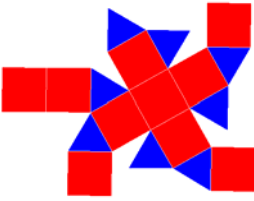
Nombre	Gráfico	Figuras que lo forman	Red
Pirámide Cuadrangular		1 cuadrado 4 triángulos equiláteros	
Cupola Triangular		1 hexágono regular 3 cuadrados 4 triángulos equiláteros	
Cupola Cuadrangular		1 hexágono regular 5 cuadrados 4 triángulos equiláteros	
Cupola Pentagonal		1 octágono regular 1 pentágono regular 5 cuadrados 5 triángulos equiláteros	

Rotunda Pentagonal		1 octágono regular 6 pentágonos regulares 10 triángulos equiláteros	
Pirámide Triangular Elongada		3 cuadrados 4 triángulos equiláteros	
Pirámide Cuadrangular Elongada		5 cuadrados 4 triángulos equiláteros	
Pirámide Pentagonal Elongada		1 pentágono regular 5 cuadrados 5 triángulos equiláteros	
Pirámide Cuadrangular Giroelongada		1 cuadrado 12 triángulos equiláteros	

Pirámide Pentagonal Giroelongada		1 pentágono regular 15 triángulos equiláteros	
Dipirámide Triangular		6 triángulos equiláteros o isósceles	
Dipirámide Pentagonal		10 triángulos equiláteros	
Dipirámide Triangular Elongada		3 cuadrados 6 triángulos equiláteros	
Dipirámide Cuadrangular Elongada		4 cuadrados 8 triángulos equiláteros	

Dipirámide Pentagonal Elongada		5 cuadrados 10 cuadrados	
Dipirámide Cuadrangular Giroelongada		16 triángulos equiláteros	
Cupola Triangular Elongada		1 hexágono regular 9 cuadrados 4 triángulos equiláteros	
Cupola Cuadrangular Elongada		1 hexágono regular 13 cuadrados 4 triángulos equiláteros	
Cupola Pentagonal Elongada		1 decágono regular 16 cuadrados 1 pentágono regular 5 triángulos equiláteros	

Rotunda Pentagonal Elongada		1 decágono regular 10 cuadrados 6 pentágonos regulares 10 triángulos equiláteros	
Cupola Triangular Giroelongada		1 hexágono regular 3 cuadrados 16 triángulos equiláteros	
Cupola Cuadrangular Giroelongada		1 octágono regular 5 cuadrados 20 triángulos equiláteros	
Cupola Pentagonal Giroelongada		1 decágono regular 5 cuadrados 1 pentágono regular 25 triángulos equiláteros	
Rotunda Pentagonal Giroelongada		1 decágono regular 6 pentágonos regulares 30 triángulos equiláteros	

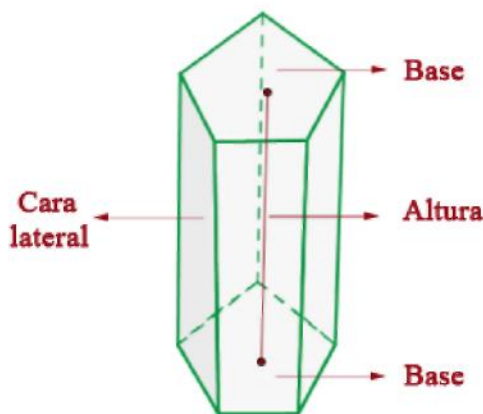
Girobifastigium		4 cuadrados 4 triángulos equiláteros	
Ortobicupola Triangular		6 cuadrados 8 triángulos equiláteros	
Ortobicupola Cuadrangular		10 cuadrados 8 triángulos equiláteros	
Girobicupola Cuadrangular		10 cuadrados 8 triángulos equiláteros	

1.9 Prismas y Antiprismas

Hasta ahora hemos presentado una gran variedad de poliedros, empezando por los Sólidos Platónicos, luego de Arquímedes, para seguir con los Sólidos de Catalán y otros. De cada uno de ellos se expuso sus propiedades y características, sin embargo, aún no hemos mencionado los poliedros llamados Prismas, Antiprismas y las Pirámides.

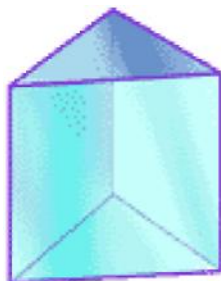
Definición 1.9.1 *Un Prisma es un poliedro formado por dos polígonos congruentes y paralelos que se conectan entre si mediante polígonos que son paralelogramos.*

Las dos caras iguales y paralelas se llaman bases del prisma, en cambio a los paralelogramos los llamamos caras laterales.

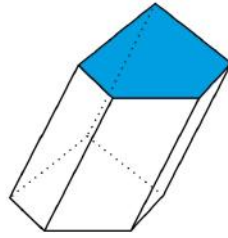


Existen dos clases de prismas:

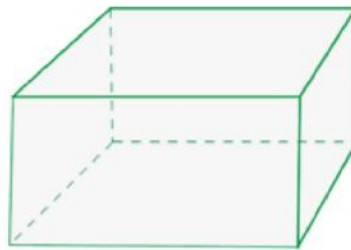
Rectos: Todas sus caras laterales son rectángulos o cuadrados, por lo que sus aristas laterales forman ángulos rectos con las aristas basales.



Oblicuos: Todas sus caras laterales son Rombos o Romboides.

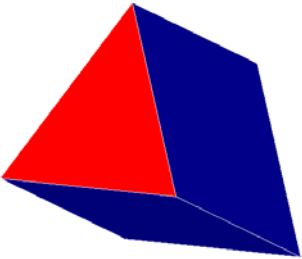
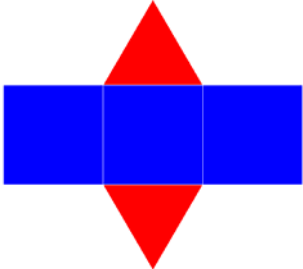
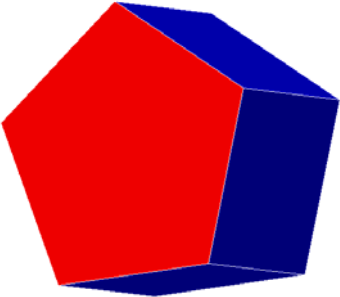
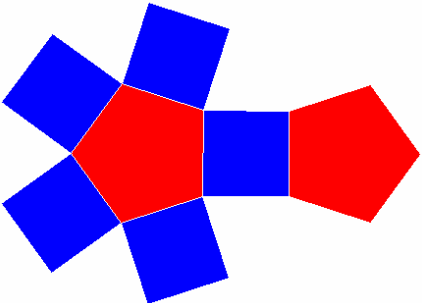
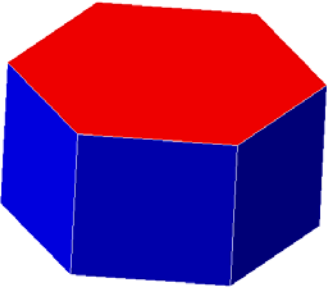
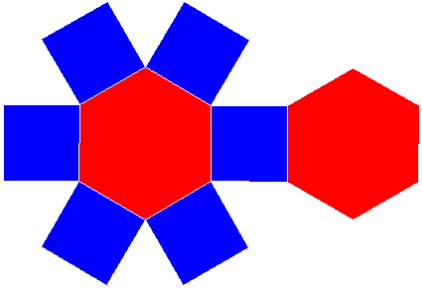


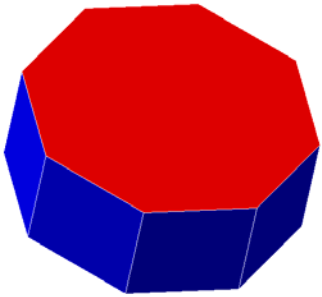
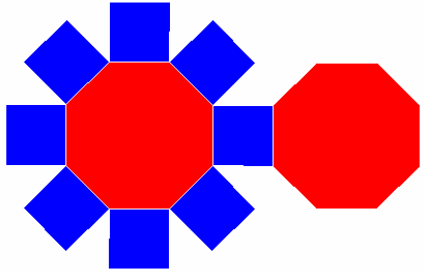
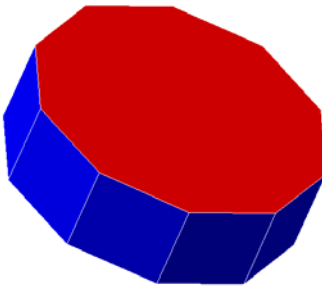
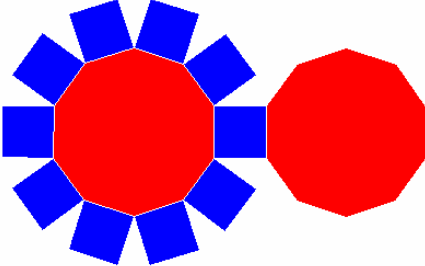
Todos los prismas que no son rectos, son oblicuos, y todos los prismas que no son oblicuos, son rectos. En los prismas rectos las aristas laterales son todas iguales y su longitud es la altura del prisma, mientras que en los prismas oblicuos la altura no coincide con la longitud de las aristas laterales.



Dentro de los prismas rectos encontramos a los paralelepípedos, cuya característica más notable es que tienen forma de caja, es decir, su forma es cuadrada o rectangular, es por esta razón que algunas veces también se refiere a ellos como Ortoedros, ya que los ángulos diedros formados por estos poliedros son rectos. Cabe destacar que existen infinitos prismas en el universo de poliedros.

1.9.1 Algunos Prismas

Nombre	Gráfica	Red
Prisma Triangular		
Prisma Pentagonal		
Prisma Hexagonal		

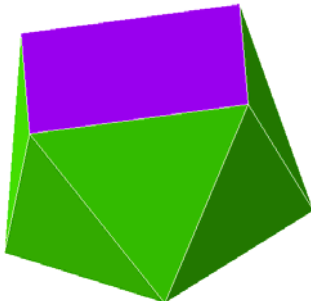
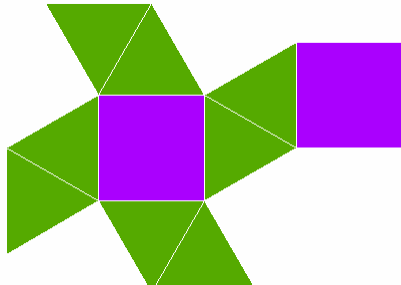
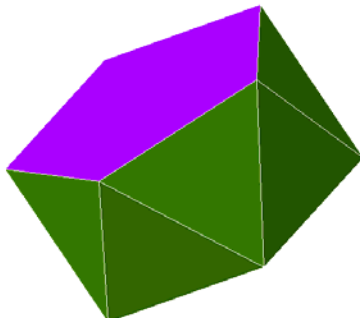
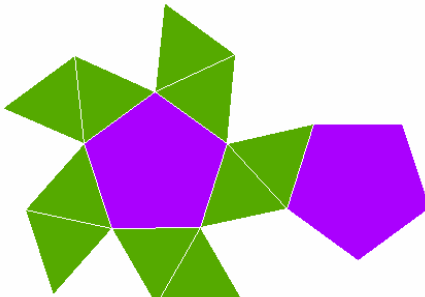
Prisma Octagonal		
Prisma Decagonal		

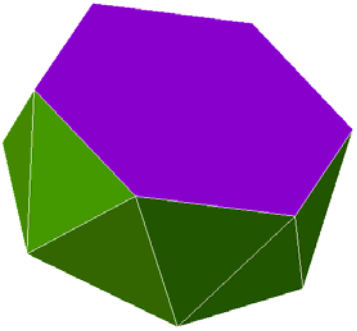
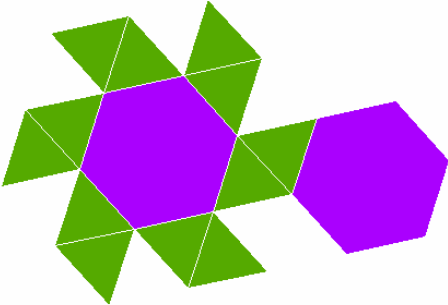
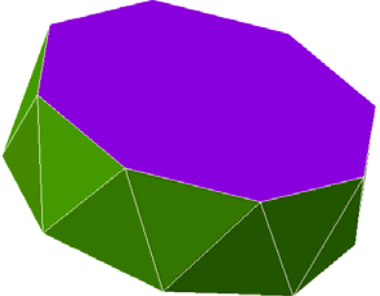
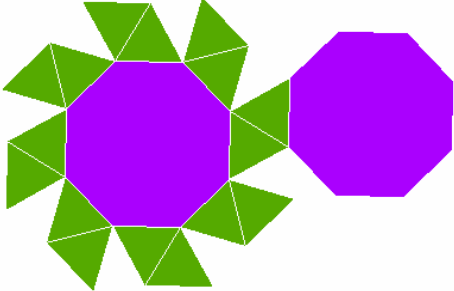
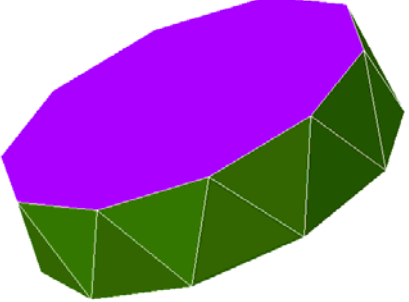
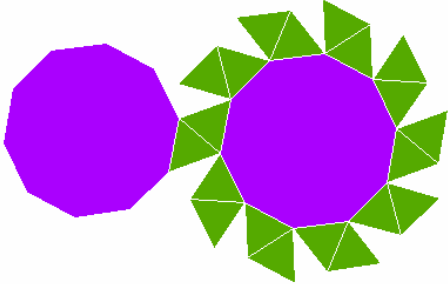
1.9.2 Algunos Antiprismas

Definición 1.9.2 Un antiprisma es un poliedro formado por dos polígonos congruentes y paralelos que a diferencia de un prisma, se conectan mediante triángulos. En el caso de los antiprismas de directrices regulares, las dos caras directrices son polígonos regulares y todos los triángulos circundantes son equiláteros, lo que hace que el cuerpo sea de aristas regulares (todas iguales). En general, las caras paralelas de un antiprisma de directrices regulares están rotadas la una de la otra en un ángulo β .

$$\beta = \frac{360^\circ}{2 \cdot n}$$

donde n es el número de lados del polígono regular

Nombre	Gráfica	Red
Antiprisma Cuadrangular		
Antiprisma Pentagonal		

Antiprisma Hexagonal	 A 3D perspective view of a hexagonal antiprism. It consists of two hexagonal bases, one colored red and the other blue, connected by six triangular side faces.	 A 2D net of a hexagonal antiprism. It shows a central red hexagon surrounded by six green triangles, which are then connected to a separate blue hexagon.
Antiprisma Octagonal	 A 3D perspective view of an octagonal antiprism. It consists of two octagonal bases, one colored red and the other blue, connected by eight triangular side faces.	 A 2D net of an octagonal antiprism. It shows a central red octagon surrounded by eight green triangles, which are then connected to a separate blue octagon.
Antiprisma Decagonal	 A 3D perspective view of a decagonal antiprism. It consists of two decagonal bases, one colored red and the other blue, connected by ten triangular side faces.	 A 2D net of a decagonal antiprism. It shows a central red decagon surrounded by ten green triangles, which are then connected to a separate blue decagon.

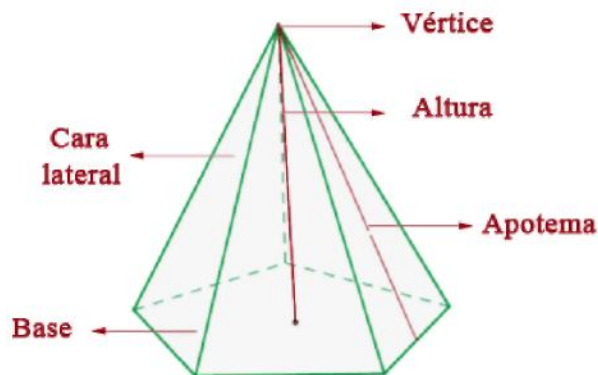
1.10 Pirámides

En el comienzo de este texto vimos cómo las Pirámides están presentes en el mundo desde la antigüedad, es por esta razón que es muy probable que se retenga alguna noción de estos cuerpos. Formalizaremos los conceptos o ideas que podamos tener a cerca de estos objetos.

Definición 1.10.1 *Una pirámide es un poliedro cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos que se intersecan en un punto llamado vértice o cúspide.*

La altura de la pirámide es el segmento perpendicular a la base, que une el vértice con la base. La pirámide será llamada triangular, cuadrada, pentagonal y así sucesivamente, según su base.

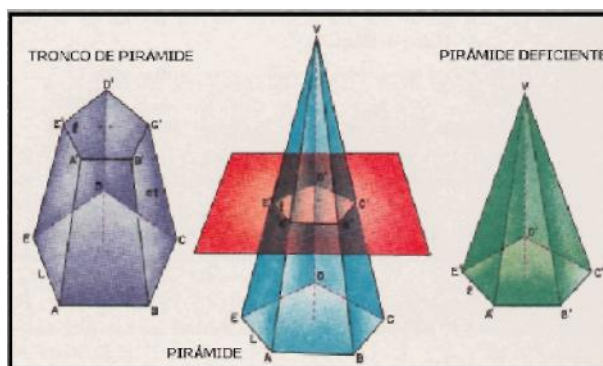
Una pirámide se llama regular si su base es un polígono regular y su vértice se proyecta perpendicularmente, exactamente por sobre el centro de la base, en caso contrario se llama irregular. En una pirámide regular las caras laterales son en su mayoría triángulos isósceles, y la altura de estos triángulos suelen llamarse apotema.



Además existen pirámides rectas, en la que todas sus aristas laterales son iguales, y oblicuas donde no todas sus aristas laterales son iguales.

1.10.1 Tronco de pirámide

Si cortamos una pirámide por un plano paralelo a la base llamaremos Tronco de pirámide a la parte de pirámide comprendida entre la base y el plano de corte. La base pequeña es la formada por la sección de corte. La altura del tronco de pirámide es la distancia entre la base mayor y la base pequeña. La pirámide deficiente es la pirámide determinada por la base pequeña y el vértice de la pirámide.



Si el tronco de pirámide pertenece a una pirámide recta, entonces sus caras laterales siempre serán trapecios, además la altura del tronco es la distancia perpendicular entre las bases.

1.11 Deltaedros

Antes de finalizar el capítulo, cabe mencionar que de todo el conjunto de poliedros vistos, podemos encontrarnos con algunos que todas sus caras triángulos sean triángulos equiláteros, pero que no coincidan necesariamente en cada vértice el mismo número de caras. Cuando nos encontramos en esta situación, estaremos frente a un sólido llamado Deltaedro.

Definición 1.11.1 *Un Deltaedro es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros congruentes.*

Como en el caso de los prismas, existen infinitos Deltaedros, ya que un deltaedro se puede obtener del anterior añadiendo dos triángulos, sin embargo, sólo ocho de ellos son convexos.

De los ocho Deltaedros convexos, tres son Sólidos Platónicos (tetraedro, octaedro, icosaedro) y cinco son Sólidos de Jhonson (Bipirámide Pentagonal, Bipirámide Triangular, Biesfenoide Romo, Prisma Triangular Triaumentado, Bipirámide Cuadrada Giroelongada).

1.12 Proyecciones de Schlegel

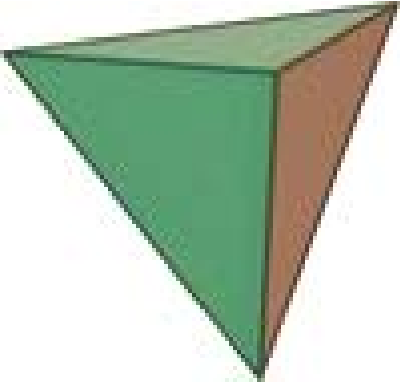
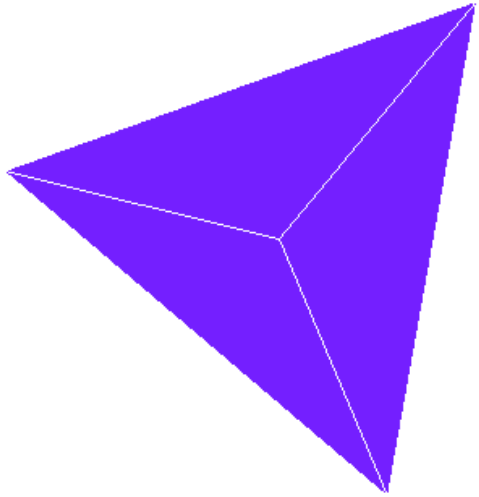
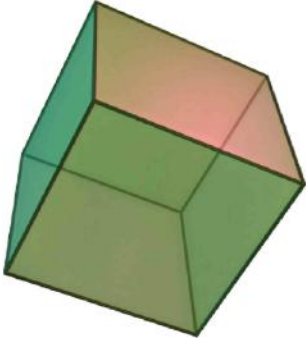
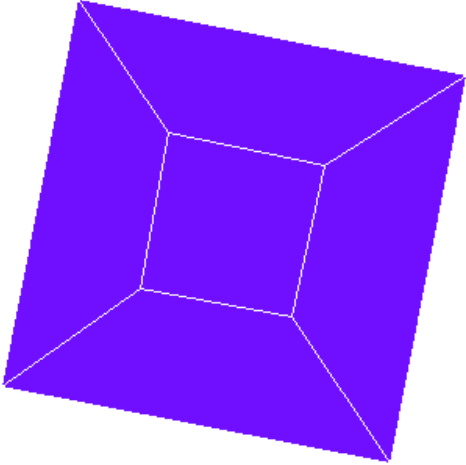
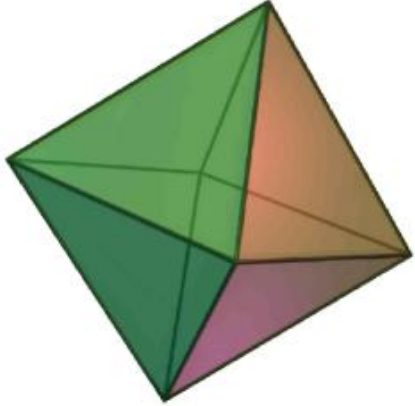
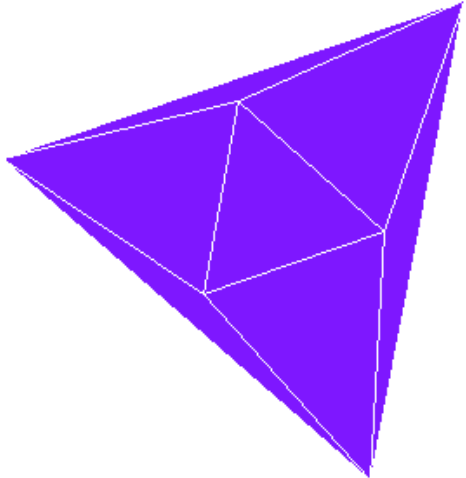
Si imaginamos el esqueleto de un cubo, es decir, si representamos sólo las aristas y vértices de la figura y elegimos una de sus caras (que serían transparentes) y proyectamos los lados del poliedro desde un punto O por encima del centro de esta cara, entonces se obtiene una proyección en el plano, tal proyección se llama **Diagrama de Schlegel**.

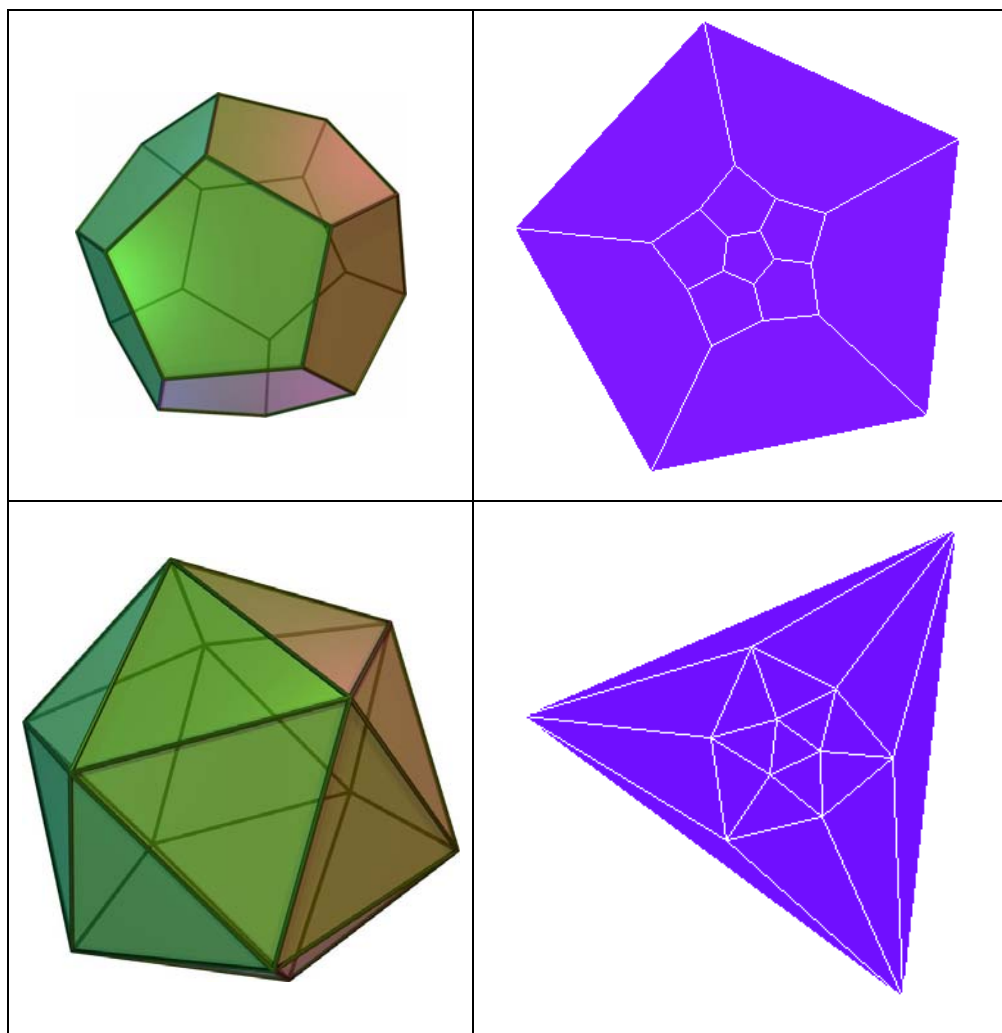
Todos los sólidos vistos en este capítulo tienen un diagrama de Schlegel, sin embargo, sólo los Platónicos tienen un diagrama único de Schlegel, esto ocurre, ya que todas sus caras son congruentes, por lo tanto, no importa qué cara se tome en cuenta para hacer la proyección, esta siempre será la misma. Por el contrario, los Sólidos Arquimedianos tendrán tantos diagramas como polígonos diferentes compongan el poliedro, es decir, si el poliedro esta compuesto por 2 polígonos diferentes, entonces este tendrá dos diagramas de Schlegel distintos y si esta compuesto por 3 polígonos, entonces tendrá tres diagramas de Schlegel.

Estas proyecciones resultantes permiten otra forma de estudiar propiedades y relaciones que existen entre estos objetos matemáticos que estudiaremos más adelante. A continuación, mostraremos los diagramas de Schlegel de los sólidos platónicos y algunos arquimedianos con dos y tres diagramas distintos.⁹

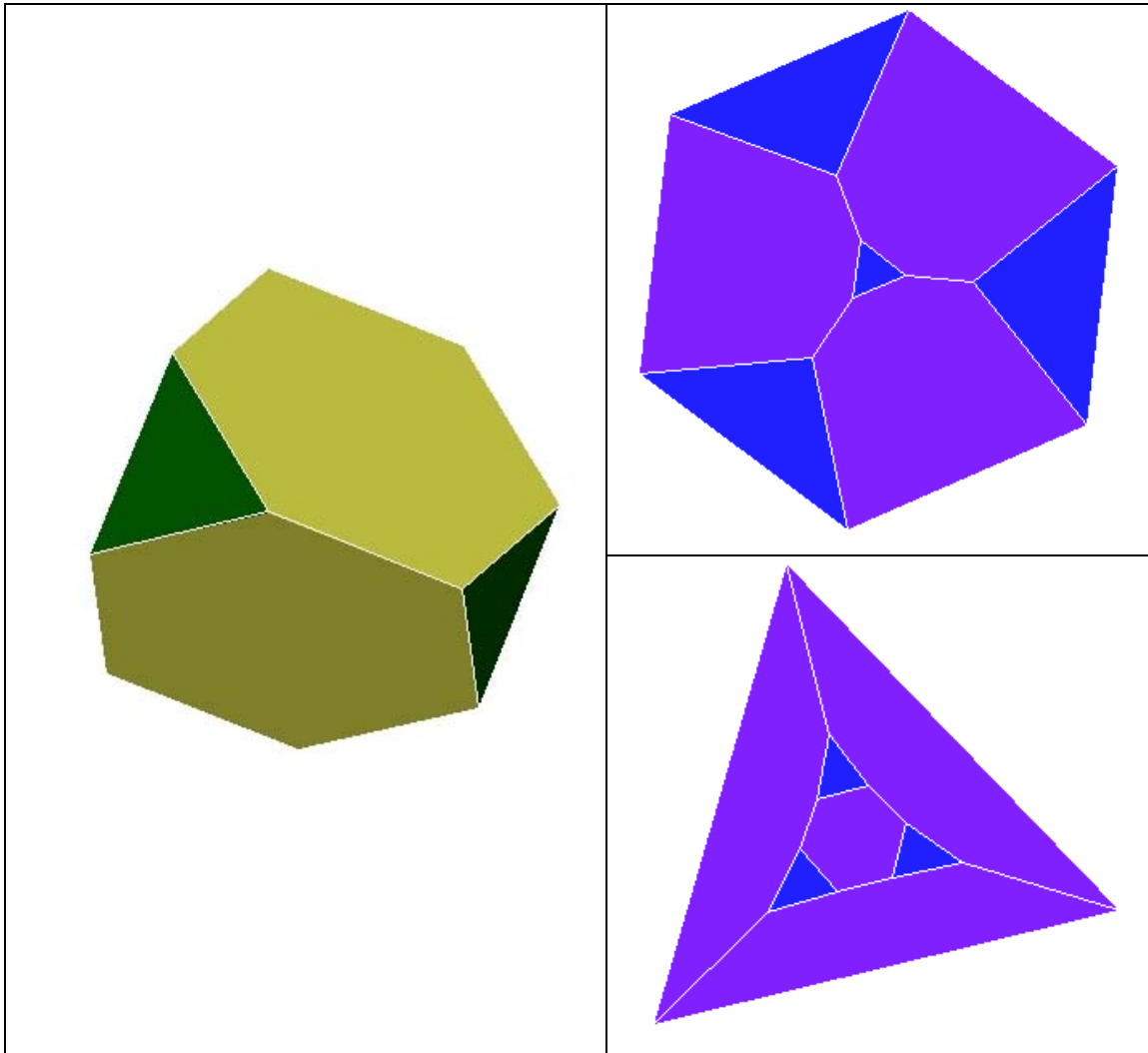
⁹ Puedes cargar el programa Poly en tu computador y así obtener mas diagramas.

Diagramas de los sólidos platónicos

Sólido	Proyección al plano
	
	
	

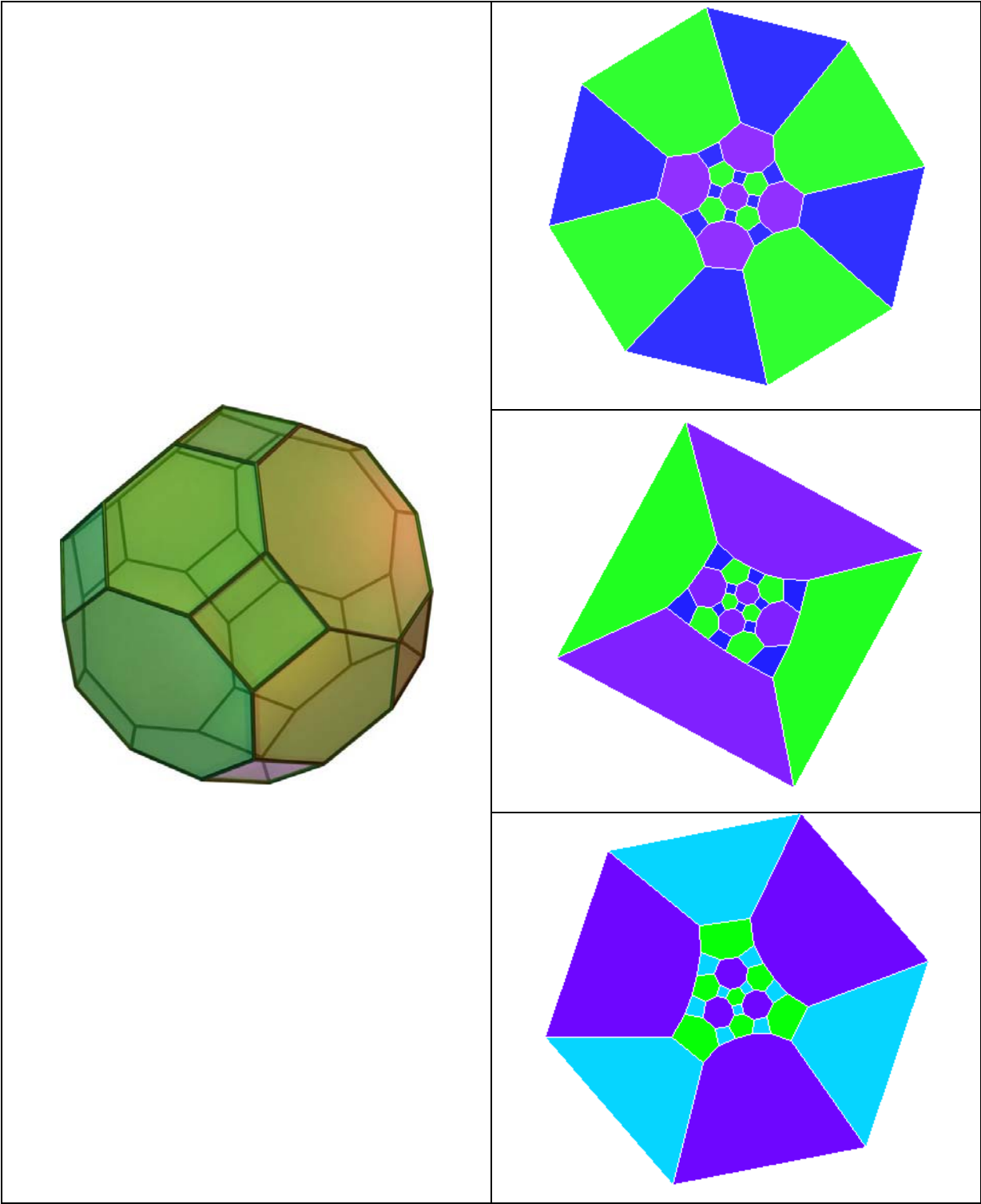


Sólidos Arquimedianos: Tetraedro Truncado, 2 proyecciones.



Observación: El hecho de que este sólido tenga dos proyecciones al plano que son diferentes, se debe precisamente al número de caras distintas que posee, así, si un poliedro tiene n cantidad de caras distintas, entonces tendrá n proyecciones al plano distintas.

Sólidos Arquimedianos: Cuboctaedro Rombitruncado, 3 proyecciones.



Capítulo 2

2.0 Visión Algebraica de los Poliedros

2.1 Introducción

Este capítulo surge como una necesidad de mostrar al lector cómo los poliedros, que habitualmente se consideran un objeto exclusivamente geométrico, se pueden relacionar con otras ramas de la matemática, de nivel superior, como lo es la topología.

2.2 Fórmula de Euler y su relación con los Poliedros

Leonhard Euler fue un matemático suizo nacido el 15 de abril de 1707. Siendo joven, ingresó a la Universidad de Basilea para prepararse como ministro, pero la geometría pronto se convirtió en su tema predilecto y por intercesión de Jean Bernoulli, Euler obtuvo el consentimiento de su padre en cambiarse de ministro a matemático, donde por su increíble talento e inspirado por un maestro, maduró rápidamente y a los 17 años de edad se graduó de Doctor.



Euler es uno de los matemáticos más grandes de la historia, algo así como el Beethoven de las matemáticas. Sus trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Sin embargo, Euler descubrió una relación muy sencilla entre el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo, que se ha convertido en un muy importante teorema en el nuevo desarrollo de la matemática, conocido como la teoría de grafos, tema que abordaremos más adelante.

2.3 Relación de Euler con los poliedros convexos

En 1750 en una carta a su colega Christian Goldbach, Euler comentó que estaba empezando a estudiar los poliedros y sus propiedades, escribió:

“... reciente se me ha ocurrido determinar propiedades generales para los sólidos limitados por superficies planas, porque no hay duda de que se podrían encontrar teoremas generales sobre ellos. Así como para figuras planas rectilíneas hay propiedades como las siguientes:

1. En cada figura plana, el número de lados es igual al número de ángulos, y
2. La suma de todos los ángulos interiores es igual a dos rectos por el número de lados menos dos.

Así como para figuras planas sólo es necesario considerar lados y ángulos, para el caso de los sólidos deberán ser tenidos en cuenta más elementos”¹

En esta carta, Euler consideraba la posibilidad de tener en cuenta las caras del poliedro, sus ángulos sólidos, los ángulos planos, los vértices y lados de cada cara, como también las aristas del poliedro. Así, Euler planteó:

“.. .en cada cara, el número de lados es igual al número de ángulos planos. Dos caras se encuentran en un lado, entonces la cantidad de lados total de todas las caras es el doble de la cantidad de aristas del poliedro. Por lo tanto, la cantidad total de lados de todas las caras es siempre un número par. Cada cara tiene por lo menos tres lados, entonces la cantidad total de lados de todas las caras es mayor o igual que tres veces el número de caras”²

¹ Citado por Cronwell, Meter, Polyhedra, Cambridge University Press, Cambridge, 1997 pp. 189, extraído de Biggs, N. L. E. K. Lloyd y R.J. Wilson, Graph theory 1736 - 1936 Clarendon press, Oxford, 1976.

² Citado por Cronwell, Peter, Polyhedra, Cambridge University Press, Cambridge, 1997 pp. 190, extraído de Biggs, N .L .E. K. Lloyd y R. J. Wilson, Graph theory 1736-1936 Clarendon press, Oxford, 1976.

Desde donde llegó a la siguiente propiedad:

“La cantidad de ángulos sólidos mas la cantidad de caras es igual a la cantidad de aristas mas dos”³

Esta relación fue completamente original en el momento en que se escribió esta carta, y hoy es conocida como Fórmula de Euler.

Normalmente, en vez de hablar de ángulos sólidos, se hace referencia al número de vértices del poliedro. En consecuencia el enunciado de la fórmula es:

Teorema 2.3.1 (Teorema de Euler) *Sea P un poliedro convexo, con C caras, V vértices y A aristas. Entonces se satisface $C - A + V = 2$*

Esta fórmula, Poincare la reconoció como uno de los teoremas centrales de la topología y permite demostrar que existen sólo cinco poliedros regulares.

Observación:

Este teorema puede ser generalizado a poliedros no convexos, es decir, a poliedros conexos (con agujeros), el cual quedaría enunciado de la siguiente manera: $V - A + C = 2 - 2g$, donde g denota el número de agujeros del poliedro. Descubierta en 1813 por Antoine-Jean Lhuillier (1750-1840), es el primer invariante topológico que se conoce.

³ Citado por Cronwell, Peter, Polyhedra, Cambridge University Press, Cambridge, 1997pp. 190, extraído de Federico, P. J. Descartes on Polyhedra: a Study of the Solidurum Elementis, Springer Verlag, 1982.

2.3.1 Una consecuencia importante del Teorema de Euler

Como da a entender el título, el Teorema de Euler viene acompañado de significativas consecuencias, como por ejemplo que no puede existir un poliedro convexo con menos de seis aristas, cuatro caras y cuatro vértices, sin embargo, una de las más importantes que se puede utilizar, es para demostrar la existencia de sólo cinco poliedros regulares, llamados Platónicos. A continuación, presentaremos la demostración ocupando este importante teorema.

Si recordamos una de las frases escritas anteriormente, se menciona que “la cantidad de lados total de todas las caras es el doble de la cantidad de aristas del poliedro”, si consideramos esto, además de pensar en los elementos de un poliedro regular cualquiera, de la siguiente manera, donde “a” representará el número de aristas del poliedro.

Llamaremos a los elementos de un poliedro regular de la siguiente manera:

- n: número de lados de cada cara.
- m: número de aristas concurrentes en un mismo vértice.

Entonces, se verifican las siguientes igualdades:

$$(1) \quad n \cdot c = 2 \cdot a$$

$$(2) \quad m \cdot v = 2 \cdot a$$

i) Despejando a en (1), se obtiene:

$$a = \frac{n \cdot c}{2}$$

ii) Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$m \cdot v = n \cdot c$$

iii) Despejando v , se obtiene:

$$v = \frac{n \cdot c}{m}$$

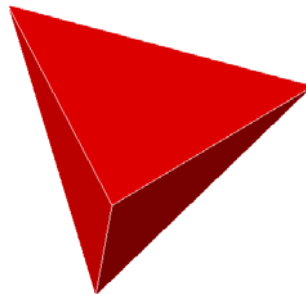
iv) Sustituyendo en la fórmula de Euler, y despejando c se obtiene:

$$\begin{aligned} c + \frac{n \cdot c}{m} &= \frac{n \cdot c}{2} + 2 \\ \Rightarrow 2 \cdot m \cdot c + 2 \cdot n \cdot c &= m \cdot n \cdot c + 4 \cdot m \cdot c \\ \Rightarrow c &= \frac{4 \cdot m}{2 \cdot (m + n) - m \cdot n} \end{aligned}$$

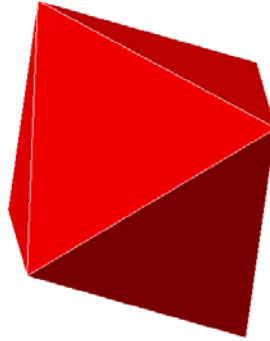
Como el mínimo número de lados de un polígono es tres y el mínimo número de aristas que concurren en un vértice de un poliedro es tres, se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1 Si tomamos $n = 3$, entonces:

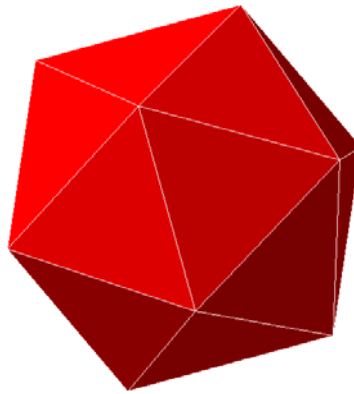
1. $m = 3$, entonces $c = 4$ y obtenemos el Tetraedro regular.



3. Si $m = 5$, entonces $c = 20$ y obtenemos el Icosaedro regular.



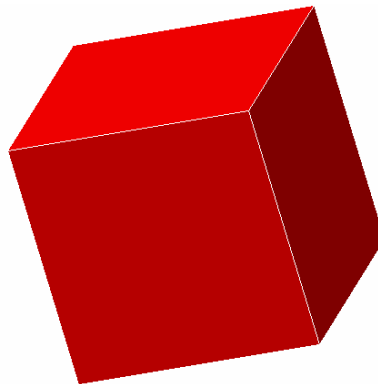
2. Si $m = 4$, entonces $c = 8$ y obtenemos el Octaedro regular.



4. Si $m = 6$, entonces $c = \frac{24}{0}$ y no se obtiene ningún poliedro.

Caso 2 Si tomamos $n = 4$, entonces:

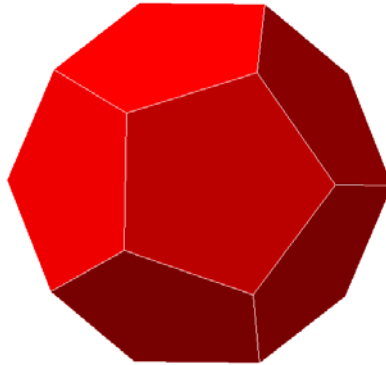
1. Si $m = 3$, entonces $c = 6$ y obtenemos el hexaedro regular o cubo



2. Si $m = 4$, entonces $c = \frac{16}{0}$ y no se obtiene ningún poliedro.

Caso 3 Si consideramos $n = 5$, entonces:

1. Si $m = 3$, entonces $c = 12$ y obtenemos el dodecaedro regular.



2. Si $m = 4$, entonces $c = -8$ y no se obtiene ningún poliedro.

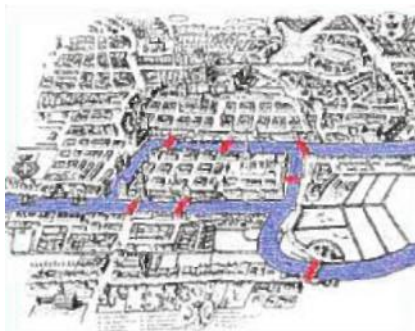
2.4 Euler, Poliedros y Topología

Cuando Euler publica su teorema a mediados del siglo XVIII, él pensaba que este era aplicable sólo a poliedros, sin embargo, matemáticos posteriores dedicados a la investigación comprobaron que la fórmula satisface con propiedades topológicas importantes.

2.4.1 Fórmula de Euler y Topología

Anteriormente conocimos la fórmula de Euler para poliedros convexos, que relaciona caras, vértices y aristas, y que esta dada por $V + C - A = 2$. Esta fórmula la descubrió por observación directa.

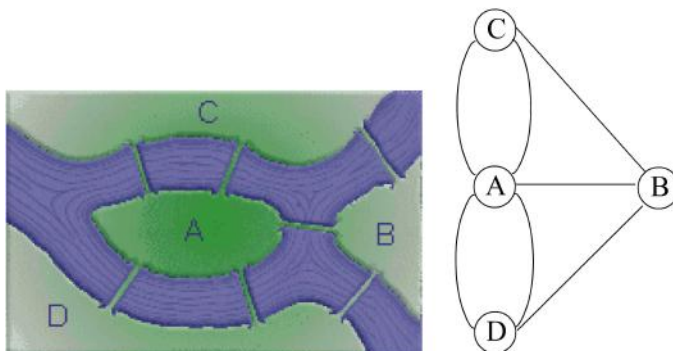
Euler ayudó a fundar, en el siglo XVIII, la rama de las matemáticas, conocida como Topología, cuando en la ciudad alemana de Königsberg (en la época soviética de Kaliningrado) siete puentes atravesaban el río Pregel en su curso sinuoso por la ciudad, tal como se muestra en la figura.



En ese entonces surgió la pregunta, ¿Cómo una persona podía viajar por toda la ciudad, atravesando una y sólo una vez cada uno de los puentes? Fue Euler quien contestó esta pregunta muy célebre de la época, sentando las bases de lo que hoy conocemos como teoría de grafos. Euler demostró que es imposible atravesar los siete puentes de Königsberg pasando exactamente una vez por cada uno de ellos.

Euler realizó un análisis riguroso del problema y abstrajo los detalles de la forma de la ciudad con sus puentes, para quedarse con la conectividad, así fue que representando mediante puntos las cuatro porciones de terreno y dibujando un arco entre cada dos puntos en representación de cada puente, dio lugar a uno de los

primeros grafos. En consecuencia, la trayectoria de los puentes de Königsberg puede ser reformulada como un Grafo.



El interés de este ejemplo es que además de dar lugar a una teoría matemática muy potente, los Grafos se dibujan y resultan muy intuitivos, especialmente cuando los vértices son pocos. Ejemplos de grafos que todos conocemos son los organigramas, que explicitan la estructura formal de un programa de estudio, los árboles genealógicos o la circuitería de los chips electrónicos, también lo es la red del Metro de Santiago. Asimismo, podemos mencionar que esta herramienta matemática se usa regularmente para resolver problemas en la eficiencia del transporte, electrónica, electricidad y en general en aquellos campos en los que la conectividad es importante.

Sin embargo, es curioso darse cuenta que, aunque Euler halla entregado a las futuras generaciones de matemáticos los cimientos de lo que hoy se conoce como teoría de grafos, no se percatara de la relación que existía entre esta y su fórmula para poliedros, pues existe una relación entre Grafos y poliedros, que permite estudiar desde otro punto de vista estos cuerpos geométricos.

Ahora, antes de explicar la relación existente entre Grafos y Poliedros, y con el objetivo de preparar al lector, es que a continuación expondremos de manera formal, pero reducida lo que es un Grafo, pues este es un tema del cual fácilmente podríamos explayarnos en el resto de este libro y claramente ése no es el propósito, si no, relacionarlo con la fórmula de Euler para poliedros simplemente conexos.

2.4.2 Teoría de grafos

Un Grafo es una transformación matemática que permite expresar de forma visual, muy sencilla y efectiva, relaciones que se dan entre elementos reales de diferente naturaleza. De una manera informal, podemos decir que un grafo es un conjunto de vértices con enlaces entre ellos, denominados aristas. Sin embargo, como cualquier texto matemático, necesitamos formalidad en los conceptos importantes, es por eso que a continuación se definirá en forma rigurosa lo que es un grafo.

Definición 2.4.2.1 *Un Grafo $G = \{V, E\}$ consiste en un conjunto no vacío de objetos $V = \{V_1, V_2, \dots\}$ llamados vértices y otro conjunto $E = \{E_1, E_2, \dots\}$ denominados aristas, de modo que cada arista E_k esta asociada a un par no ordenado (V_i, V_j) de vértices, con $i, j = 1, 2, 3, \dots$*

Observaciones:

- Los vértices V_i, V_j asociados con la arista E_k son llamados vértices terminales de E_k .
- Sinónimos de vértice es nodo o punto y de arista es arco, rama o línea.
- Usualmente un grafo se representa por un diagrama en el cual los vértices se representan por puntos y las aristas por líneas que los unen, indicando que vértices están relacionados entre si.
- Un vértice puede tener cero o más aristas, pero toda arista debe unir exactamente dos vértices.
- Se llaman auto-loop a las aristas que están asociadas a un mismo vértice, y aristas paralelas a aquellas que están asociadas a un mismo par de vértices.

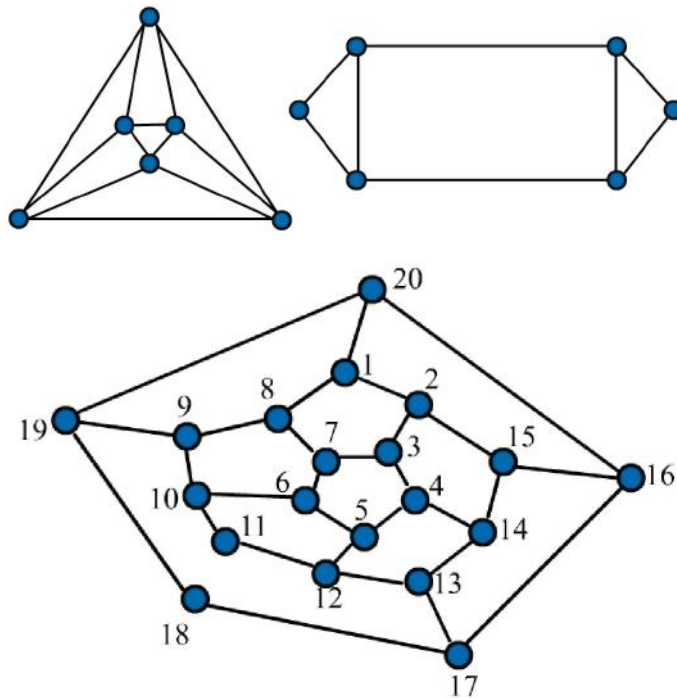
Ahora presentaremos algunas definiciones que se necesitaran para entender de manera óptima la relación existente entre grafos y poliedros.

Definición 2.4.2.2 *Un Grafo que no tiene auto-loop, y tampoco aristas paralelas se llama Grafo Simple.*

Definición 2.4.2.3 *El grado de un vértice V_i es la cantidad de aristas concurrentes sobre él.*

Se llama orden de un grafo al número de vértices que lo componen, si V es finito se dice que el grafo es finito.

A continuación, algunos ejemplos de grafos planos simples.



2.4.3 Grafos Eulerianos

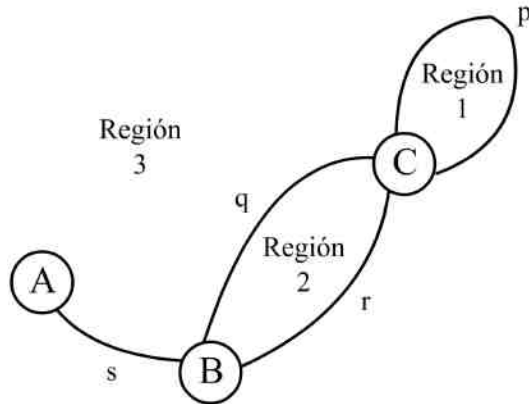
Cuando en 1736 Euler encontró la solución al problema de los puentes de Königsberg, él se planteó la siguiente pregunta “¿En qué tipo de grafos G , es posible encontrar un paseo cerrado que pase a través de cada arista de G exactamente una vez?”. En la actualidad a los paseos que cumplen con esa condición se les llama línea Euler, y un grafo que posea tal línea se le denomina Grafo Euleriano. Por lo tanto un Grafo Euleriano siempre será conexo ya que tiene una línea Euler, por lo que contiene todas las aristas del Grafo.

Definición 2.4.3.1 *Un Grafo G conexo es un Grafo Euleriano, sí y sólo sí, todos los vértices de G son de grado par.*

Es evidente ahora comprender por qué el problema de los puentes de Königsberg tiene una solución negativa, ya que nos encontramos con un Grafo en donde no todos sus vértices son de grado par. Por lo tanto, no es un Grafo Euleriano, en consecuencia no es posible pasear sobre cada uno de los puentes exactamente una vez y volver al punto inicial.

2.4.4 Relación entre la fórmula de Euler y grafos Planos

Euler pensó su relación como una propiedad exclusiva de los poliedros, pero matemáticos posteriores comprobaron que realmente, es una propiedad de grafos en una superficie esférica o en un plano.



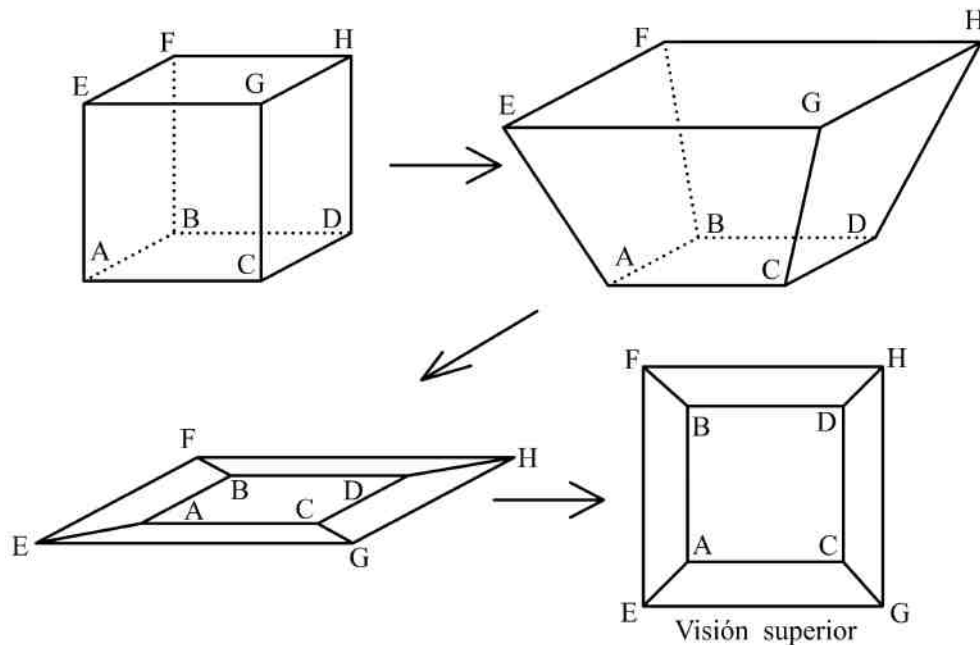
Observando la red de la figura, notamos que tiene:

1. Tres nodos A, B, C.
2. Cuatro arcos p, q, r, s.
3. Divide el plano en tres regiones 1, 2 y 3. (1 y 2 regiones internas y 3 región externa)

Si ponemos atención, estas cantidades satisfacen la relación $N - A + R = 2$, donde N es el número de nodos, A el número de arcos y R el número de regiones en las que se divide el plano, por lo tanto, aquí queda explícito el parecido que existe entre un grafo plano y los poliedros convexos.

2.4.5 Los Grafos y su relación con los Poliedros

Piense en un cubo hecho de material elástico, que pueda ser estirado y aplastado como se indica en la figura, formando ahora una red en el plano, es decir, un grafo. Cada vértice del cubo original es ahora un nodo del grafo y cada arista, un arco.



Cada cara es ahora una región del plano, salvo la cara $HGFE$ que se reemplaza por la región del plano exterior del grafo.

Este tipo de transformación puede efectuarse con cualquier tipo de poliedro y tendríamos los mismos resultados, aunque para poliedros con agujeros (cóncavos) habría una mayor dificultad.

Ahora bien, en la figura plana se observa que la relación que se cumple es: $C+V = A+1$, es decir, $8+5=12+1$, y esta no es la relación propuesta por Euler. Pero como habíamos suprimido una cara, si la agregamos, la igualdad se convierte en la relación hecha por Euler. Por lo que establecemos otra relación entre Euler, Poliedros y Grafos.

2.4.6 Demostración de la fórmula de Euler mediante Grafos

Esta demostración radica en probar que en cualquier figura plana, que sea igual a la unión de polígonos, con algunas aristas comunes, se cumple la relación:

$$V + C = A + 1$$

Demostración

La demostración se hará por inducción sobre C , es decir, sobre el número de caras o polígonos unidos.

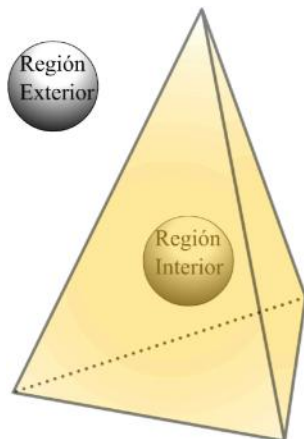
Para $C = 1$, es decir, cuando es un sólo polígono, se cumple que el número de vértices es igual al número de aristas, por lo tanto, es obvio que se tiene la igualdad, que sería, $V + 1 = A + 1$.

Ahora, supongamos que la relación se cumple para cualquier figura que sea la unión de C polígonos, con un total de V vértices y A aristas, de modo que $V + C = A + 1$, (Hipótesis de inducción). Luego, consideremos que tenemos una figura que tiene $C = C + 1$ aristas con V vértices y A aristas. Lo que queremos probar es que $V + C = A + 1$. Si tomamos ahora una cara exterior, que tiene K vértices y K aristas, al retirarla, sin suprimir los dos vértices que tiene en común con el resto de la figura, ni la arista que los une, quedaría una figura con $V - (K - 2)$ vértices, con $C = C - 1$ caras y con $A - 1$ aristas.

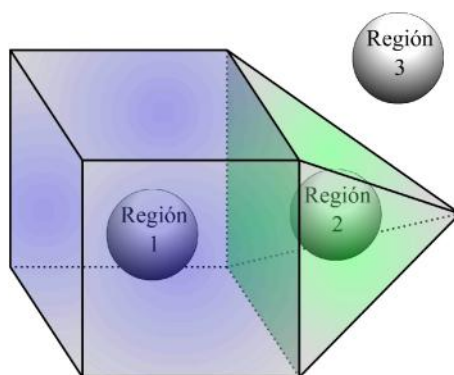
Como es una figura plana de C caras, se le puede aplicar la hipótesis de inducción y, por consiguiente, se tiene la igualdad, $(V - (K - 2)) + C = (A - (K - 1)) + 1$, la cual es obviamente equivalente a $V + C' = A + 1$, que es la relación que se quería probar.

2.4.7 Otra generalización de la fórmula de Euler

Se puede generalizar la fórmula de Euler aún más, pensando en cómo se puede dividir el espacio tridimensional en regiones. Pensemos en el tetraedro, que es el poliedro más simple, este divide al espacio en dos regiones, dentro y fuera, y se verifica: $V - A + C - R = 4 - 6 + 4 - 2 = 0$, donde R es el número de regiones.



Piensa ahora en un cubo con una pirámide pegada a una cara. Este conjunto divide al espacio en tres zonas o regiones. Hay 9 vértices, 16 aristas y 10 caras, y otra vez $V - A + C - R = 0$.



Lo que sugiere una nueva relación que surge de la relación de Euler. (Como actividad se podría pedir que lo comprueben con otras figuras).

Capítulo 3

3.0 Poliedros en la Ciencia, Tecnología y el Arte

3.1 Introducción

En este capítulo, presentaremos algunas de las relaciones existentes entre los poliedros y otras disciplinas científicas, como lo es la biología y la química, también, lo enlazaremos con una de las manifestaciones más hermosas de la actividad humana, y con esto nos referimos al Arte.

Es la propia naturaleza la que nos muestra que estas figuras geométricas se encuentran alrededor de nosotros, en nuestra vida cotidiana y que el estudio matemático de estos cuerpos no es tan sólo un ejercicio mental, si no, que tiene una completa relación con la estructura más íntima de la naturaleza, ejemplo de esto lo podemos encontrar en la estructura hexagonal de los paneles de abejas o la estructura poligonal que conforma la superficie de las alas y ojos de algunos insectos. También, los granos de polen y las semillas de algunas plantas tienen formas poliedrales basadas fundamentalmente en pentágonos y hexágonos.

Lo anteriormente señalado nos permite estudiar los contenidos tratados en este texto en otros campos disciplinarios, ya que esta es una manera práctica de entender la utilidad que tienen estos cuerpos en nuestro diario vivir.

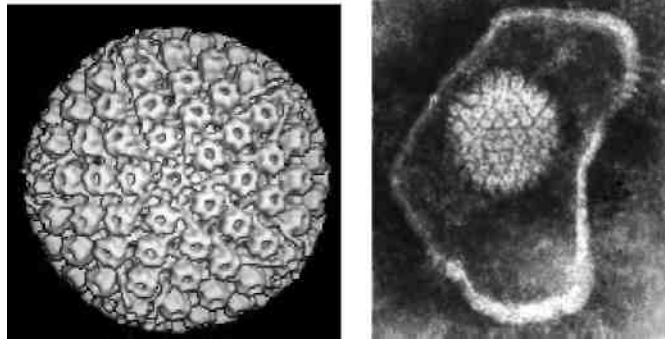
3.2 Los poliedros en la Biología

Cuando alguien hace referencia a un objeto matemático cualquiera, es común que los estudiantes no imaginen en qué es aplicable o simplemente lo relacionan como algo netamente abstracto, sin embargo, dentro de la investigación no matemática encontramos una conexión de los poliedros en el campo de la virología. Esta línea de investigación es muy importante en la actualidad, y existen numerosos grupos de investigación alrededor del mundo.

El estudio de los virus por la ciencia es relativamente joven, los avances comenzaron en la década de los cincuenta, en paralelo con los de la biogenética y biología molecular. Hoy en día, la clasificación de los virus se hace atendiendo esencialmente a estos dos aspectos, la naturaleza de su material genético, además de la simetría y composición.

Los virus son microorganismos formados por asociaciones organizadas de macromoléculas, sólo visibles con microscopio electrónico debido a su pequeño tamaño que fluctúa entre los 10 y 300 nanómetros¹. Se caracterizan por poseer solamente un tipo de ácido nucleico, es decir, ADN o ARN, pero no ambos como ocurre en formas superiores de vida. El ácido nucleico, que contiene el material genético está protegido por una capa proteica que se llama cápside, la cual está compuesta de numerosas subunidades proteicas sujetas a ciertas simetrías que determinan una estructura poliedral, que varía de unos virus a otros. Esta cápside es lo suficientemente eficaz como para formar un sello protector capaz de envolver al ácido, esta es la característica esencial de todos los virus, aunque algunos más complejos poseen otra envoltura exterior que contiene lípidos y azúcares ligados a las proteínas de la cápside, los cuales se conocen como virus envueltos.

¹ Un nanómetro equivale a 1×10^{-9} cm.



La figura a la derecha es un virus envuelto, llamado herpes virus, en la que puede apreciarse difusamente la forma poliedral de la cápside, que vemos con mayor detalle en la imagen de la izquierda.

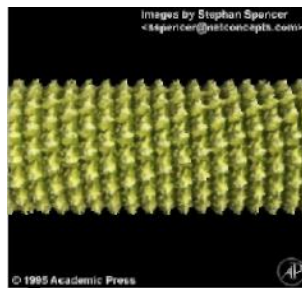
Las complejas uniones de macromoléculas en el sello de un virus son maravillosas miniaturas de arquitectura molecular y los requerimientos específicos de cada virus dan como resultado una fascinante diversidad de organización y diseño geométrico en la estructura poliedral asociada. La teoría sobre la construcción de la estructura poliedral de los virus fue iniciada en 1956 por Francis Crick y James Dewey Watson, esta teoría estaba basada en algunas consideraciones teóricas y un número no muy grande de evidencias experimentales posibles en aquella época. Posteriormente su teoría en términos generales, sería ampliamente confirmada y universalmente aceptada. Esencialmente, consistía en señalar que la cápside del virus adquiere una estructura poliedral que esta determinada por el propio virus y que la forma mas económica y “razonable” de que el genoma codifique la construcción de la cápside es que para ello utilice el mismo tipo de moléculas una y otra vez (teoría de las subunidades idénticas). Además, estas subunidades deberían empaquetarse siguiendo unas reglas de simetría geométrica de manera que conformaran un sello estable.

Si consideramos que algunos presentan una estructura algo más compleja, la mayor parte de los virus corresponden a dos grupos morfológicos diferenciados: Los de simetría helicoidal y los de simetría icosaedral.

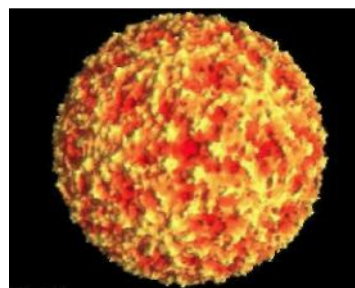
En los que presentan simetría helicoidal se observa que tienen una forma tubular hueca y en el hueco es donde se sitúa el ácido. Pero la disposición de las subunidades proteicas en la pared tubular (a excepción de los extremos) no es cilíndrica sino que van conformando una hélice (espiral).

En la actualidad existen técnicas de simulación que permiten reconstruir en computador la forma de muchos virus. Estas imágenes virtuales facilitan el estudio geométrico de su estructura y con ello el análisis de diferentes propiedades del virus investigado.

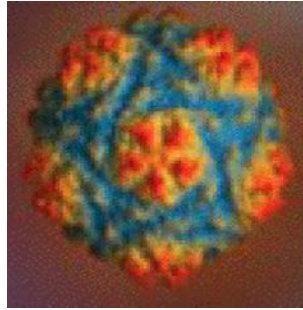
A continuación, presentaremos imágenes de dos partículas que corresponden a unas de las primeras enfermedades virales estudiadas. La de la derecha es la del virus de la fiebre aftosa, que presenta simetría icosaedral y a la izquierda la del virus del mosaico del tabaco, que presenta simetría helicoidal. Como curiosidad, incluimos la imagen de un virus icosaedral STNV (satellite tobacco necrosis virus) cuya forma es similar a la de una de las piedras talladas del neolítico.



Mosaico del tabaco

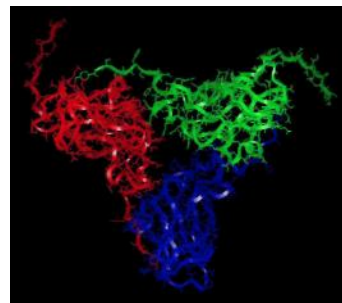
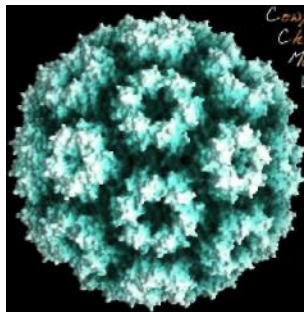


Fiebre Aftosa

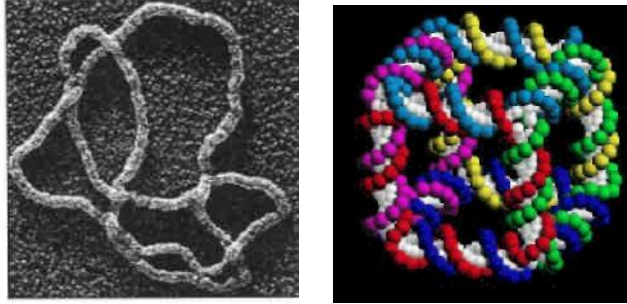


Virus STNV

La imagen a continuación es de un virus denominado con las siglas CCMV (Cowpea Chlorotic Mottle Virus). Su estructura poliedral es exactamente un icosaedro truncado y puede apreciarse bien en la mencionada figura, que muestra la forma global de la partícula viral. Matemáticamente, la unidad generadora de la estructura poliedral sería el trímero ABC, que se esquematiza como un triángulo dividido en tres regiones equivalentes *A*, *B* y *C*, coloreadas en gris oscuro o azul, gris o rojo y gris claro o verde respectivamente.



Podemos mencionar que muchos de los trabajos sobre virus contienen, cuando es posible, la representación de la unidad geométrica estructural y el tipo de simetría que experimenta para formar el sello (mapa topográfico); esto determina la disposición de las subunidades proteicas y con ello la forma poliedral final del virus. Por otra parte, el ácido envuelto por la cápside de los virus, que se presenta como una madeja filamentosa de una o más hebras, es susceptible de ser estudiado con técnicas topológico-geométricas, fundamentalmente teoría de nudos.



La presencia de los virus en la naturaleza es enorme, si tenemos en cuenta las numerosas enfermedades sufridas por el hombre, como por ejemplo el resfriado común, la gripe, algunas meningitis, hepatitis y el tan temido SIDA, todas son causadas por virus.

Bajo este contexto, no es extraño que Peter B. Medawar (Premio Nóbel de Medicina en 1960) definiera a los virus de la siguiente manera “Una mala noticia envuelta en proteínas”. Es tan amplia la influencia de los virus que justifica que este campo de investigación sea uno de los más interesantes y pujantes en la actualidad.

3.3 Los poliedros en la Química

Como hemos visto, en la naturaleza aparecen estructuras poliedrales que en su mayoría suelen ser poliedros regulares. En química esta relación se percibe en una gama de formas, siendo una de la más directas la formación de cristales de diversas sustancias, con esto nos referimos a que algunos minerales tienden a compactarse y formar estructuras mayores, sin embargo, la unidad básica se asemeja mucho a poliedros conocidos. Corroborando lo anterior presentaremos una correspondencia entre formas de cristales y su relación con los Sólidos Platónicos.

3.3.1 Poliedros regulares y su relación con las cristalizaciones de minerales

Cubo: aparece en los cristales de sal común, además, podemos encontrar esta forma geométrica en formaciones de Galena, Fluorita, Cuprita, Magnetita, Halita y Pirita.



Tetraedro: aparece en los cristales del sodio sulfantimoniato, también se encuentra con esta forma el Diamante, Calcita y Granate.



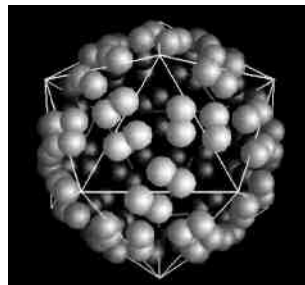
Octaedro: se encuentra en las cristalizaciones del alumbre de cromo, como también en las del Oro, Fluorita, Pirita, Espinela, Cuprita, Galena, Diamante y Magnetita.



Dodecaedro: El único cristal natural que cristaliza en esta forma (aunque no del todo regular) es la Pirita.



Icosaedro: Sólo podemos encontrar formaciones de este tipo en la cristalización del Agua y también en los Virus.

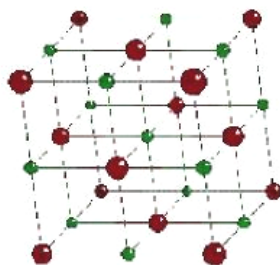


Considerando lo anterior, nos podemos dar cuenta el por qué los poliedros se han utilizado siempre en temas cristalográficos relacionados fundamentalmente a la geología y la química. Además, esto da mayor fuerza al argumento de la visión sagrada que se tenía sobre los poliedros platónicos en sus comienzos, y que se han detallado en el capítulo uno.

3.4 Enlaces Químicos, Grafos y Poliedros

Al recorrer las páginas de este libro, aprendimos cómo los poliedros convexos podían o mejor dicho tenían una representación gráfica mediante un grafo plano, sin embargo, también existen grafos en el espacio de tres dimensiones, un ejemplo de esto puede ser visualizado por el viaje internacional de un avión que recorre variadas capitales del mundo o el recorrido de una persona en un edificio de muchos pisos, donde esta tenga la opción de ocupar las escaleras o tomar ascensor para llegar a distintos destinos. Pero también la química, tiene una relación con esta teoría, y a la vez con los poliedros.

Si observamos la figura siguiente, podemos darnos cuenta que tiene la forma de un cubo o hexaedro, sin embargo, podemos decir que representa una molécula de tierra, su diagrama es de uso frecuente en el estudio de los fenómenos moleculares, ya que se puede asociar un vértice con cada átomo y una arista con cada enlace (no importando la clase de enlace considerado) y con esto, estudiar la conectividad que existe entre átomos, dando un mejor entendimiento de su comportamiento a investigadores. Con esta estructura, cada molécula estable determina un grafo conexo, y las propiedades magnéticas, aislantes y otras están relacionadas directamente a esta estructura.

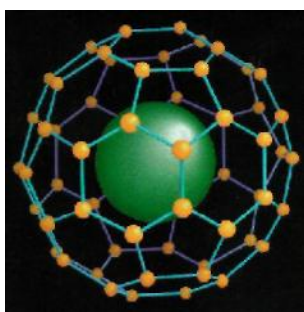


Ahora es fácil comprender la estrecha relación que existe entre la familia de los grafos finitos conexos y las posibles estructuras moleculares. En el caso en el que la estabilidad se alcance con un gran número de átomos, el uso de grafos infinitos puede modelar mejor la estructura poliedral de la sustancia analizada.

3.5 Los Fullerenos

Una reciente rama de la química, especialmente rica en investigación y en la que el uso de técnicas poliedrales es muy amplio, es la de los fullerenos (pronunciado fulereno).

El carbono es un elemento que se presenta en formas y colores diversos, quizás los más conocidos son el sólido y blando grafito y el cristalino y duro diamante, claro esta, que el orden en los átomos de carbono son distintos en cada uno. Pero hace poco el carbono irrumpió con fuerza en el campo de los materiales, ya que en 1985 gracias a los investigadores norteamericanos Robert Curl y Richard Smalley y del ingles Harold Kroto se descubrió una nueva forma del carbono, nos referimos al carbono 60 o C₆₀, que esta compuesta por 60 átomos de carbono unidos mediante doce pentágonos y veinte hexágonos. La figura se muestra a continuación.



Este descubrimiento se logró cuando los investigadores hacían estudios sobre la composición química de las estrellas. Al analizar las imágenes obtenidas por los telescopios de los observatorios astronómicos, ellos sospechaban, al igual que otros científicos, que tal composición tenía que ver con largas cadenas de moléculas de carbono. Pero en lugar de obtenerlas por simulación mediante experimentos con técnicas convencionales, los investigadores señalados decidieron pasar un haz de láser sobre el vapor de carbono, al hacerlo, no sólo aparecieron las cadenas de moléculas que esperaban, sino que observaron que estas tenían una forma poliédrica totalmente inesperada, como la de un balón de fútbol. Así se descubrió el C₆₀, de hecho una familia entera de nuevas formas de carbono (C₇₀, C₇₆, C₇₈, C₈₂, C₈₄, etc.).

Luego de este descubrimiento muchos trabajos se centran en los fullerenos, debido a que al añadirles ciertos átomos alcalinos se obtienen compuestos superconductores eléctricos.

La molécula C_{60} fue bautizada con el nombre de buckminsterfullereno, y abreviadamente se le llama fullereno, en honor al ingeniero americano R. Buckminster Fuller, quien había diseñado en 1967, para la EXPO en Montreal, una cúpula geodésica en la que usaba elementos hexagonales junto con alguno pentagonal para curvar la superficie. En el caso del C_{60} , la estructura poliedral es muy simple, ya que consta de un solo poliedro que es un Icosaedro Truncado.

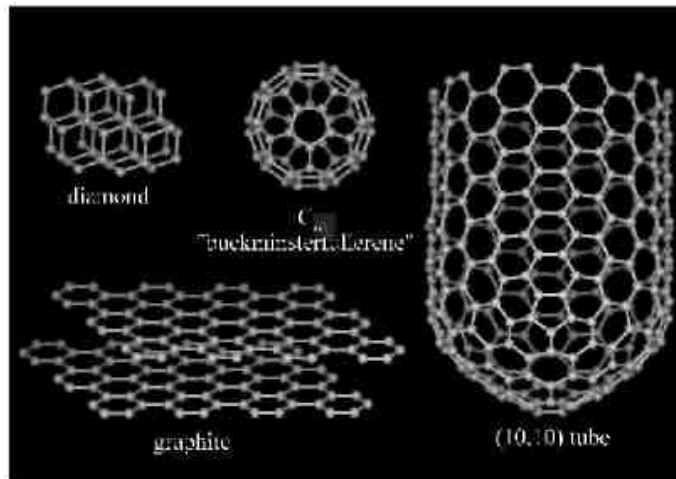


Figura: Tipos de fullerenos

Actualmente hay abierto un nuevo campo de investigación que permite el estudio de los posibles fullerenos a través de herramientas matemáticas tales como la teoría de grafos, poliedros, topología algebraica y otros.

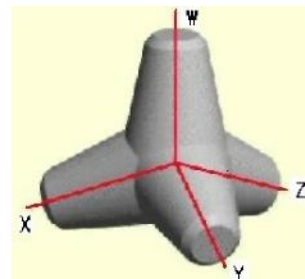
3.6 Los Poliedros y la Tecnología.

Acabamos de exponer cómo los poliedros se manifiestan en las ciencias, sin embargo, todo avance científico va acompañado de aplicaciones tecnológicas. Aplicaciones existen muchas, pero a continuación presentaremos algunas en las que se utilizan propiedades del tetraedro, además hablaremos del arquitecto Fuller quien utilizó propiedades de los fullerenos para construir edificaciones que pasaron a la historia.

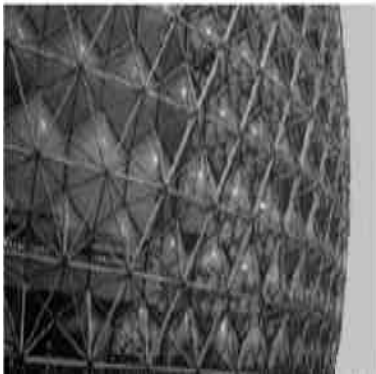
Sabemos que en cualquier posición que sea apoyado un tetraedro, uno de sus vértices queda siempre vertical hacia arriba. Por este motivo, y basado en su forma, es que la fabricación de algunos modelos de elementos móviles de balizamiento de carreteras se utiliza en países europeos, ya que al ser indiferente la posición en la que se apoyen, su colocación es rápida y sencilla, dándoles estabilidad, impidiendo ser derribados por los vehículos.



Un objeto no muy diferente son los llamados Tetrápodos que tienen una forma sencilla, con gran facilidad para trabarse y engancharse entre sí y que se utilizan en la defensa contra el oleaje.



Cuando enlazamos los poliedros con la química, conocimos el nombre del arquitecto Richard Buckminster, este arquitecto de renombre mundial es conocido no por sus aportes a la química, si no, por ocupar formas poliédricas en sus diseños arquitectónicos, a partir de piezas básicas que se ensamblan de modo que se obtenga la máxima ventaja estructural y ambiental con un costo reducido. En la figura, se muestra la construcción de la cúpula geodésica diseñada por Fuller para la expo Montreal del año 1967.



Este tipo de construcciones fue revolucionario en su tiempo, es por eso que durante el año 2004, el Servicio Postal de los Estados Unidos emitió una estampilla conmemorativa de los cincuenta años en que Fuller patentó su invención.



3.6.1 Aplicaciones de los poliedros en la Arquitectura

Otra de las áreas donde encontramos más de una aplicación de los poliedros es en la Arquitectura, sin embargo, no podemos especificar qué tipo de visión llevó a cientos de arquitectos a basar sus construcciones en estos sólidos, será por su belleza o por ser más creativos, pero lo importante es que han visto en los poliedros una forma de mostrar sus creaciones para innovar en el campo de la creatividad y del modernismo.

La gran mayoría de los edificios son prismas rectangulares, es decir de caras laterales rectangulares y bases cuadradas, pero también podemos encontrar algunas innovaciones que presentamos a continuación.



Este edificio se encuentra en Madrid y podemos apreciar dos prismas rectangulares adyacentes.

Este otro edificio en forma de cubo pertenece a la facultad de una universidad en Latinoamérica



Podemos apreciar cómo dos poliedros de forma paralela conforman este edificio.



He aquí un claro ejemplo de cómo la arquitectura puede mostrarnos la variedad de poliedros que encontramos en la vida cotidiana. Este edificio es un prisma con dos caras laterales en forma de romboides y dos caras laterales rectangulares.

Este invernadero en forma de domo semiesférico, es un ejemplo de cómo los poliedros son de gran utilidad a la hora de crear construcciones arquitectónicas.



Aquí, una muestra de otras creaciones de edificios urbanos en el mundo.



3.7 Los poliedros en el Arte¹

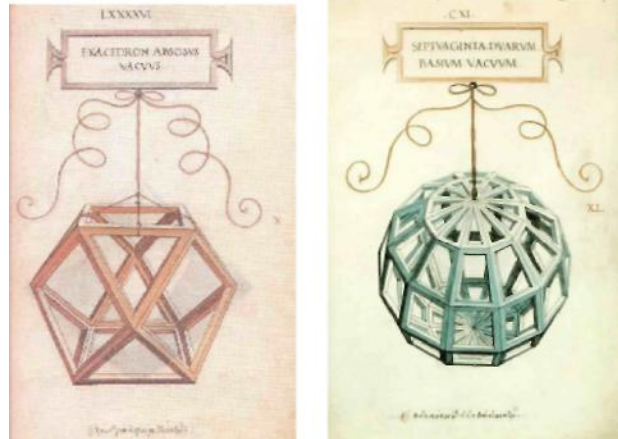
Como se observó en el capítulo uno, los poliedros han sido utilizados desde la antigüedad, su uso varió dependiendo del período histórico, siendo el período de Platón, Empédocles, Kepler y otros asociado a teorías universales y sagradas entre otras, también algunas culturas como la romana los ocuparon como adornos. En la imagen un adorno romano.



Sin embargo, si tuviéramos que mencionar un período en el cual los poliedros fueron muy utilizados, haríamos mención a la corriente artística manifestada en Europa aproximadamente entre el 1400 y 1600 d.C. nos referimos al Renacimiento. Muchos de los grandes artistas de dicha época utilizaron los poliedros como un instrumento para desarrollar técnicas relacionadas con la perspectiva y otras aplicaciones.

Esto marcó el descubrimiento de nuevos poliedros y el redescubrimiento de otros que habían quedado en el olvido en épocas anteriores. Este es el caso de Piero della Francesca (1410-1492), pintor cuyas técnicas sobre la perspectiva fueron olvidadas y atribuidas posteriormente a Luca Pacioli (1445-1514). Así fue que, en su principal trabajo “De Divine Proportione”, Pacioli incorporó los maravillosos dibujos poliedrales de su amigo y alumno Leonardo da Vinci. Los dibujos de Leonardo da Vinci en la figura siguiente.

¹ “De cómo la geometría entrelaza ciencia y arte: la historia de un poliedro”, Edith Padrón, Universidad de Laguna,



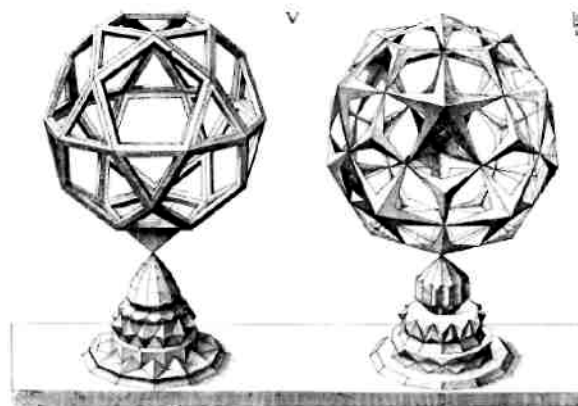
También son de esta época (1520) los famosos mosaicos elaborados en maderas de diversas tonalidades creados por Fray Giovanni donde se muestran variados poliedros entre los que destacan el icosaedro, el icosaedro truncado y un poliedro que se asemeja a una esfera, en el mosaico central



Durante esta época cultural, la escuela alemana Renacentista tuvo algunos de los más famosos artistas, quienes usaron estructuras poliedrales en sus trabajos, como es el caso de Albrecht Durer (1471-1528), autor de “Melancolía”, cuadro que representa a un pensador sentado al lado de un romboide truncado. Otro exponente de esta escuela lo encontramos en el orfebre Jamnitzer (1508-1585), considerado uno de los mejores y más creativos artistas poliedrales de la historia.



Los siguientes dibujos de Jamnitzer hacen recordar los dibujos de Leonardo da Vinci, la única diferencia radica en el poliedro de la derecha, que tiene una particularidad de mucha connotación, ya que incluye a dos poliedros en uno. Uno de estos poliedros es el dodecaedro, que se forma con la unión de los vértices de las estrellas de tres puntas, el otro es el icosaedro que se forma al unir los vértices de las estrellas de cinco puntas. Cabe destacar que probablemente Jamnitzer conocía las propiedades duales de estos dos poliedros, pues es muy sugerente el dibujo creado por éste.



Así fue como estas figuras se utilizaron durante esta época de intelectuales, pero como todo en el mundo, dejó de ser interesante y quedó en el olvido durante mucho tiempo. Sin embargo, artistas contemporáneos de mitad del siglo pasado, como Gaudí o Dalí, fueron los que utilizaron nuevamente estos cuerpos geométricos.

Antoni Gaudí fue un arquitecto catalán y gran representante de la corriente artística llamada modernismo. Es reconocido por obras en las que empleaba conceptos geométricos para su diseño y posterior construcción, ejemplo de esto es la Sagrada Familia, catedral establecida en Barcelona y en la que utilizó cubos, octaedros y dodecaedros, además en la construcción de las columnas que soportan esta iglesia, entremezcló prismas de diferentes bases para suavizar los ángulos y optimizar las distribución del peso.



Fotografía de la Sagrada Familia, Barcelona

Por su parte, Dalí hizo trabajos como “La Última Cena” donde presenta la última cena de Jesús con sus discípulos. Se observa a Jesús impartiendo la eucaristía mientras los otros oran en silencio, además, Dios bendice la escena desde arriba. El espacio que los rodea esta limitado por el Dodecaedro.



También esta “Crucifixión” (1954) o bien conocido como “Corpus Hypercubus” que retrata un hipercubo, que es un objeto de cuatro dimensiones, pero que su desarrollo tridimensional puede verse en la imagen. En el suelo embaldosado se puede ver cómo su proyección tiene forma de cruz latina, sugiriendo el paso a dos dimensiones.



Otro de los artistas contemporáneos destacados que utilizaron poliedros en sus trabajos, es el artista gráfico Maurits Cornelis Escher (1898-1972) de origen holandés, que en general se inspiraba en la matemática para muchos de sus trabajos.

Si revisamos la obra de Escher nos daremos cuenta que tenía un apego casi emocional hacia las teselaciones en el plano y las sucesiones infinitas, pues son tema recurrente de sus trabajos, sin embargo, en su etapa más avanzada y reconocida tomó el rumbo de crear objetos imposibles basados en sólidos (platónicos o de otro tipo). Así fue que en 1943 en su litografía “Reptiles” incluye un Dodecaedro, probablemente su primer trabajo en el que incluye un Sólido Platónico.



En este trabajo, del cuaderno de Escher, en el que ha estado dibujando patrones regulares hexagonales con forma de reptil, surge una figura en tres dimensiones (reptil que se encuentra más abajo). El reptil sube por un libro hasta llegar a un Dodecaedro, donde finalmente lanza un soplo victorioso, y completa el ciclo retornando al papel del que nunca debió haber salido.



No fue hasta que el holandés empezó a dibujar cuadros sin fin, que utilizaban muchos poliedros, que empezamos a ver cuadros como “Belvedere” de 1958, que es una de las más populares obras arquitectónicas sin fin de Escher, donde en un extraño edificio suben y bajan varios personajes. Dicho edificio consta de dos plantas rectangulares, situadas en direcciones perpendiculares, y la manera de conseguir ese efecto es cambiar las aristas que deberían de unir cada una de las partes separadas por columnas, que son en esencia cubos. Además, abajo aparece un hombre sentado en un banco con un pequeño cubo sin fin.

A pesar de que lo más común es utilizar estos cubos falsos, también utiliza el triángulo de Penrose. En la litografía “Cascada” de 1961, Escher basa el edificio en éste triángulo sin fin, dando la sensación de estar ante un edificio cuya relación entre pisos recuerda a un tetraedro, pero que en definitiva no es más que algo imposible. Además, en la parte superior de la torre izquierda aparece un sólido como elemento decorativo. Se trata de tres cubos intersecados. En la siguiente figura ocurre lo mismo, sólo que esta vez se trata de tres octaedros.



Sin embargo, su etapa más centrada en los poliedros, es sin duda entre 1948 y 1954, cuando dibuja varios cuadros totalmente basados en este tema, donde los poliedros aparecen como elemento principal y no como algo meramente decorativo. En Planetoide doble y Planetoide tetraédrico, utiliza tetraedros que crean extraños planetas, en el primero son dos que se intersecan por los centros de las aristas y en el segundo tan sólo uno, que da lugar a dos mundos totalmente distorsionados.

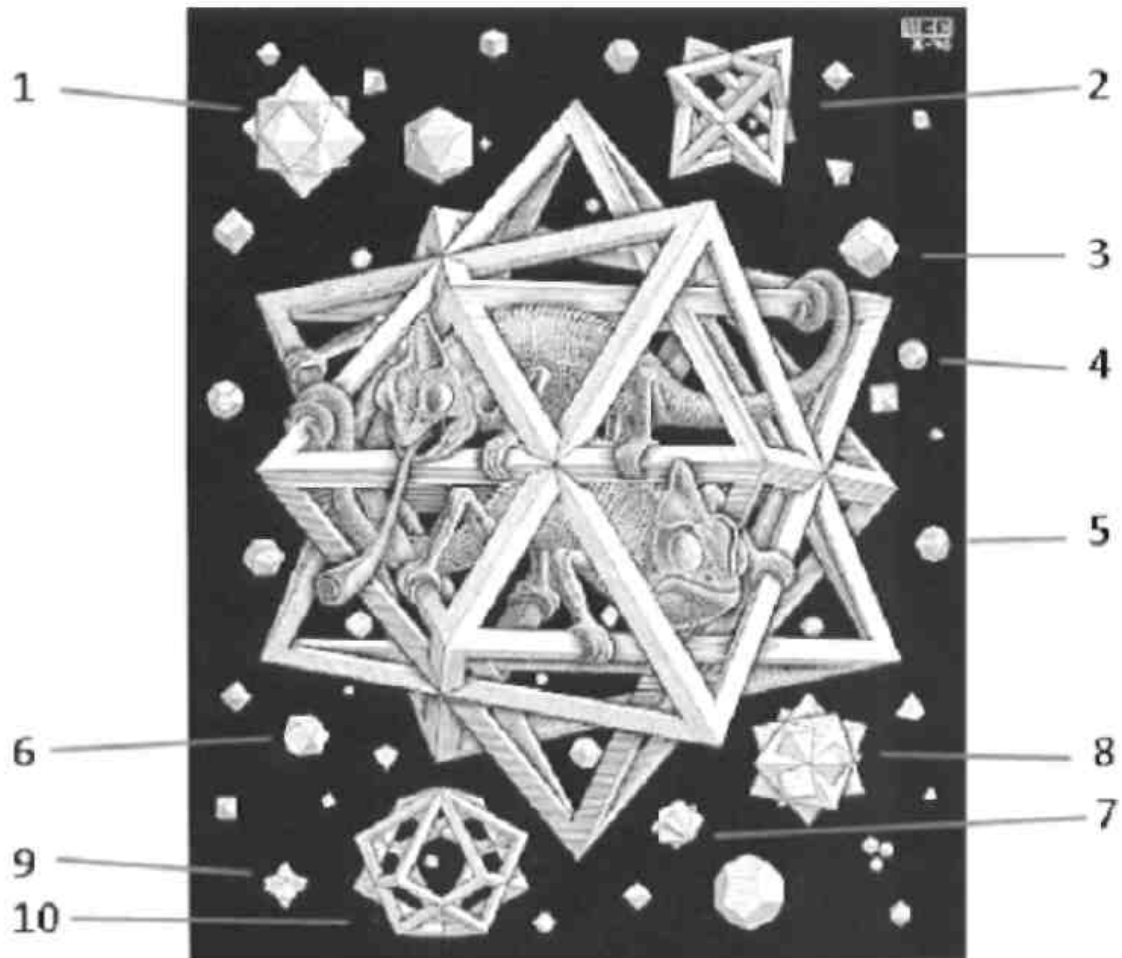


En otras dos litografías de 1950 y 1952, incluye la figura del dodecaedro estrellado. En Gravedad (abajo a la izquierda) emergen del dodecaedro estrellado reptiles de una forma bastante caótica. En Orden y caos, el dodecaedro estrellado está parcialmente dentro de una esfera, que representan el orden, por oposición a los cristales rotos de alrededor.



Pero tal vez el trabajo más completo de todos los de Escher, en lo que a poliedros se refiere, sea la xilografía Estrellas de 1948. La figura principal es una gran estrella, compuesta por 3 octaedros huecos unidos, en cuyo interior se aferran dos camaleones. Aparte de esta figura, que ya de por sí es muy interesante, vemos que todas las estrellas del fondo son otros poliedros. Hay varios tetraedros, octaedros, icosaedros, cubos, pero entre ellas hay figuras aún más significativas:

1. Cubo intersecado con octaedro
2. Dos tetraedros huecos intersecados
3. Rombododecaedro
4. Rombicuboctedro
5. Icositetraedro deltoidal
6. Cuboctaedro
7. Dos cubos intersecados
8. Tres octaedros unidos como la estrella principal
9. Dos tetraedros
10. Dos cubos huecos unidos por un vértice



Capítulo 4

4.0 Propuestas Didácticas, Aplicaciones y Recursos Tecnológicos

4.1 Introducción

Este último capítulo del libro esta dirigido a la presentación de material para el docente, sirviendo de apoyo a profesores en el diseño, planificación y aplicación de actividades didácticas, que permitirá interactividad en los alumnos, relacionando todos los contenidos propuestos durante el desarrollo de esta tesis y aplicándolos a ejercicios, talleres prácticos, manualidades, etc, con el fin de llevar este conocimiento matemático al aula, para mostrar así, que el contenido está absolutamente ligado a labor diaria y cotidiana del docente, como también del alumno.

4.1.1 Análisis de los Contenidos Mínimos Obligatorios

Dentro del Marco Curricular de la enseñanza de la matemática del MINEDUC, encontramos en los distintos niveles, contenidos que abordan las figuras geométricas como casos aislados, sin relacionarlos con otras áreas del conocimiento.

En quinto básico tenemos la unidad 5:

Cuerpos geométricos¹ (cubo, prismas, pirámides):

- Armar cuerpos, a partir de sus caras.
- Construir redes para armar cubos.
- Identificar y contar el número de caras, aristas y vértices de un cuerpo y describir sus caras y aristas.

Cuyos aprendizajes esperados para esta unidad son:

Los alumnos y alumnas:

1. Seleccionan entre variadas figuras geométricas las adecuadas (forma) y necesarias (cantidad) para construir prismas rectos y pirámides.
2. Reconocen diferentes redes para armar cubos; reconocen y explican que existe una cantidad limitada de variaciones en las redes de cubos.

Las orientaciones didácticas de esta unidad ponen especial atención en particular, sobre los prismas y las pirámides, en las diferentes formas que pueden tener las redes para armar cubos y en los efectos producidos por la introducción de variaciones en cuadrados y rectángulos dando origen a rombos y romboides. Respecto de perímetros y áreas, se propone un conjunto de actividades con cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos con el fin de iniciar el acercamiento de los niños y las niñas a estas nociones, las cuales serán tratadas en profundidad en el nivel siguiente.

¹ Programa de Estudio de Matemática, Quinto Básico

Como en el nivel anterior, se busca que los cuerpos y las figuras geométricas sean trabajados a partir de objetos que tienen sus formas muy próximas a ellos (envases, por ejemplo) y que éstos sean fuentes para la observación y la experimentación; se propone, además, la construcción de cuerpos geométricos tanto a partir de sus redes (en el caso del cubo) como de trozos de cartulinas con las formas adecuadas. Estas actividades permiten aproximarse a las características de los cuerpos y profundizar en las propiedades de las figuras que dan forma a sus caras.

En sexto básico nos encontramos nuevamente con una unidad de geometría, cuyo contenido aborda la reproducción y creación de figuras y representaciones planas de cuerpos geométricos usando regla, compás y escuadra.

En séptimo básico encontramos la unidad “Geometría: prismas, pirámides y triángulos”. Donde uno de los principales objetivos es que los alumnos aprendan a armar redes de cuerpos geométricos.

En octavo básico, tenemos una unidad de polígonos donde se trabaja en construcción de ellos, con instrumentos geométricos, para finalizar con la unidad de volúmenes de cuerpos geométricos.

Entonces, sólo en enseñanza básica, los cuatro cursos de segundo nivel integran una gran cantidad de contenidos de geometría del espacio, más específicamente, sobre cuerpos geométricos. Esto nos lleva a mediar en la formación inicial de docente de enseñanza básica, conociendo que la gran debilidad de matemáticas en el ciclo básico es la geometría. Vemos una gran oportunidad de mostrar el estudio que aquí realizamos para el apoyo docente de dichos profesionales, y en especial para alumnos de Pre-grado de las universidades que ofrecen carreras de pedagogía en educación general básica con mención en matemáticas.

4.1.2 Propuestas Didácticas

Esta sección esta orientada al trabajo práctico y manual del alumno, es decir, a las aplicaciones matemáticas en forma recreativa, con un alto componente lúdico, ya que esta forma de introducir la matemática proporciona un buen camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la matemática elemental.

Para ello se ha seleccionado talleres, ejercicios resueltos y propuestos para cada nivel correspondiente, de la siguiente manera:

Talleres:

Taller I: El Dodecaedro y el Dodecaedro estrellado.

Actividad propuesta para cursos desde 7° año básico hacia arriba.

Taller II: Principio de Arquímedes y el volumen de las Pirámides.

Actividad propuesta para cursos desde 8° año básico.

Taller III: Puzzles en el Espacio.

Actividad propuesta para cursos de 5° y 6° básico.

Taller IV: Construcción de un Dodecaedro mediante Origami modular.

Actividad propuesta para cursos desde 7° básico hacia arriba

Taller V: Los Sólidos Platónicos y las Teselaciones de Escher.

Actividad propuesta para 1° medio.

Taller VI: Teselando el Espacio.

Actividad propuesta para 1° medio.

Taller VII: Conociendo el Teorema de Euler

Actividad propuesta para 7° básico.

Taller VIII: Creando un poliedro nuevo. ¿Será posible?

Actividad propuesta para 7° básico en adelante.

Para enseñanza básica:

- Actividad 1: Guía de ejercicios sobre prismas.
- Actividad 2: Guía de ejercicios sobre pirámides.
- Actividad 3: Guía de ejercicios sobre volúmenes.

Para enseñanza media:

- Ejercicios resueltos de propiedades, áreas y volúmenes de poliedros, y medidas de segmentos notables de los poliedros.
- Guía 1, 2 y 3 con ejercicios propuestos.
- Ejercicios con Sólidos Platónicos y con otros sólidos.

Recursos Tecnológicos:

En esta sección, abarcamos algunas nuevas metodologías para la aplicación de recursos digitales y tecnológicos dentro de la sala de clase, presentando una planificación usando apoyo informático, y también, entregando una serie de links asociados al apoyo para el docente, para distintos tópicos y contenidos asociados a esta memoria.

Además, presentamos la aplicación de algún software que permite la interacción del alumno con la geometría, en especial con los poliedros, para un aprendizaje más significativo y dinámico.

4.2 Taller 1: El Dodecaedro y el Dodecaedro estrellado

Sabemos que el dodecaedro es uno de los cinco poliedros regulares, y en los tiempos de Platón se le asociaba también a todo lo relacionado con el universo.

Descripción:

Este poliedro resulta bastante interesante, no sólo por lo mencionado anteriormente, si no porque podemos usarlo como base para construir uno de los cuatro poliedros de mayor belleza entre los conocidos, y nos referimos al “dodecaedro estrellado” que es uno de los poliedros de Kepler.

Materiales:

- Compás
- Transportador
- Lápiz grafito fino
- Cartonero
- Regla

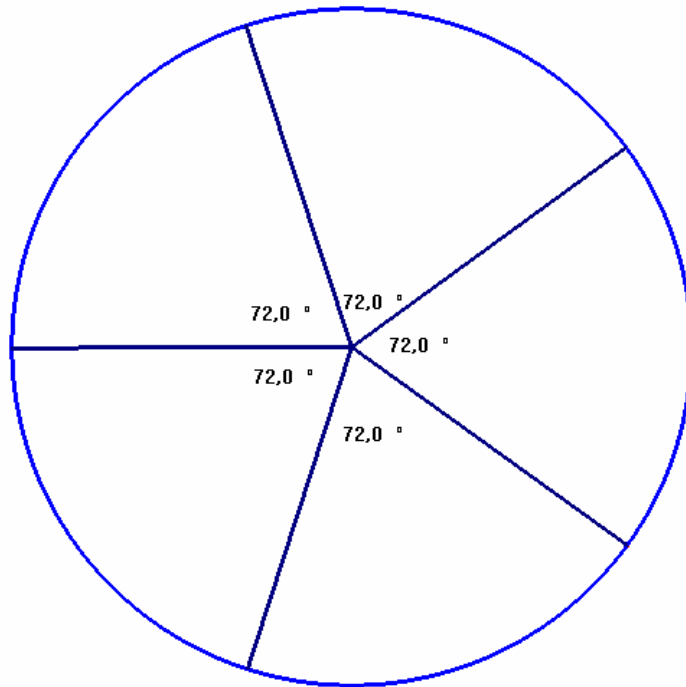
A continuación, explicaremos la construcción que corresponde a la mitad del dodecaedro.

Instrucciones:

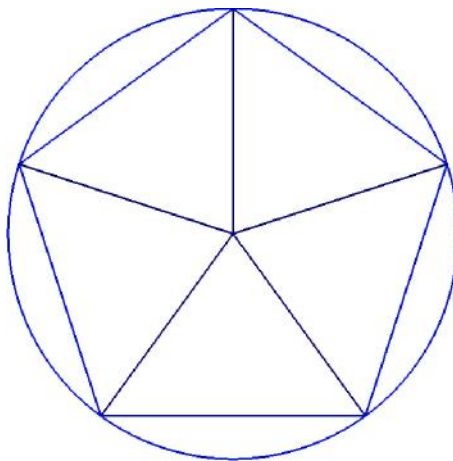
El objetivo es construir este poliedro estrellado a partir de una matriz, que construiremos en primera instancia y que luego copiaremos para tener muchos y así no tener que repetir los mismos pasos para volver a fabricar otra.

1. Dibuja una circunferencia con radio entre 8 y 10 centímetros aproximadamente.

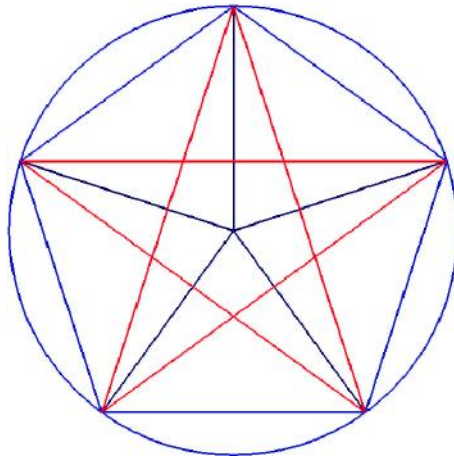
2. Desde su centro traza cinco radios tales, que los ángulos que se formen entre ellos sean de 72° cada uno.



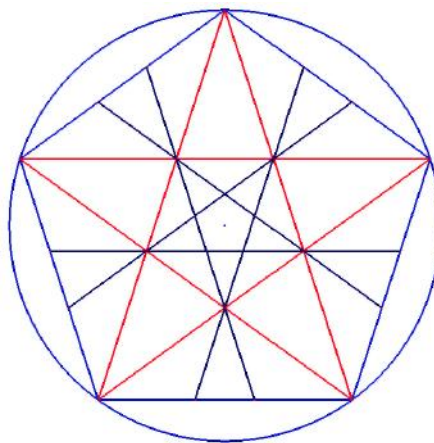
3. Dibuja las cuerdas que se determinan al unir los puntos de intersección de los radios con la circunferencia. Te habrás dado cuenta que se forma un pentágono.



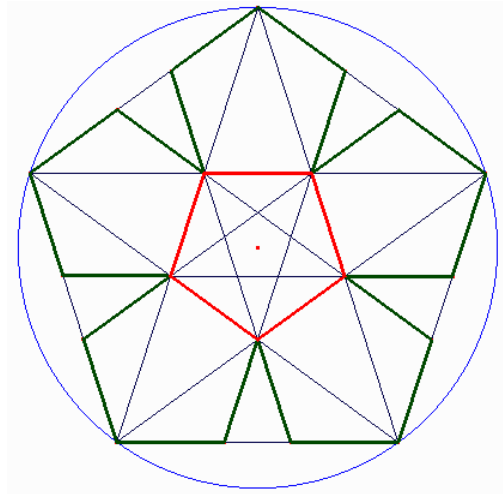
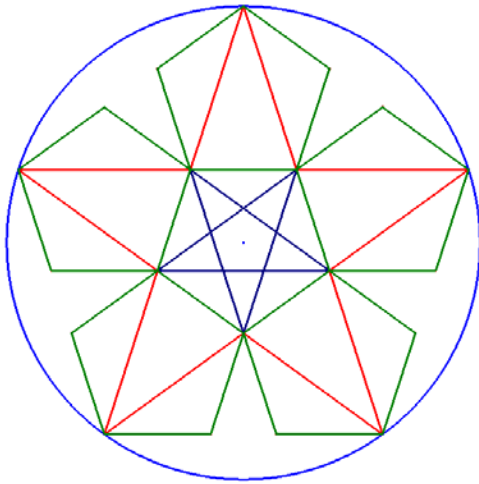
4. Traza todas las diagonales de tu pentágono. Estas diagonales forman otro pentágono central más pequeño, el cual será la cara de nuestro dodecaedro.



5. Traza las diagonales de tu nuevo pentágono y prolóngalas hasta que corten al pentágono más grande.

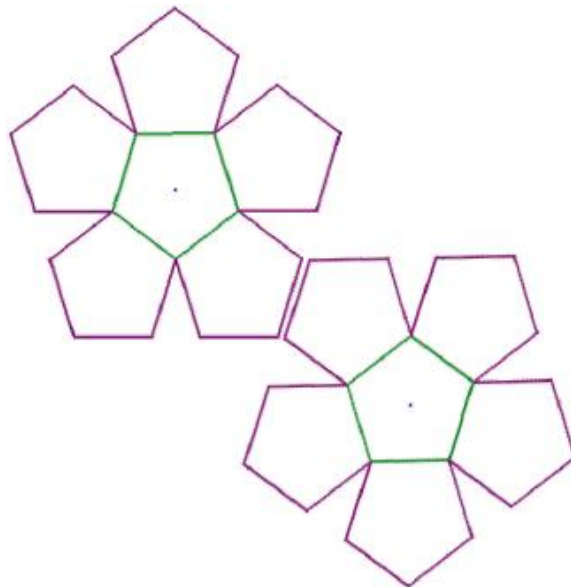


6. Ahora, podrás visualizar cinco pentágonos unidos a los lados del pentágono del centro, observa:



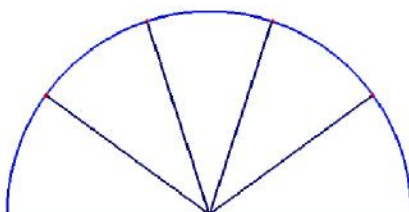
7. Copia una vez esta figura, pinchando sobre la cartulina con el compás, los vértices de los pentágonos, pues recuerda que debe ser perfecto para que cuando construyas la otra mitad calcen perfectamente.

8. Dibuja las aletas a los lados de cada pentágono exterior de manera intercalada y luego corta todas las figuras, que para el dodecaedro necesitas 12.

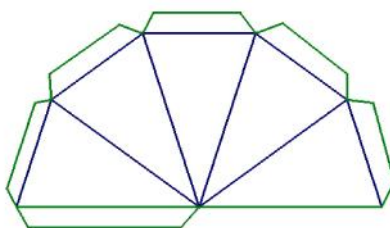


Cuando hayas terminado el dodecaedro puedes proceder a estrellarlo. La idea es construir doce pirámides de base pentagonal igual a los pentágonos del dodecaedro que construiste, tales pirámides tendrán triángulos isósceles como caras laterales, el lado del triángulo isósceles ocupado será igual a la medida de la diagonal de los pentágonos que formamos anteriormente. El modelo para construir estas puntas se indica a continuación.

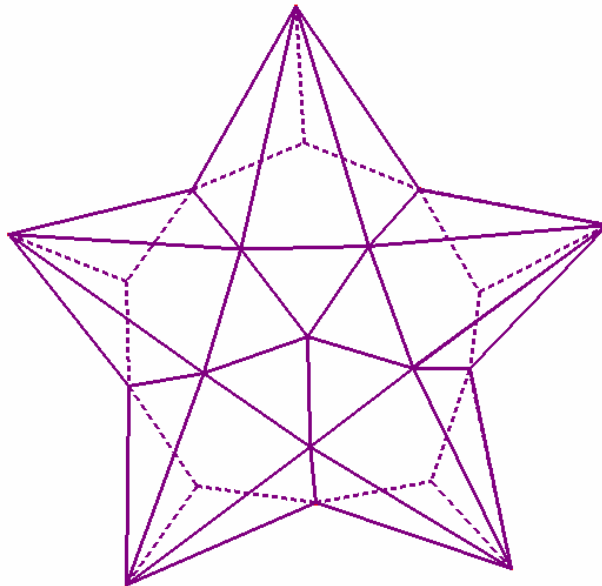
1. Dibuja una semicircunferencia de radio igual a la diagonal del dodecaedro.
2. Divide el semicírculo en cinco regiones de manera que se formen ángulos adyacentes de 36° .



3. Luego, une los puntos de la circunferencia, formando triángulos isósceles y ponle aletas a todas las aristas exteriores menos a uno de los lados de uno de los triángulos.



4. Repetir once veces más esta construcción y luego pegar sobre las caras de dodecaedro, quedando aproximadamente así:



4.3 Taller II: Principio de Arquímedes y el volumen de los cuerpos.

Experimentalmente se puede determinar el volumen de una pirámide aplicando el principio de Arquímedes, “todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta una pérdida de peso que es igual al peso del líquido que desaloja”.

Descripción:

Aplicando el principio anteriormente señalado, junto con integrarse con los otros subsectores de enseñanza, es que en la clase de Educación Tecnológica, los alumnos construirán un Tetraedro y un Prisma Triangular (ambos de igual material, además el tetraedro y el prisma triangular deben tener igual área basal como también la misma altura). Luego, en clase de matemática se espera obtener, por determinación propia de los alumnos, el volumen de una Pirámide cualquiera.

Materiales:

- Tetraedro.
- Prisma triangular.
- Probeta lo suficientemente grande como para introducir ambos sólidos por separado.
- Agua.
- Hoja de anotaciones.
- Lápiz.

Instrucciones:

1. Llena la probeta con agua hasta una medida que supere en unos pocos centímetros a los sólidos que tienes.
2. Marca esa medida.
3. Introduce dentro, la pirámide de base triangular y observa el nuevo nivel.
4. Anota la medida.
5. Se toma la diferencia de niveles.

6. Se hace una conversión de litros a kilos (o de *ml* a *gr*).
7. Ahora haz el mismo procedimiento con el prisma.

Observación:

La equivalencia entre litros y kilogramos es: un litro de agua, corresponde a un kilogramo, es importante saber esto, pues no con cualquier clase de líquido esta equivalencia funciona, como por ejemplo: un litro de aceite pesa más de un kilo.

Nota para el profesor:

Aplicando la equivalencia entre peso y volumen, los alumnos debieran ser capaces de concluir que: “el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma triangular”.

Observación:

El Tetraedro es un caso particular de Pirámide, por lo que se debe generalizar la fórmula para toda pirámide.

Por lo tanto, el volumen de una pirámide de base triangular es $V = \frac{b \cdot h}{3}$, donde b es el área de la base y h es la altura.

4.4 Taller III: Puzzles en el Espacio

Una de las mayores dificultades que experimentan los estudiantes y en general la mayoría de las personas en las matemáticas, es la visualización espacial, esto sucede por muchos motivos, siendo uno de ellos, el poco trabajo en aula con figuras reales, ya que se dedica más tiempo a exponer con dibujos sobre la pizarra.

Descripción:

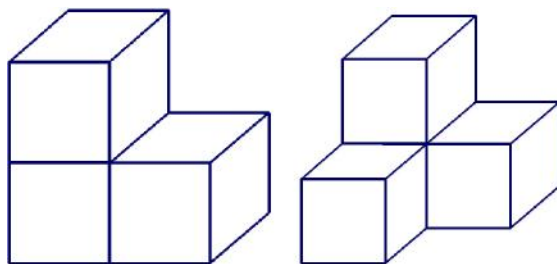
Para desarrollar el sentido espacial en los alumnos, es que en los ciclos básicos, trataremos de construir puzzles en el espacio, para ello ocuparemos el conocido Cubo Soma, que es un juego didáctico diseñado por Piet Hein.

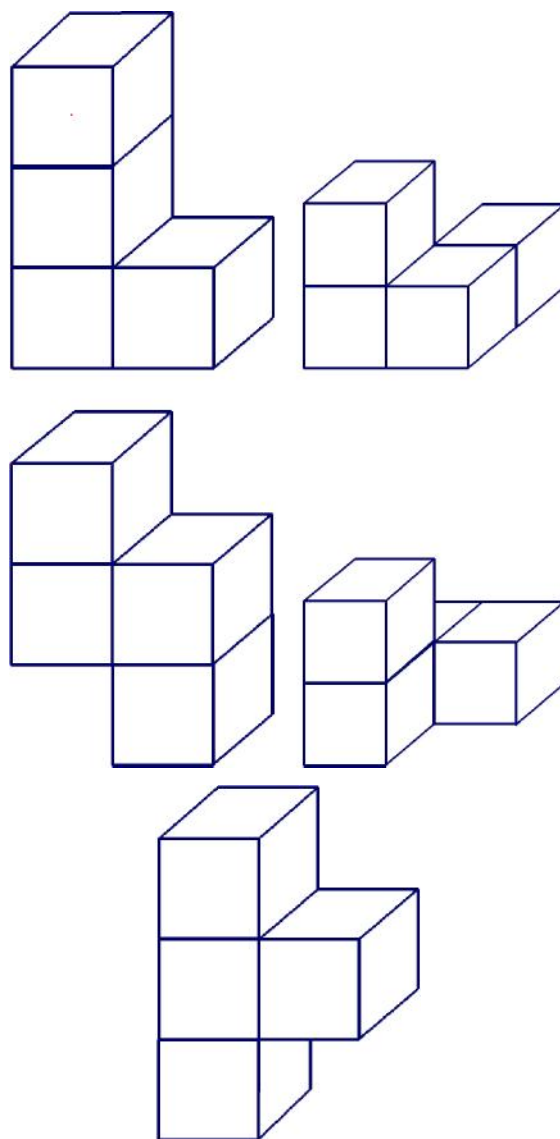
Materiales:

- 27 cubos de igual medida.
- Pegamento.

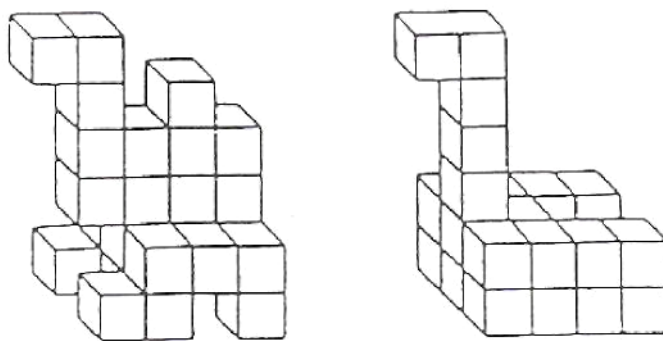
Instrucciones:

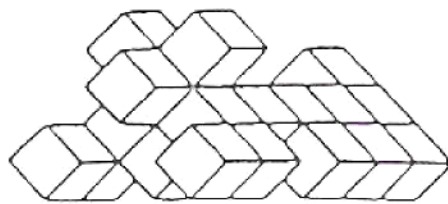
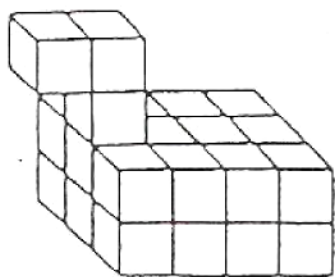
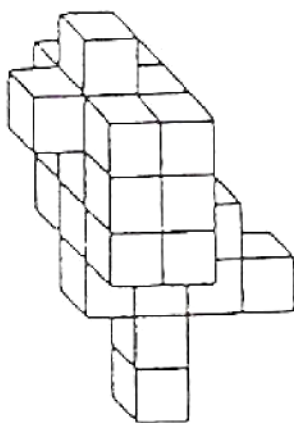
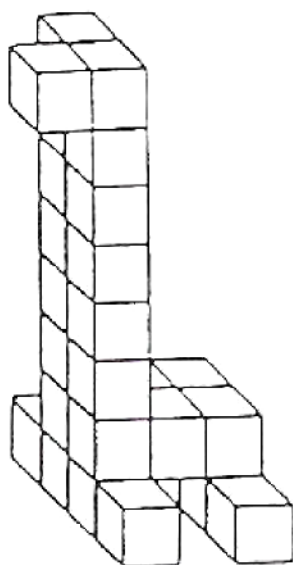
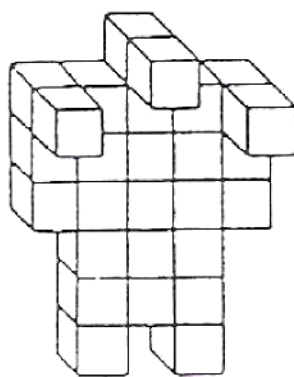
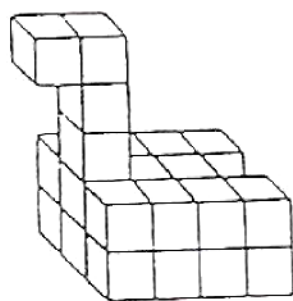
Con los 27 cubos y el pegamento construye las figuras que a continuación se proponen construir con las siete piezas un cubo de tres cubitos por lado.





Utilizando las mismas fichas del Cubo Soma pueden realizarse otras construcciones, como las que aparecen a continuación, que representan animales:

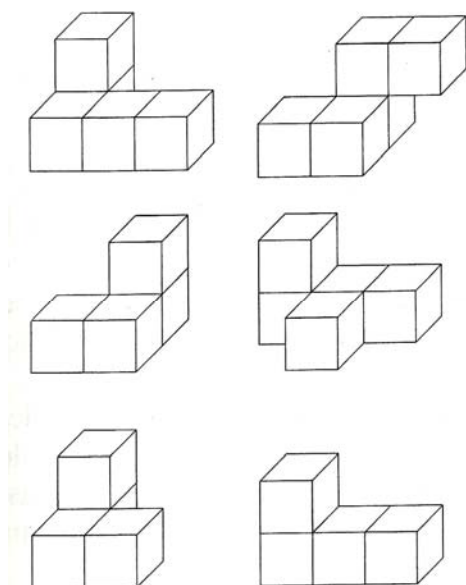




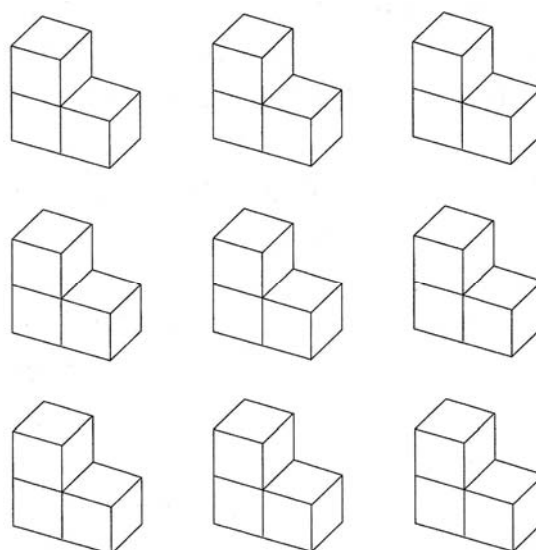
Otros puzzles en el Espacio:

Existen otros puzzles formados a partir de cubos, que pueden añadir más experiencia, para mejorar la capacidad espacial de los alumnos, entre ellos tenemos el Cubo de Steinhaus, que se forma a partir de seis piezas, el de O'Berine, cuyas fichas son todas iguales, y por último, el cubo de Lesk.

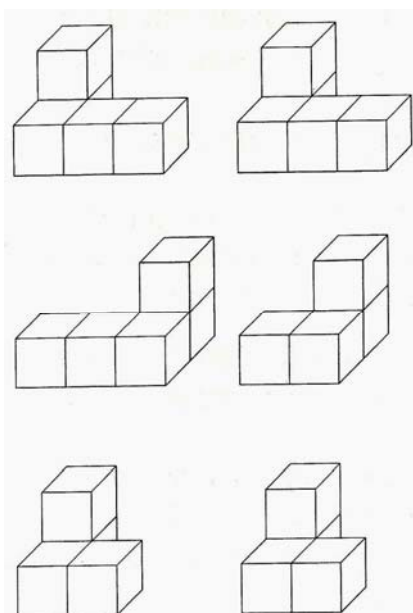
Cubo de Steinhaus



Cubo de O'Berine



Cubo de Lesk



4.5 Taller IV: Construcción de un Dodecaedro mediante Origami modular¹

El origami o papiroflexia es el arte de doblar papel para crear figuras que se puedan reconocer a la vista. Existen varios tipos de origami, siendo el modular el más adecuado para construir poliedros.

Descripción:

La idea de esta actividad es construir un poliedro, o mejor dicho, el contorno de éste, empleando módulos o matrices creados en origami para luego unirlos y formar las figuras propuestas.

Materiales:

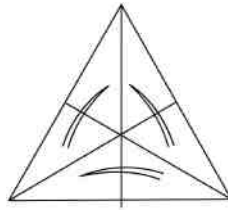
- Compás
- Regla
- Lápiz
- Cartonero
- Regla (en lo posible de metal)
- Pliegos de papel lustre de diferentes colores (opcional).

Construcción de la matriz:

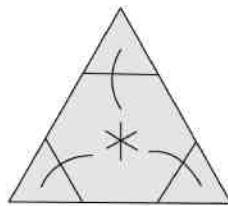
1. Para la matriz que usaremos, necesitamos dibujar un triángulo equilátero de lado 20 centímetros aproximadamente sobre un trozo de papel.
2. Una vez dibujado, se procede a cortar con la cartonera y la regla de metal, recuerda que la perfección es importante.
3. Ahora comienza el arte de doblar papel, llamado papiroflexia u origami.

¹ Seminario “Algunos tópicos de transformaciones geométricas y geometría fractal y aplicaciones para su aprendizaje a nivel sistema escolar”, UMCE, 2004.

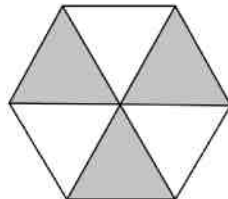
4. Marca el punto medio de cada lado de tu triángulo, luego dobla el papel por uno de estos puntos y el vértice opuesto a él, te darás cuenta que acabas de marcar la altura del triángulo, repite el paso con cada uno de los lados restantes.



5. Si te diste cuenta, las alturas se interceptan en un punto central. Lleva cada uno de los vértices del triángulo a ese punto, con lo que se determinaran tres líneas. Llamaremos *A* a la línea superior y *B*, *C* a las líneas inferiores.

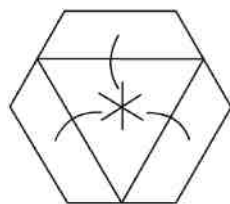


6. Luego dobla el papel y habrás formado un pentágono regular.

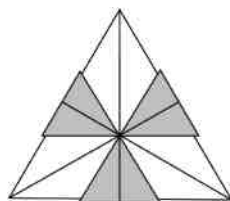


7. Ahora lleva los puntos medios del pentágono en color oscuro hacia el mismo punto central, hazlo uno por uno y con mucha precisión, recuerda que la perfección es importante.

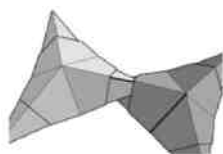
8. Desarma todos los dobleces, ahora estamos casi listos, sólo debes posar el punto medio de las líneas *A*, *B*, *C* respectivamente sobre el centro del triángulo, que es el mismo que el pentágono, de modo que se forme la siguiente figura.



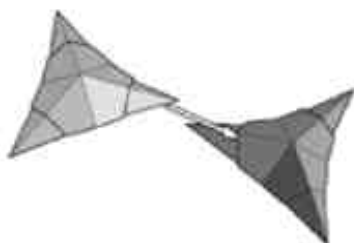
9. Luego dobla cada uno de los triángulos en color oscuro hacia dentro y pégalos con pegamento. La imagen muestra esta instancia por lo que la imagen esta al revés de cómo se verá.



10. A continuación la imagen de dos módulos se ensamblan.



Para la figura se requieren 20 módulos, que se ensamblan formando pentágonos, aprovechando las puntas de cada uno y las “bolsas” que se crean bajo cada una de ellas.



4.6 Taller V: Los Sólidos Platónicos y las Teselaciones de Escher.

Los Sólidos Platónicos han sido fuente de inspiración para muchos estudiosos, y no solamente de las matemáticas, sino, de áreas tan diversas como lo es el arte, ejemplo de esto es el holandés Escher quien realizó trabajos con estos poliedros y sus duales. También, realizó trabajos llamados teselaciones (mosaicos), donde los dibujos son periódicos y existen muchas simetrías entre ellos.

Descripción:

Considerando los diagramas para la construcción de los sólidos platónicos y algunos mosaicos de la obra del insigne dibujante holandés, es que se pretende crear el diagrama, sobre estos mosaicos. La idea es que cuando el poliedro este construido, el mosaico tenga continuidad sobre éste, es decir, no se sabrá donde empieza o termina.

Observación:

La continuidad del mosaico sobre el poliedro, esta limitada sólo a las figuras y no necesariamente sobre los colores.

El Tetraedro y los reptiles

Materiales:

- Tijeras o cartonero.
- Pegamento.
- Regla.
- Mosaico los Reptiles de Esher impreso.

Instrucciones:

1. Posa el mosaico sobre la mesa.
2. Considerando el diagrama del Tetraedro y las simetrías que el mosaico posee, analiza de qué forma puedes superponer el diagrama sobre éste, para que al construir la figura el dibujo tenga continuidad sobre el Sólido.
3. Una vez que hallas encontrado la superposición adecuada estas listo para armar tu Sólido Platónico teselado.



4.7 Taller VI: Teselando el Espacio

En cursos anteriores, hemos visto que con algunos polígonos regulares es posible teselar el plano, sin embargo, en el espacio también es posible hacer este tipo de aplicación, sólo basta ampliar nuestra imaginación.

Descripción:

Esta actividad esta guiada a teselar el espacio, usando combinaciones de poliedros. Las condiciones que deben tener los poliedros que se combinen para poder teselar son: aristas de igual medida, tener algún tipo de cara común, además de tener ángulos diedros con la posibilidad de combinarse para sumar 360° .

En la práctica los poliedros que se pueden combinar son el Tetraedro, Hexaedro, Octaedro y otros semiregulares derivados de ellos.

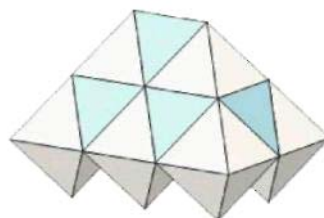
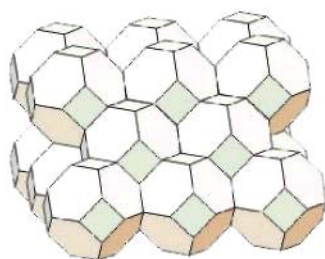
Materiales

- Diagramas para construir:
 - Tetraedro
 - Octaedro
 - Hexaedro
 - Tetraedro truncado
 - Cuboctaedro
 - Octaedro truncado.
- Tijeras.
- Regla.
- Pegamento
- Cartulina.

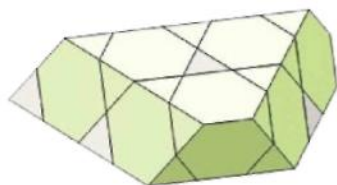
Instrucciones

1. Formar grupos de más de cuatro personas.
2. Cada grupo deberá construir todas las figuras antes mencionadas, cabe señalar que todos los grupos deben trabajar con los mismos diagramas.
3. Una vez contruidos los modelos, deberán combinarlos para determinar cuáles son los que teselan el espacio. ¿existe alguno que no necesite ser combinado para poder teselar el espacio?

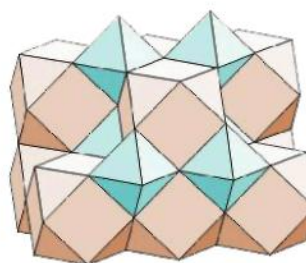
Octaedro - cuboctaedro tetraedro - tetraedrotruncado



Algunas soluciones a continuación.



tetraedro - octaedro



octaedro truncado

Como actividad se puede preguntar con cuáles tríos de poliedros se puede hacer este tipo de teselación.

4.8 Taller VII: Conociendo el Teorema de Euler

En esta actividad vamos a descubrir algo muy interesante, que se relaciona con los componentes de los cuerpos geométricos.

Descripción:

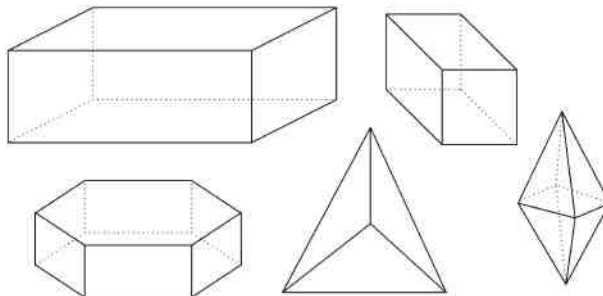
Deducir la fórmula de Euler para poliedros, mediante el uso de materiales comunes.

Materiales

- Muchas bombillas.
- Plasticina.
- Tijeras.

Instrucciones:

1. Con la plasticina y las bombillas armen las figuras que a continuación aparecen:



2. Elige 3 figuras y responde:

- ¿Cuántos pedazos de bombillas ocupaste?
 - Figura 1
 - Figura 2
 - Figura 3

- ¿Cuántas bolitas de plastilina usaste para unir las bombillas?
- Figura 1
- Figura 2
- Figura 3

- Las bombillas representan las:
- La plastilina representan las:

3. Averigua el nombre de las figuras:

- (a) _____
- (b) _____
- (c) _____
- (d) _____
- (e) _____
- (f) _____

4. Responde:

- a) Si supieras el número de caras y de vértices de un cuerpo geométrico, ¿cómo sabrías el número de aristas?
- b) Si tienes un Poliedro de 8 caras y 8 vértices, ¿cuántas aristas tiene?
- c) ¿Podrías inventar una fórmula para esta relación que haz ido descubriendo?
- d) Anótala y compárala con tus compañeros:

La persona que descubrió estas relaciones entre Aristas, Caras y Vértices se llamaba Euler, matemático del Siglo XVIII.

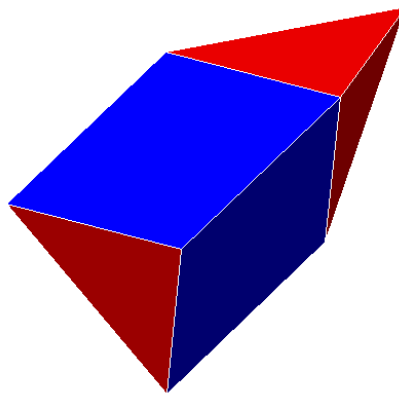
Ahora, compara la fórmula que descubriste con la que Euler descubrió:

Escribe tu fórmula	Fórmula de Euler
	$(\text{Caras} + \text{vértices}) - \text{Aristas} = 2$

4.9 TALLER VII: Creando un poliedro nuevo. ¿Será posible?

Descripción:

Tomaremos como base un sólido de Johnson, la Pirámide Triangular Elongada, que esta compuesta de tres cuadrados congruentes y cuatro triángulos equiláteros congruentes.



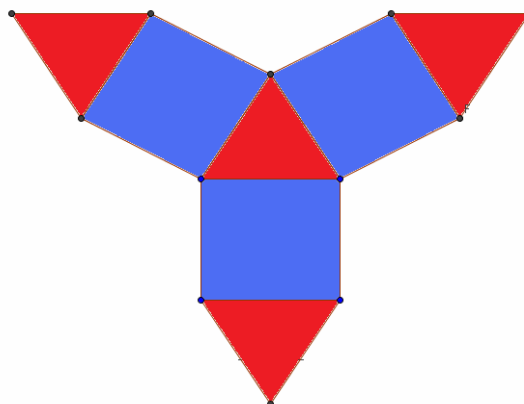
Lo que haremos será agregar algunas figuras más a la red de este sólido y observar qué obtenemos.

Materiales

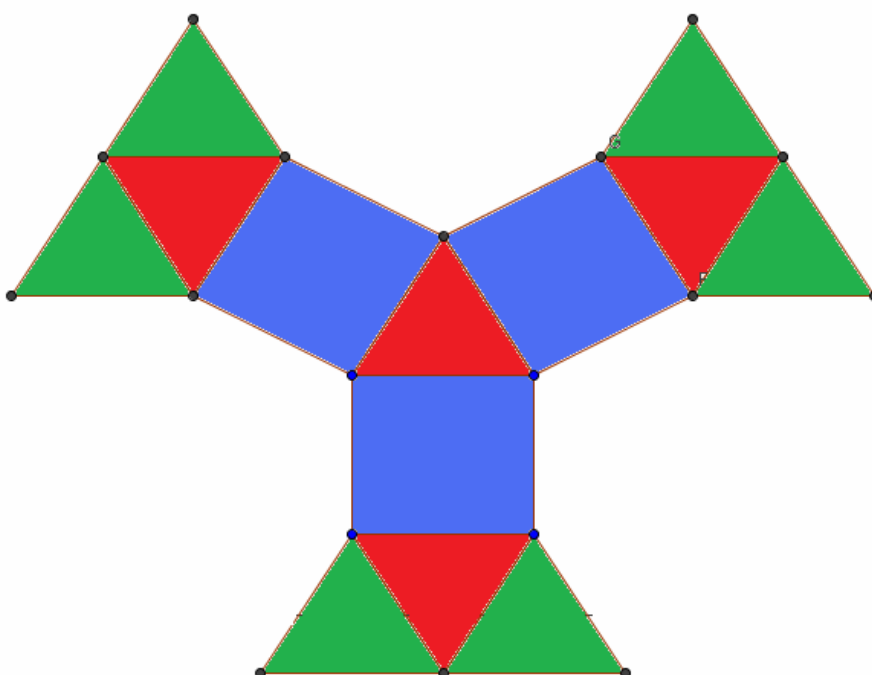
- Cartulina
- Regla
- Compás
- Pegamento

Instrucciones:

1. La red de la Pirámide Triangular Elongada es la siguiente:



2. Construiremos seis triángulos equiláteros congruentes con los de la red original, que agregaremos a los triángulos de los extremos de la siguiente manera:



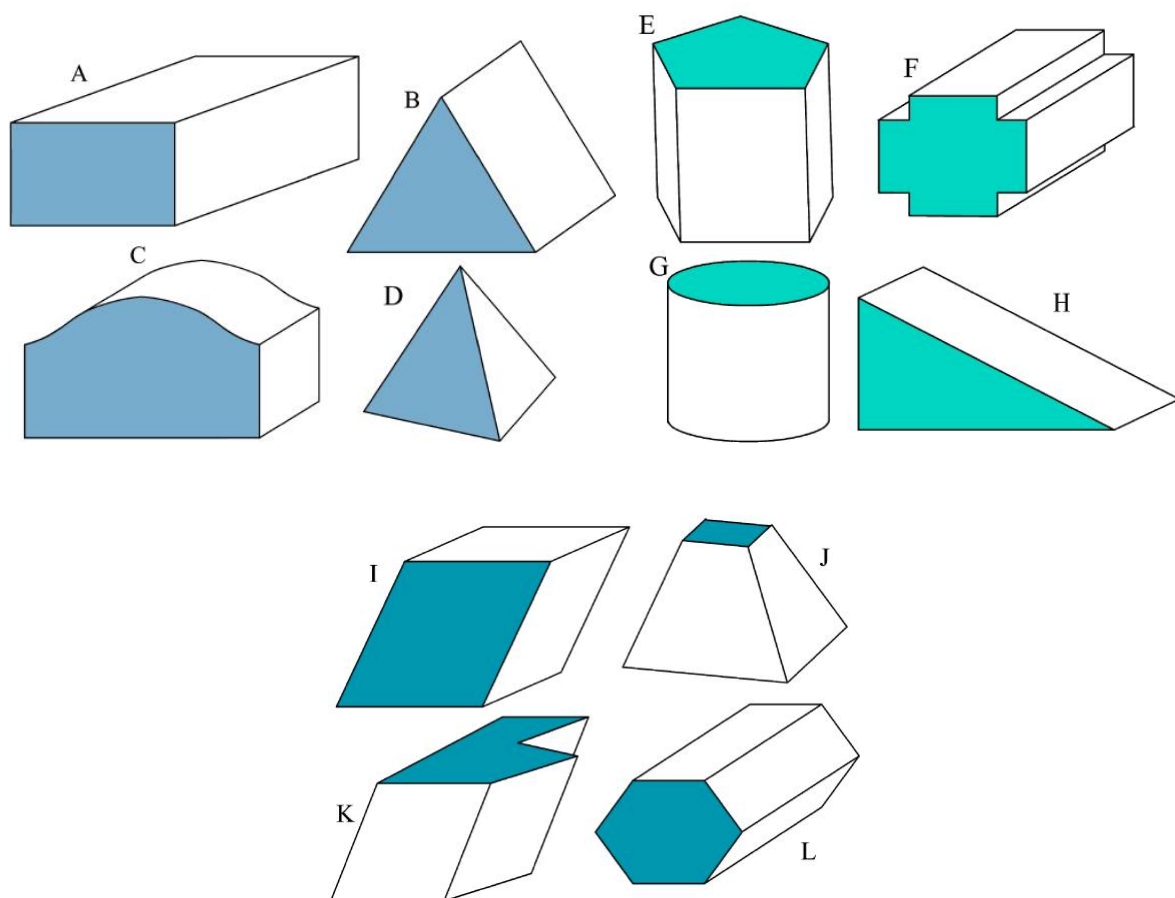
3. Luego, armamos el poliedro, colocando pestañas o aletas una por medio de los lados de conforman el perímetro de la red.

4.10 Ejercicios Enseñanza Básica

4.10.1 Actividad N° 1: Sobre prismas

Observa los siguientes cuerpos geométricos y teniendo en cuenta las definiciones entregadas en clase contesta a las siguientes preguntas:

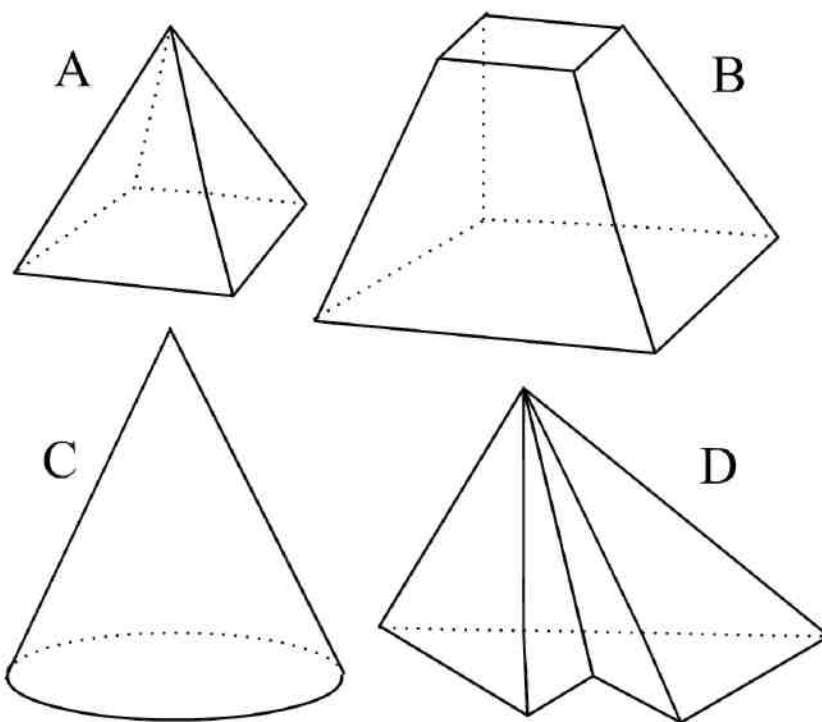
1. ¿Hay algún dibujo que no corresponda a un poliedro? Di cuáles y por qué.
2. ¿Hay algún poliedro que no sea un prisma? Di cuáles y por qué.
3. ¿Qué dibujos corresponden a prismas? Marca en el dibujo sus bases.
4. Señala qué prismas son rectos y cuales oblicuos. Di cuántas caras tiene cada uno.
5. ¿Hay algún paralelepípedo? Di cuáles y por qué. ¿Cuántas caras tienen?
6. ¿Hay alguno que sea un ortoedro? Di cuáles y por qué.
7. ¿Hay alguno que parezca un prisma regular? Di cuáles y por qué.
8. ¿Hay alguno que pueda considerarse, a la vez, recto y oblicuo?, ¿Qué tipo de prisma es?

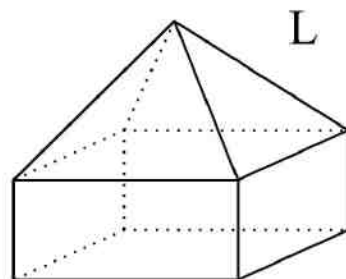
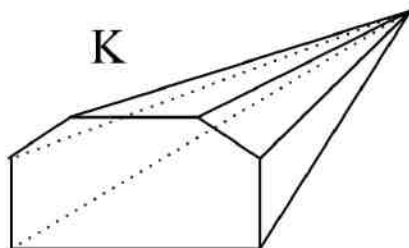
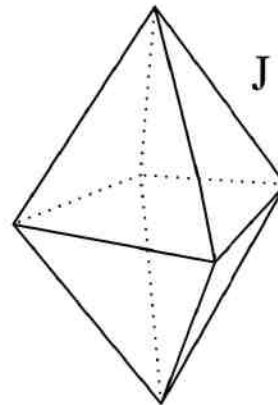
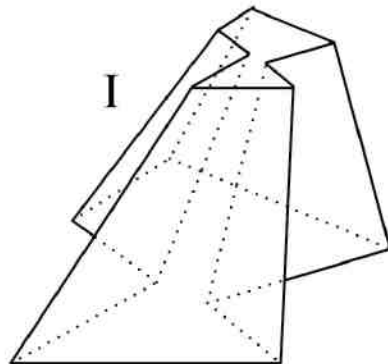
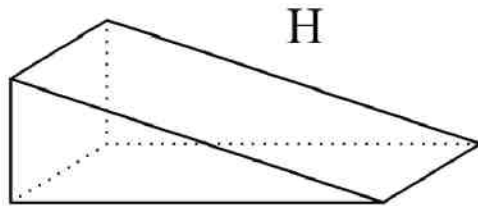
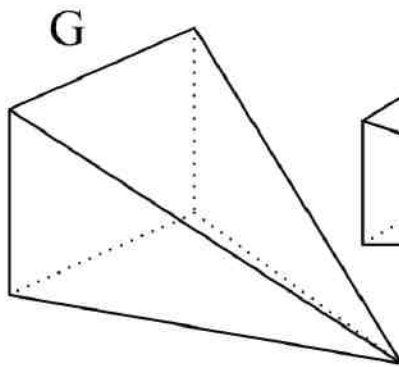
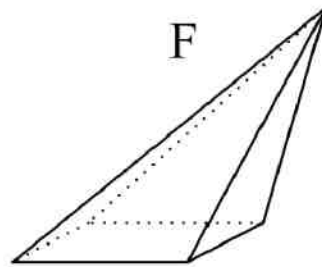
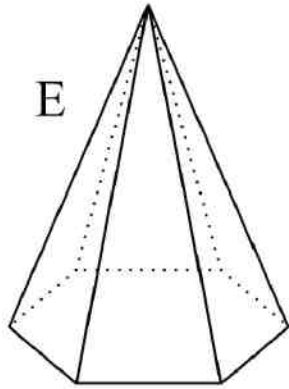


4.10.2 Actividad N° 2 Sobre Pirámides

Observa los siguientes cuerpos geométricos y teniendo en cuenta las definiciones entregadas en clase contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Hay algún dibujo que no corresponda a un poliedro? Di cuáles y por qué.
2. ¿Hay algún poliedro que no sea una pirámide? Di cuáles y por qué.
3. ¿Qué dibujos corresponden a pirámides? Señala sus bases.
4. ¿Cuáles corresponden a troncos de pirámides?
5. Señala qué pirámides son rectas y cuales oblicuas.
6. ¿Hay alguna que parezca una pirámide regular? Di cuáles y por qué.





4.10.3 Actividad N° 3 Sobre volúmenes.

En esta actividad se pretende que los alumnos descubran las fórmulas que permiten calcular el volumen de un ortoedro (cubo, paralelepípedo) y el de los demás prismas rectos que pueden construirse por yuxtaposición de cubos.

Se juntan los alumnos en grupos de cuatro y se pide a cada grupo aproximadamente trescientos cubos de plástico o madera (depende de qué material los hallan fabricado) de un cm. de lado y se les indica que realicen las siguientes operaciones:

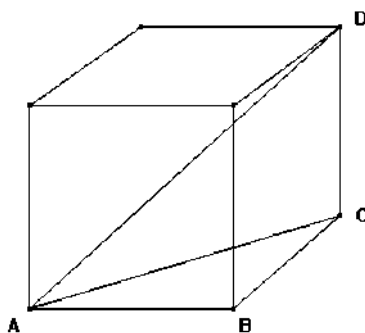
1. Construye un cubo de 2, 3, 4, 5 y 6 cm. de lado. Apunta en tu cuaderno cuál es el volumen en cm^3 de cada uno de ellos.
2. ¿Podrías decir sin construirlos, cuál es el volumen en cm^3 de los cubos de arista 10 cm. 12 cm. y 20 cm?
3. ¿Qué operaciones haz hecho en la pregunta anterior? ¿Podrías escribir una fórmula matemática que permita calcular el volumen de un cubo de lado L ?
4. Construye al menos cuatro ortoedros, todos ellos con sus tres dimensiones diferentes. Apunta en tu cuaderno las dimensiones de cada ortoedro y su volumen en cm^3 .
5. ¿Podrías decir sin construirlos, cuál es el volumen en cm^3 de los ortoedros de dimensiones: 5 x 6 x 10 cm. 8x7x9 cm. 12 x 15 x 20 cm.?
6. ¿Qué operaciones haz hecho en el apartado anterior? ¿Podrías escribir una fórmula matemática que permita calcular el volumen de un ortoedro de lados A , B , y C ?
7. Construye seis o más prismas que no sean ortoedros. Dibújalos en tu cuaderno anotando junto al dibujo de cada uno, los siguientes datos: Superficie de la base, en cm^2 . Altura del prisma, en cm. Volumen del prisma, en cm^3 .
8. Escribe en tu cuaderno una fórmula que nos permita calcular el volumen de un prisma sabiendo la superficie de su base y su altura. Comprueba que dicha fórmula sirve para cualquiera de los prismas que haz construido en esta actividad.

4.11 Ejercicios Enseñanza Media

4.11.1 Ejercicios Resueltos

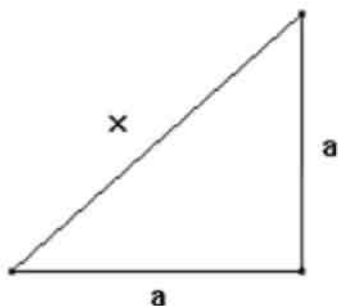
1. Determine la medida de la diagonal de un cuadrado cualquiera de arista “a”.

Observemos la siguiente figura:



El segmento AD es la diagonal que deseamos encontrar.

El segmento AC es la diagonal del cuadrado de la base del cubo, cuya medida podemos encontrar aplicando el teorema de Pitágoras.



En la figura, x es la diagonal del cuadrado, luego utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos:

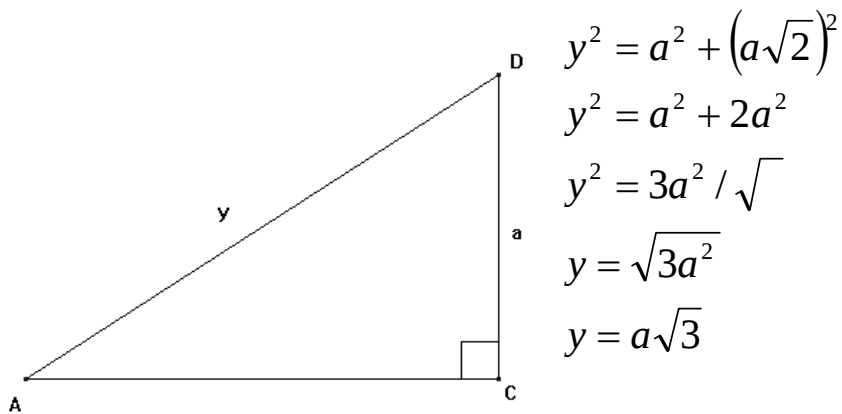
$$x^2 = a^2 + a^2$$

$$x^2 = 2a^2 / \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{2a^2}$$

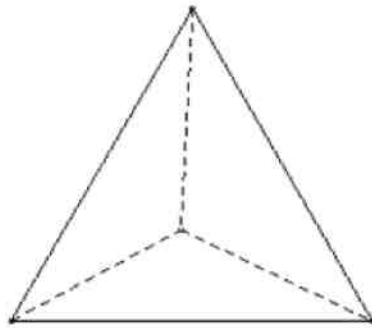
$$x = a\sqrt{2}$$

Tomemos, ahora, el triángulo $\triangle ACD$ recto en C. Como AC mide $a\sqrt{2}$, entonces, aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras, tenemos que:

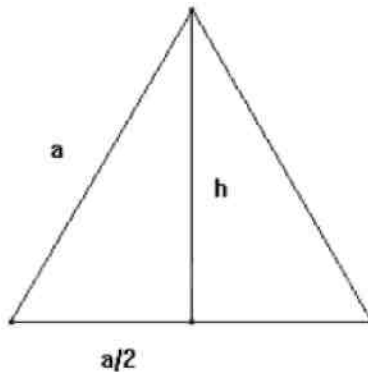


Luego, la diagonal de un cubo cualquiera cuya arista es “a” mide $a\sqrt{3}$.

2. Calcule el área de la superficie de un tetraedro, cuya arista mide “a” unidades.



Como ya hemos estudiado, los triángulos que forman el tetraedro son equiláteros y como queremos encontrar el área de la superficie debemos obtener en primer lugar el área de un triángulo equilátero de lado “a”.



Observemos la siguiente figura; Como sabemos, la altura del triángulo es también transversal de gravedad, entonces el segmento queda dividido en dos partes iguales. Luego, aplicando teorema de Pitágoras tenemos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 = h^2 / \sqrt{}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = h$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = h$$

Por lo tanto, podemos calcular el área del triángulo, así:

$$A = \frac{a \bullet \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Considerando que el tetraedro contiene 4 triángulos equiláteros, sólo basta amplificar el resultado anterior por 4, resultando:

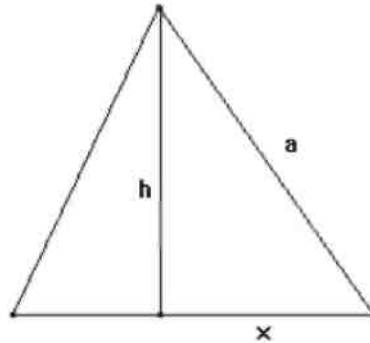
$$A = 4 \bullet \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = a^2\sqrt{3}$$

Luego, el área de la superficie de un tetraedro de arista “a” esta dado por la fórmula $a^2\sqrt{3}$.

3. Encuentre la altura de un tetraedro de arista “a”.

Observemos el siguiente corte lateral del tetraedro. Encontremos, en primer lugar la medida de x, que corresponde a una parte de la altura de un triángulo equilátero que hace como de base en la figura.



Como la altura de un equilátero y su ortocentro, proporciona el segmento en dos tercios y un tercio respectivamente, en este caso, los dos tercios de la altura equivalen al valor x, entonces tenemos:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Luego, el valor de x es igual a $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras con los valores obtenidos podemos encontrar la altura:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{3}$$

$$a^2 - \frac{a^2}{3} = h^2$$

$$\frac{2a^2}{3} = h^2 / \sqrt{\quad}$$

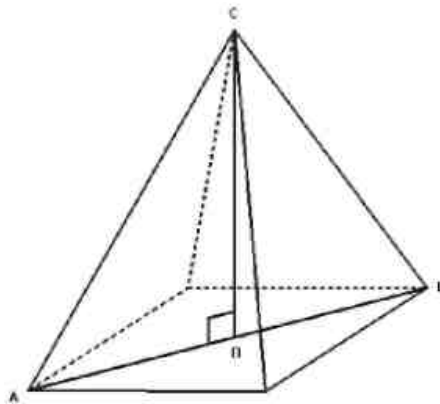
$$\sqrt{\frac{2a^2}{3}} = h$$

$$a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = h \Rightarrow h = a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Luego, la altura del tetraedro de arista “a” esta dada por la fórmula $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

4. Encontrar la medida de la diagonal de un octaedro de arista “a”.

Podemos distinguir que un octaedro es una dipirámide cuadrangular, por lo que podemos trazar la diagonal de un cuadrado de arista “a” que mide $a\sqrt{2}$.



Observemos que AD es diagonal, B es punto medio y forma con C la altura de la pirámide que viene a ser la mitad de la diagonal del octaedro.

Luego, AB mide $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ y AC mide “a”, posteriormente aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$$

Despejando

$$a^2 - \frac{a^2}{2} = h^2$$

$$\frac{a^2}{2} = h^2 / \sqrt{\quad}$$

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{racionalizando} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Posteriormente, amplificando por 2 el valor de h tenemos que la medida de la diagonal del octaedro es $a\sqrt{2}$.

Por lo tanto, podemos deducir que no importa sobre qué cara el octaedro este apoyado, siempre habrá un cuadrado imaginario en todas las posiciones, por lo que comprobamos que la diagonal de un cuadrado de lado “a” es igual a la diagonal de un octaedro de arista “a”.

5. Encuentre el área de los siguientes cuerpos regulares.

(a) Un tetraedro de arista 4 *cm*.

Solución: Sabemos que el área de un tetraedro esta dado por $a^2\sqrt{3}$, reemplazando “a” por 4 tenemos:

$$A = 4^2\sqrt{3}$$

$$A = 16\sqrt{3}$$

Luego, el área de un tetraedro es $16\sqrt{3}cm^2$

(b) Un octaedro de arista 10 *cm*.

Solución: Sabemos que el área de un octaedro esta dado por $2a^2\sqrt{3}$, reemplazando “a” por 10 tenemos:

$$A = 2 \bullet 10^2\sqrt{3}$$

$$A = 2 \bullet 100\sqrt{3}$$

$$A = 200\sqrt{3}$$

Luego, el área de un octaedro es $200\sqrt{3}cm^2$

(c) Un dodecaedro de arista 6 *cm*.

Solución: Sabemos que el área de un dodecaedro esta dado por $3\sqrt{25+19\sqrt{5}}a^2$, reemplazando “a” por 6 tenemos:

$$A = 3 \bullet 6^2\sqrt{25+19\sqrt{5}}$$

$$A = 3 \bullet 36\sqrt{25+19\sqrt{5}}$$

$$A = 108\sqrt{25+19\sqrt{5}}$$

Luego, el área del dodecaedro es $108\sqrt{25+19\sqrt{5}}cm^2$

(d) Un Icosaedro de arista 5 *cm*.

Solución: Sabemos que el área de un icosaedro esta dado por $5a^2\sqrt{3}$, reemplazando “a” por 5 tenemos:

$$A = 5 \bullet 5^2 \sqrt{3}$$

$$A = 5^3 \sqrt{3}$$

$$A = 125\sqrt{3}$$

Luego, el área del icosaedro es $125\sqrt{3}cm^2$

6. Encuentre el volumen de los siguientes cuerpos regulares.

(a) Un tetraedro de arista 4 *cm*.

Solución: Sabemos, que el volumen de un tetraedro esta dado por $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, reemplazando “a” por 4 tenemos:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \bullet 4^3$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \bullet 64$$

$$V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

Luego, el volumen del tetraedro es $\frac{16\sqrt{2}}{3}cm^3$

(b) Un octaedro de arista 9 *cm*.

Solución: Sabemos que el volumen del octaedro esta dado por $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$, reemplazando “a” por 9 tenemos:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \bullet 9^3$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \bullet 729$$

$$V = 81\sqrt{2}$$

Luego, el volumen del octaedro es $81\sqrt{2}cm^3$

(c) Un dodecaedro de arista 8 cm.

Solución: Sabemos que el volumen del dodecaedro esta dado por $\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$,

reemplazando “a” por 8 tenemos:

$$V = \frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4} \bullet 8^3$$

$$V = \frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4} \bullet 512$$

$$V = 128\sqrt{15+7\sqrt{5}}$$

Luego, el volumen del dodecaedro es $128\sqrt{15+7\sqrt{5}}cm^3$

(d) Un icosaedro de arista 3 cm.

Solución: sabemos que el volumen del icosaedro esta dado por $\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$,

reemplazando “a” por 3, tenemos:

$$V = \frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12} \cdot 3^3$$

$$V = \frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12} \cdot 27$$

$$V = \frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4} \cdot 9$$

$$V = \frac{45\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4}$$

Luego, el volumen del icosaedro es $\frac{45\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4} cm^3$

4.11.2 Guía N° 1

1. Las tres aristas que concurren en los vértices de un ortoedro miden 8, 10 y 12 cm. Calcular la longitud de la diagonal.
2. Hallar la longitud de la arista de un cubo, sabiendo que su diagonal mide 15 cm.
3. La diagonal de una cara de un cubo mide $4\sqrt{2}$ cm. Hallar la diagonal del cubo.
4. Hallar la apotema de una pirámide hexagonal regular de 6 cm. de lado de la base y 15 cm. de altura.
5. Calcular la altura del tetraedro regular en función de su arista.
6. Hallar la arista lateral de una pirámide regular de base cuadrada de 12 cm. de altura, sabiendo que el lado de la base es los $\frac{2}{3}$ de la altura.
7. Una pirámide regular de 13 mm. de altura tiene 338 mm² de área de su base. Si se corta por un plano paralelo a la base distante 6 mm. del vértice. Hallar el área de esta sección.
8. Una pirámide regular de base cuadrada tiene 18 cm. de altura y 9 cm. de lado de la base. Si se corta por un plano distante 12 cm. de la base, hallar el lado de la sección producida.
9. A qué distancia del vértice deberá cortarse una pirámide regular de 15 cm. de altura para que el área de la sección producida sea los 3 del área de la base de la pirámide.
10. Dos secciones hechas a una pirámide hexagonal regular por planos paralelos que cortan a todas las aristas laterales tienen 48 cm² y 12 cm², respectivamente. Si la distancia entre ellas es de 4 cm., hallar la distancia de la sección menor al vértice.
11. Hallar el área lateral y total de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base mide 6 cm. y la arista lateral 24 cm.
12. Hallar el área total de un ortoedro de 14 cm. de largo, 8 cm. de ancho y 6 cm. de alto.
13. Hallar el área de un cubo de 4 m. de arista.
14. Hallar la arista de un cubo cuya área es igual a 216 cm².

4.11.3 Guía N° 2

1. La diagonal de un cubo mide 12 mm. Hallar su área.
2. Hallar el área lateral y total de un prisma recto que tiene por base un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 25 cm. y uno de los catetos 7 cm., siendo la altura del prisma igual a 30 cm.
3. Hallar el área total de un prisma triangular regular cuya base tiene 8 pulgadas de lado y la altura del prisma es igual a 17 pulgadas.
4. Hallar el área lateral de un prisma hexagonal regular cuya apotema de la base mide 5 3 m. y la altura del prisma 14 m.
5. Hallar el área lateral y total de un ortoedro cuya base tiene 8 cm. de largo por 2,5 cm. de ancho y su altura 10 cm.
6. Hallar el área lateral y total de un cubo de 5 cm. de arista.
7. Hallar el área lateral y total de un prisma regular cuya base tiene 2 cm. de lado y la altura del prisma 12 cm.
8. Hallar el área total de un cubo cuya diagonal mide 6 cm.
9. Hallar el área de un octaedro de 4m. de arista.
10. Expresar el área de un icosaedro en función de su arista "a".
11. Hallar el área lateral de una pirámide pentagonal regular cuya base tiene 3 cm. de lado y la apotema de la pirámide mide 12 cm.
12. Hallar el área lateral y total de un tetraedro regular de 6 cm. de arista.
13. Hallar el área total de una pirámide cuadrangular regular cuyo lado de la base mide 4 cm. y cuya altura tiene 10 cm.
14. La altura de una pirámide hexagonal regular mide 24 m. y el lado de la base 10 m. Hallar su área total.
15. Hallar el área total de una pirámide hexagonal regular cuya apotema de la base mide 6 cm. y la arista lateral 12 cm.
16. Una pirámide hexagonal regular cuyo lado de la base mide 6 cm. y la altura 15 cm. se ha cortado por un plano paralelo a la base distante 9 cm. del vértice. Hallar el área lateral y total del tronco de pirámide así determinado.

4.11.4 Guía N° 3

1. Una pirámide triangular regular cuyo lado de la base tiene 3 cm. Si la apotema de la pirámide mide 12 cm.; hallar la superficie total de la pirámide y del tronco obtenido.
2. Sobre una de las bases de un prisma hexagonal regular de 12 cm. de lado de la base y 3 cm. de altura se ha construido una pirámide
3. Sobre la base menor de un tronco de pirámide cuadrangular regular de 5 m. de altura se construyó un ortoedro de 4 m. de arista lateral. Hallar el área total del cuerpo formado, sabiendo que los lados de las bases del tronco miden 6 y 2 m., respectivamente.
4. Hallar el volumen del ortoedro cuyas dimensiones son 8, 6 y 4 cm. respectivamente.
5. La diagonal de un cubo mide 6 cm. Hallar su volumen.
6. El área total de un cubo es 96 cm². Hallar su volumen.
7. Expresar el volumen de un cubo en función de su diagonal "d".
8. Hallar el área total de un cubo equivalente a un ortoedro de 18 cm. de largo, 16 cm. de ancho y 6 cm. de alto.
9. ¿Cuántos metros cúbicos de hormigón serán necesarios para construir un pozo de forma cúbica con capacidad para 8.000 litros de agua si las paredes han de tener 0,2 metros de grueso y el fondo 0,12 m.?
10. Un ortoedro tiene 12 pulgadas de largo y su ancho y alto están en la relación de 4:3. Hallar su área total, sabiendo que tiene 576 pulgadas cúbicas de volumen.
11. Hallar el volumen de un prisma triangular regular cuyo lado de la base mide 6 cm. y la altura del prisma 12 cm.
12. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm. y 8 cm., respectivamente. Hallar el volumen del prisma, sabiendo que su arista lateral mide 20 cm.
13. Hallar el volumen de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base mide 4 cm. y la arista lateral 10 cm.
14. Hallar el área total de un prisma triangular regular cuyo volumen es igual a $8\sqrt{3}$ cm³ y el lado de la base 2 cm.

15. Hallar el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de 5 cm. de radio y cuya altura es doble del lado de la base.
16. Hallar el volumen de una pirámide regular cuya base es un triángulo equilátero de 8 cm. de lado y la altura de la pirámide mide 24 cm.
17. Hallar el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 4 m. de lado y la arista lateral mide 12 cm.
18. El área lateral de una pirámide cuadrangular regular es $36\sqrt{17}$ m² y el lado de la base mide 6 m. Hallar el volumen de la pirámide.
19. La base de una pirámide es un triángulo equilátero de 4 m. de lado y las aristas laterales miden 3, 5 y 5 m., respectivamente. Hallar el volumen de la pirámide.
20. La arista lateral de una pirámide hexagonal regular mide 26 cm. y el lado de la base 10 cm. Hallar su volumen.

4.11.5 Ejercicios con Sólidos Platónicos

1. El icosaedro: El icosaedro es un poliedro regular con caras en forma de triángulos equiláteros y donde todos los vértices reciben 5 aristas. ¿En cuántas pirámides triangulares se podría descomponer un icosaedro?
2. El octaedro: El octaedro es un poliedro regular con caras en forma de triángulos equiláteros y donde todos los vértices reciben cuatro aristas. También, es una bipirámide, al poderse obtener uniendo dos pirámides regulares de base cuadrada por sus bases. ¿Qué volumen tiene el octaedro de arista L ?
3. El dodecaedro: El dodecaedro es el poliedro regular con las 12 caras en forma de pentágonos regulares y donde todos los vértices reciben tres aristas. ¿Podría existir un poliedro convexo con caras pentagonales regulares pero con menos de 12 caras?
4. Icosaedro y dodecaedro: Los centros de las caras de un icosaedro determinan un dodecaedro y los centros de las caras de un dodecaedro determinan un icosaedro, por ello icosaedro y dodecaedro son duales entre sí. Esto hace que las dos figuras tengan los mismos elementos de simetría. Mirando las simetrías, ¿en cuántos grupos duales entre sí, se pueden agrupar los 5 poliedros regulares?
5. El tetraedro: Cuatro puntos no coplanarios en el espacio determinan un tetraedro y sus cuatro caras cierran una porción del espacio. Todo tetraedro es una pirámide triangular y es regular si sus caras son triángulos equiláteros. Al arrojar tetraedros sobre una superficie plana, una punta siempre queda hacia arriba. ¿Conoces situaciones de la vida cotidiana donde se usa este principio?

6. El cubo: El cubo es el poliedro regular con todas las caras cuadradas. Es un prisma perfecto, que repetido y posicionado ordenadamente, llena el espacio, además se puede descomponer en seis pirámides de base cuadrada desde su centro. ¿Cuánto mide la diagonal de un cubo de arista L ?, ¿Qué pendiente tiene?

7. Poliedros regulares: Los poliedros regulares son poliedros convexos con todas las caras idénticas que son polígonos regulares y con todos los vértices recibiendo el mismo número de aristas. Sólo existen 5 tipos de poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro. ¿Por qué hay sólo 5 tipos de poliedros regulares?

8. Cubo y octaedro: Los centros de las caras de un cubo determinan un octaedro y los centros de las caras de un octaedro determinan un cubo, por ello cubo y octaedro son duales. Esto hace que las dos figuras tengan los mismos elementos de simetría. ¿Cuántos planos de simetría tiene un cubo?

4.11.6 Actividades con otros sólidos

1. Poliedros de Catalán:

A partir de los centros de las caras de los poliedros semiregulares o de Arquímedes, nacen los poliedros de Catalán.

¿Qué se obtiene al unir los centros de las caras de un prisma regular?

2. Poliedros semiregulares:

Los poliedros semiregulares o de Arquímedes son convexos, tienen por caras polígonos regulares y todo vértice recibe el mismo número de aristas.

¿Por qué polígonos esta formada la pelota de fútbol?, ¿Qué tipo de poliedro es?

3. Los Antiprismas:

Los antiprismas son poliedros convexos con dos bases que son polígonos iguales y paralelos, pero girados de forma que cada vértice de una base se une con los dos vértices correspondientes al de la otra base, quedando en todas las caras laterales triángulos. Los regulares tienen bases regulares y caras laterales triángulos equiláteros. Si las bases de un antiprisma tienen n lados, ¿cuántas caras tiene el antiprisma?

4. Los Prismas:

Los prismas son poliedros convexos con dos caras poligonales paralelas e iguales llamadas bases y caras laterales llamadas paralelogramos. Un caso interesante, es el de prismas rectos con caras laterales rectangulares. Su volumen es el área de la base por la altura. ¿Cuántos prismas existen con todas las caras polígonas regulares?

5. Poliedros estrellados:

Las cuatro estrellas poliédricas regulares son; el pequeño dodecaedro estrellado, su dual llamado gran dodecaedro, el gran dodecaedro estrellado y su dual llamado gran icosaedro. ¿Cuántas caras tienen el pequeño y el gran dodecaedro estrellado?

6. Hexaminos y cubos:

Con seis cuadrados idénticos se pueden formar 36 hexaminos, donde cada cuadrado tiene como mínimo una arista en común con los otros cinco, pero sólo 11 hexaminos corresponden a los desarrollos planos de un cubo. Toma lápiz y papel y dibuja los 11 hexaminos-cubos.

7. Cajas semejantes:

Dos cajas son semejantes u homotéticas si las aristas correspondientes son proporcionales, lo que lleva a una coincidencia de una recta diagonal cuando las cajas tienen caras correspondientes paralelas y un vértice en común. Si una caja es semejante a otra y tiene volumen doble, ¿qué proporción habrá entre las aristas?

8. Teselado o Mosaico Espacial:

Los poliedros, que repetidos llenan completamente el espacio son el cubo, pirámides que unidas puedan formar cubos, cualquier paralelepípedo, el rombododecaedro y muchas otras combinaciones con más de dos tipos de poliedros. ¿Por qué cualquier prisma recto triangular permite formar un teselado?

9. Puzzle tetraédrico:

Los centros de las caras de un tetraedro determinan otro tetraedro llamado dual. Si desde el centro de un tetraedro regular descomponemos la figura en cuatro pirámides iguales podremos formar un didáctico rompecabezas. ¿Qué relación hay entre la altura del tetraedro y la de la pirámide del rompecabezas?

4.12 Recursos Tecnológicos

Para finalizar el presente texto es que se ha considerado abastecer al profesorado de instrumentos tecnológicos para complementar la calidad de las clases dentro del aula.

4.12.1 Actividad I: Diseño de Clase

En las siguientes planillas se diseñaron unas clases de acuerdo a las nuevas propuestas didácticas del Ministerio de Educación.

Lección 1: “Construir redes para armar cubos.”

Nivel: Quinto Básico Unidad: Cuerpos Geométricos

Aprendizajes Esperados:

- Reconocen diferentes redes para armar un cubo.
- Reconocen y exploran que existe una cantidad limitada de variaciones en la redes del cubo.

Objetivos de la Clase: Explorar mediante material concreto la construcción de la red de un cubo y modificarla para armar otras redes.

Contenidos: Construir redes para armar cubos.

Actividades Claves:

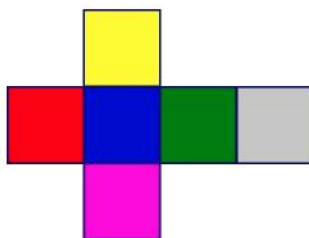
- Desarmar un cubo y colorear los cuadrados de la red.
- Analizar si existen posibilidades para modificar la red.
- Visualizar dichas posibilidades, bosquejándolas.
- Puesta en común.
- Síntesis junto con el profesor.

Momento de la clase	Narración de la Interacción	Materiales
Inicio	Se describe el objetivo de la clase. Se compara mediante un juego de lanzamientos: un cubo y un cilindro, para mostrar las propiedades del cubo. Dichas propiedades se van anotando en la pizarra. Se indica, a continuación, en qué consiste la actividad a realizar durante la clase, dando las instrucciones de formar grupos, donde cada grupo deberá encontrar la mayor cantidad de redes que los otros equipos.	
Desarrollo	El curso se divide en grupos de 4 alumnos, con un cubo por grupos, dado por el profesor. Los alumnos desarmen el cubo y exploran la red, coloreando las caras para diferenciarlas. Investigan qué posibles modificaciones pueden hacerse a la red del cubo, contestando además preguntas como: ¿Cuántos cuadrados conforman la red del cubo? ¿Qué cuadrado se pueden mover para hacer una nueva red? ¿Cuáles no se pueden mover? Cada grupo identifica las distintas redes posibles, armando y desarmando sus cubos, para luego realizar una puesta en común para indagar: ¿Quién consiguió la mayor cantidad de redes distintas? El grupo ganador, el que obtuvo la mayor cantidad de redes, expone su trabajo en el pizarrón. Además, cada grupo debe dar ejemplos de cubos en la vida cotidiana, a lo menos tres ejemplo.	Cartulina, Tijeras, Reglas, Hojas cuadriculadas , Papel lustre

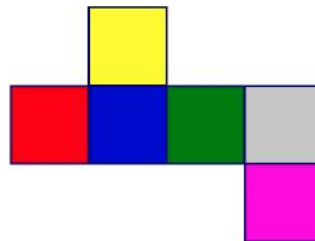
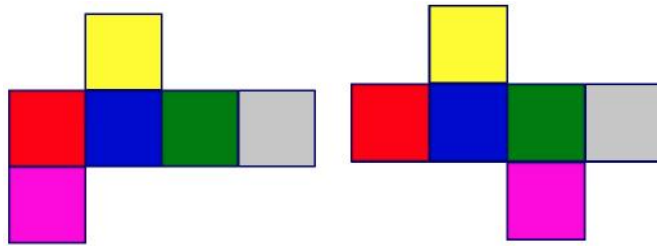
Cierre	El profesor revisa el trabajo de cada grupo, como el del grupo ganador y corrige posibles errores de repetición de estas mismas. Se hace el conteo y se analiza si faltan redes comparando con las de los otros grupos. Se formaliza: ¿Qué es una red de un cuerpo? ¿Cuántas redes en total tiene el cubo? ¿Por qué no son más? ¿Qué regularidades se observan en las distintas redes del cubo?	PowerPoint con diapositivas de todas las posibilidades de redes del cubo para la formalización.
--------	---	---

El propósito de esta actividad descrita anteriormente, radica en el descubrimiento por parte del alumno sobre las posibles redes del cubo. Por lo que es importante permitir al alumno un margen de error que contribuya de tal forma, que su aprendizaje logre significado al interactuar con lo concreto y a su vez con lo abstracto, en este caso, haciendo uso de recursos tecnológicos por medio del manejo del programa Cabri-Geometre o Geogebra, para facilitarle la visualización de las redes.

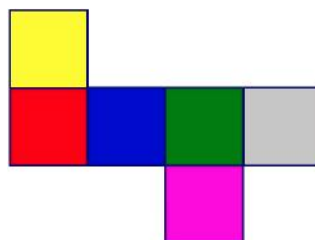
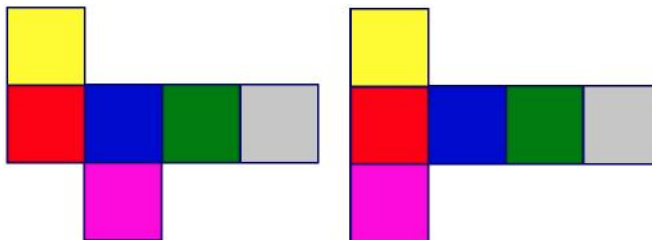
En dicho caso, presentamos el total de las redes indicando las condiciones que deben darse para que exista cada una de ellas. Red del cubo entregada al alumno



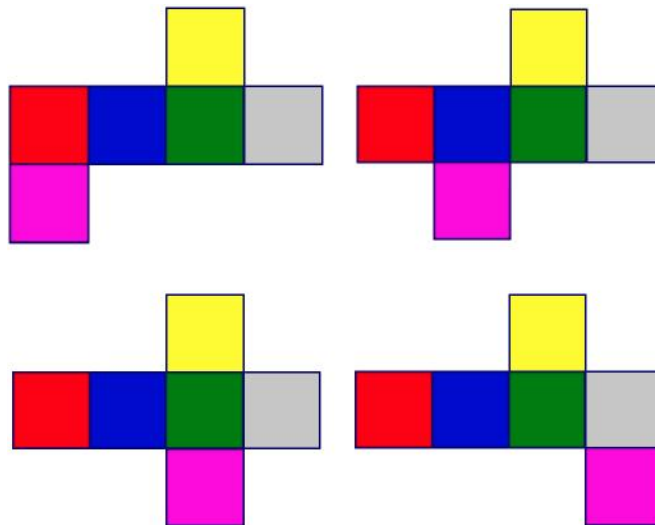
Dejando fijo el amarillo junto al azul y moviendo el fucsia obtenemos 4 redes distintas considerando la dada.



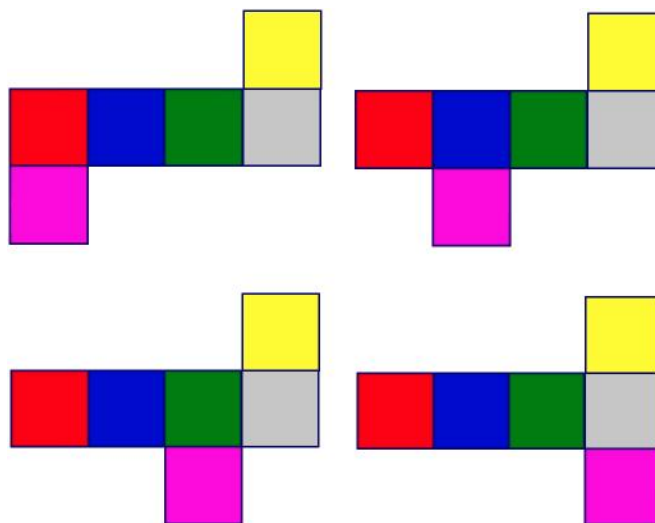
Moviendo el amarillo y fijándolo junto al rojo, movemos nuevamente el fucsia y obtenemos 4 redes más distintas.



Moviendo el amarillo y fijándolo junto al verde, movemos nuevamente el fucsia y obtenemos 4 redes más distintas.



Moviendo el amarillo y fijándolo junto al gris, movemos nuevamente el fucsia y obtenemos 4 redes más distintas.



Por lo tanto, podemos concluir que el número total de redes de un cubo son 16.

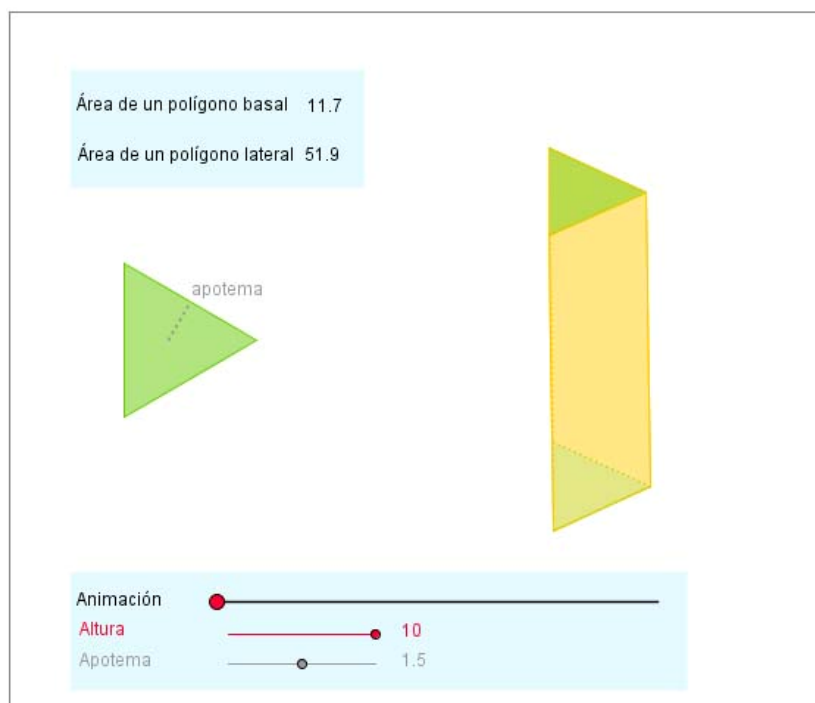
4.12.2 Actividad: Exploración de Recursos Digitales.

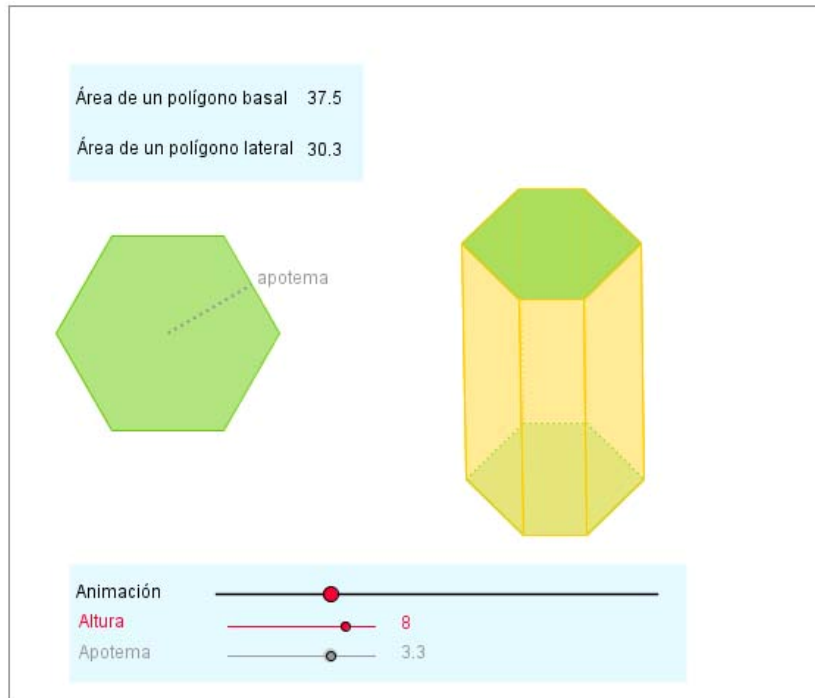
Para Educación Básica

A continuación encontrará una lista de 5 recursos digitales, los cuales el alumno deberá manipular y explorar. Estos recursos se encuentran en disponibles en CD adjunto. Para cada uno de ellos se entrega una breve descripción del recurso y qué tipo de recurso es (ppt, excel, applets, web, etc.), también el contenido asociado, las preguntas que podría realizar a sus alumnos al utilizarlo en el aula, y el momento de la clase en que podría aplicarlo, es decir al inicio, exploración, cierre o formalización.

Recurso I: Sobre prismas.

Descripción del recurso: Este applets permite visualizar y manipular distintos prismas, pudiéndose modificar el número de caras de la base, la altura del prisma y la medida del apotema. Además, entrega de forma automática el área del polígono basal y el lateral.





Contenido Asociado: Prismas rectos y áreas superficiales.

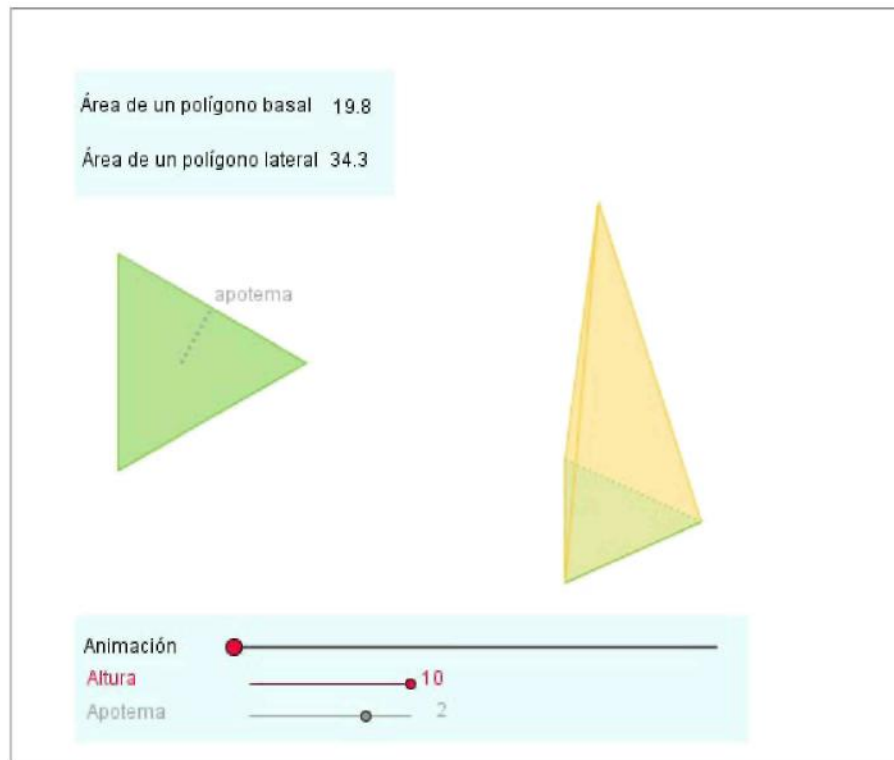
Se recomienda formar grupos de a lo más dos alumnos, realice las siguientes preguntas a sus alumnos para permitir la observación, investigación y descubrimiento de conceptos que usted después tendrá que formalizar antes de culminar la clase.

- ¿Qué sucede si movemos la barra Animación?
- ¿Qué sucede si movemos la barra altura?
- ¿Qué sucede si movemos la barra apotema?
- ¿Cuántos vértices tiene el prisma según los distintos tipos de prismas?
- ¿Cuántas caras tiene el prisma según los distintos tipos de prismas?

El momento de la clase donde se recomienda utilizar este applet es al cierre.

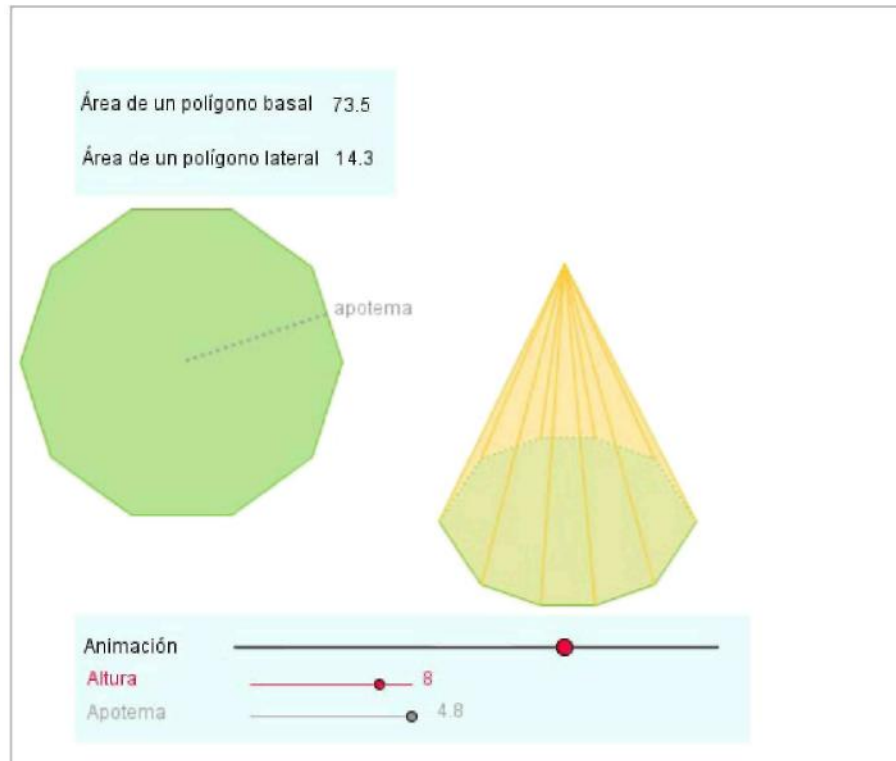
Recurso II: Sobre pirámides

Descripción del recurso: Este applet, al igual que el anterior, permite visualizar pirámides rectas, pudiéndose modificar el número de caras de la base, la altura y la medida del apotema. También, de forma automática, entrega el valor del área de la base y de las caras laterales.



Contenido asociado: Pirámides rectas y áreas superficiales.

Al igual que en el recurso anterior, se recomienda formar grupos de a lo más dos alumnos, puede realizar las siguientes preguntas a sus alumnos para permitir la observación, investigación y descubrimiento de conceptos que usted tendrá que formalizar antes de culminar la clase.



- ¿Qué sucede si movemos la barra Animación?
- ¿Qué sucede si movemos la barra altura?
- ¿Qué sucede si movemos la barra apotema?
- ¿Cuántos vértices tiene la pirámide según los distintos tipos?
- ¿Cuántas caras tiene la pirámide según los distintos tipos?

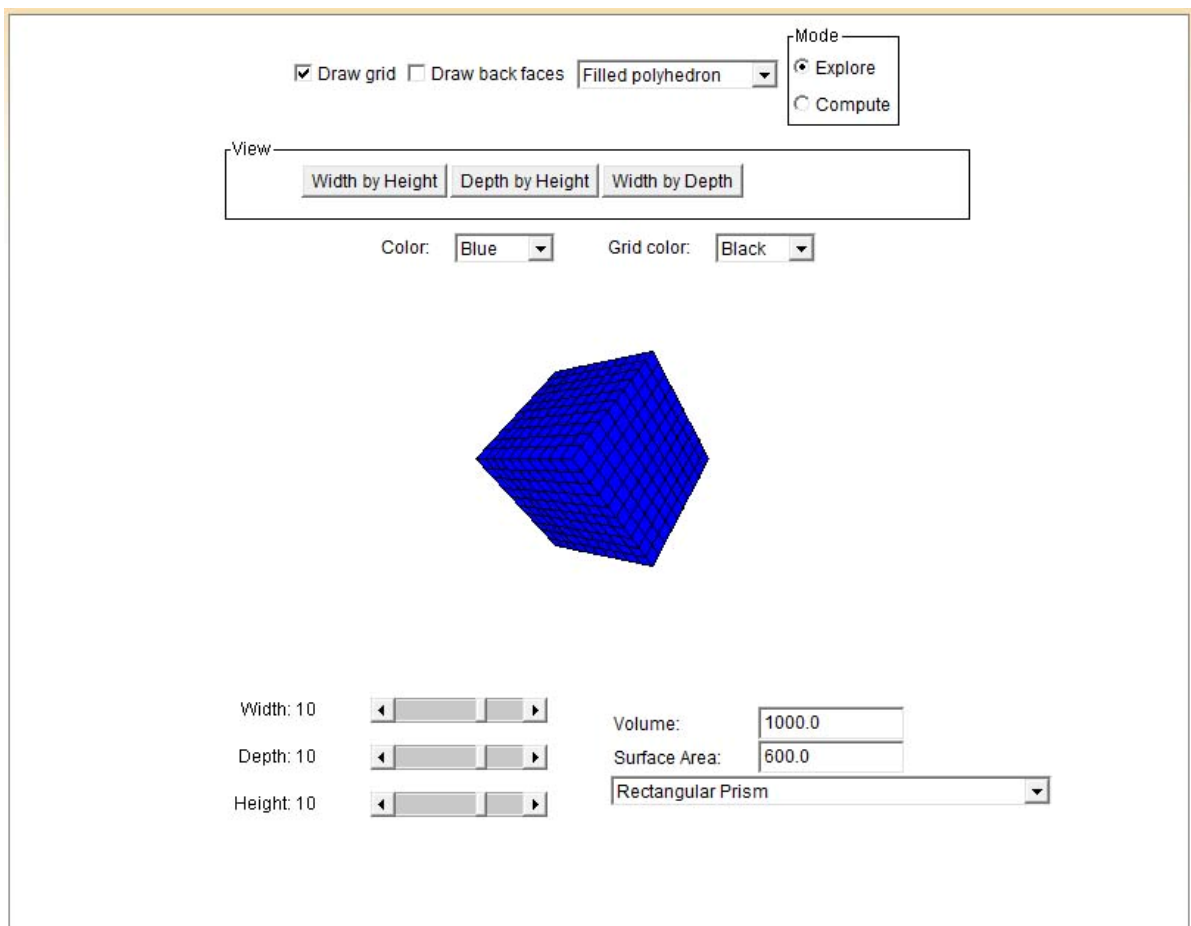
El momento de la clase donde se recomienda utilizar este applet es al cierre.

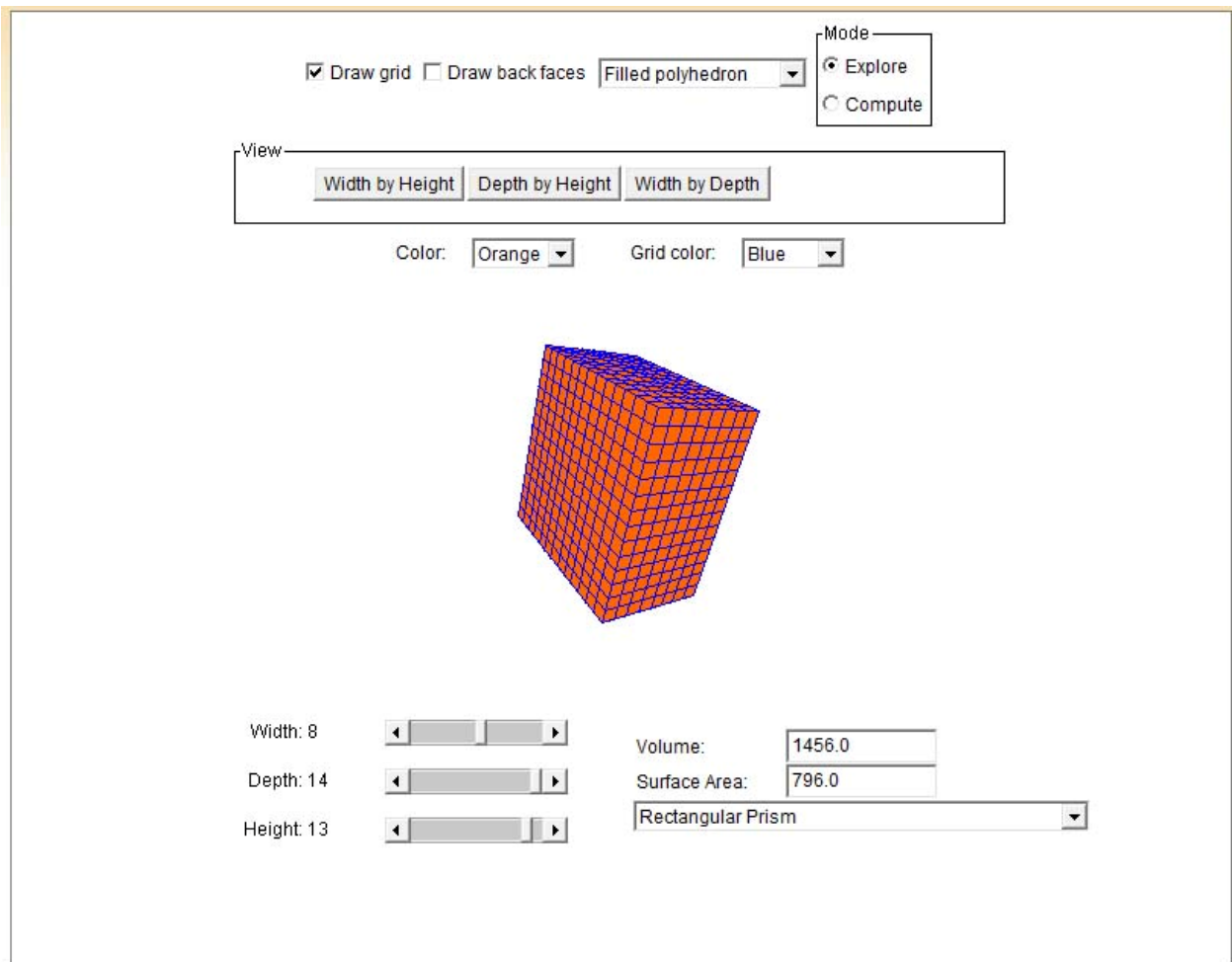
Recurso III: Área y volumen de un prisma.

Descripción del recurso: Este applet permite visualizar todo tipo de prisma, a pesar de que esta en inglés, es posible trabajar con él. Permite hacer bastantes modificaciones, como cambiar el color de fondo, color de líneas, las medidas de largo, ancho y alto, el tipo de base del prisma, además indica de forma inmediata el volumen y área de la superficie según corresponda.

Observación: este applet necesita conexión Internet.

Contenido asociado: Prismas rectos de base rectangular y triangular: áreas y volúmenes.





Se recomienda formar grupos de a lo más dos alumnos, y se sugiere realizar las siguientes preguntas a sus alumnos para permitir la observación, investigación y descubrimiento de conceptos, que como antes, usted tendrá que formalizar antes de culminar la clase.

- ¿Qué sucede si modificamos el largo o el ancho o el alto del prisma?
- ¿Qué sucede al hacer clic sobre el prisma y sin soltar movemos el Mouse?
- ¿Puedes cambiar el color del prisma?
- ¿Cómo es la cara lateral?
- ¿Qué valor del volumen tiene un prisma de largo 10, ancho 12 y alto 14?

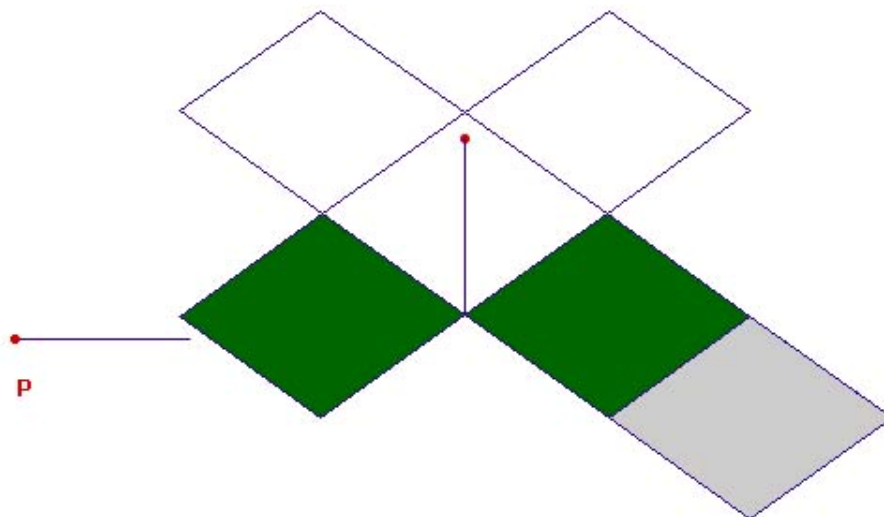
El momento de la clase donde se recomienda utilizar este applet es durante la exploración y al comenzar el desarrollo.

Recurso IV: Paralelepípedo recto de base rectangular.

Descripción del recurso: Este applet nos invita a visualizar cómo a partir de la red de un prisma de base rectangular podemos armarlo. Se puede modificar la altura del prisma, deslizando el punto rojo dentro del prisma. Al desplazar el punto P, en la línea horizontal a la izquierda del prisma, nos permite animar el armado del prisma.

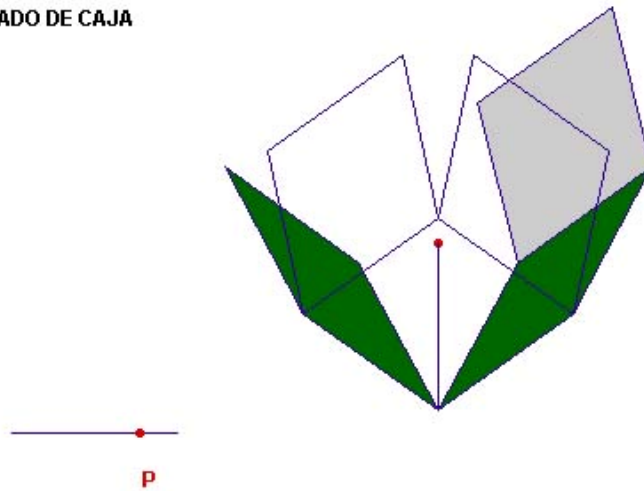
Contenido asociado: Armado de redes de prismas.

ARMADO DE CAJA

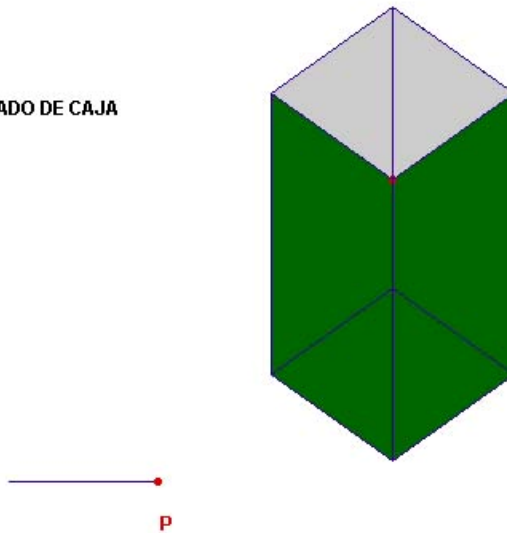


Se recomienda formar grupos de a lo más dos alumnos, y realizar las siguientes preguntas para permitir la observación, investigación y descubrimiento de los alumnos, de conceptos que usted tendrá que formalizar antes de culminar la clase.

ARMADO DE CAJA



ARMADO DE CAJA



- ¿Qué sucede si mueves en la barra el punto P?
- ¿Qué sucede si mueves el punto rojo sobre el prisma?
- ¿Qué prismas se pueden construir al mover el punto en la figura?
- ¿A qué elemento del prisma se puede relacionar con el segmento que contiene al punto rojo de la figura?

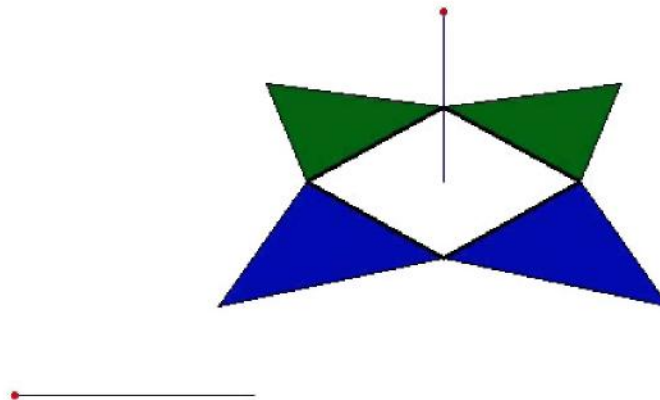
El momento de la clase donde se recomienda utilizar este applet es durante la exploración y al comenzar el desarrollo.

Recurso V: Pirámide de base cuadrada.

Descripción del recurso: de igual forma que el anterior, este applet permite visualizar el armado de una pirámide de base cuadrada a partir de su red. Si desplazamos el punto rojo sobre la red de la pirámide podemos modificar la altura de la pirámide. Si desplazamos el punto rojo sobre la línea horizontal se anima el armado de la pirámide.

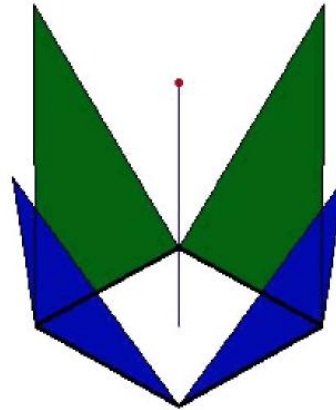
Contenido asociado: Armado de redes de pirámides.

ARMADO DE PIRÁMIDE

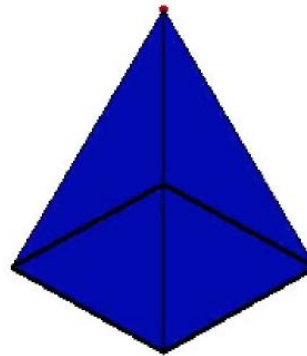


Se recomienda formar grupos de a lo más dos alumnos, realizar las siguientes preguntas a sus alumnos para permitir la observación, investigación y descubrimiento de conceptos que usted tendría que formalizar antes de culminar la clase.

ARMADO DE PIRÁMIDE



ARMADO DE PIRÁMIDE



- ¿Qué sucede si mueves en la barra el punto P?
- ¿Qué sucede si mueves el punto rojo sobre el prisma?
- ¿A qué elemento de la pirámide se puede relacionar al segmento que contiene al punto rojo de la figura?

El momento de la clase donde se recomienda utilizar este applet es durante la exploración y al comenzar el desarrollo.

4.12.3 Software para apoyo pedagógico en el aula

En nuestra búsqueda por encontrar apoyo para los docentes, encontramos algunos software que permiten el apoyo en aula para los profesores y alumnos en el marco de las TIC'S.

Dentro del área de las ciencias, aparte de cualquier enciclopedia virtual, como Encarta, hallamos un pequeño programa que facilita la entrega de conocimientos en química general, donde podemos encontrar parte de las propiedades de las moléculas que incluyen los poliedros.

A continuación, una breve descripción de software:

Texto Multimedia de Química General: Hacia la Química I

Autores: Rubén D. Osorio Giraldo, Aquilino Aubad López, Arcesio García Ruiz, Rubén E. Zapata Pérez, todos con magíster en ciencias.

Hacia la Química I es un texto electrónico de química general, diseñado para ofrecer a los alumnos y profesores para que la química básica sea una aplicada a la vida cotidiana, con características propias de un software multimedial. Escrito en ToolBook II ©, este texto consta de 20 capítulos (incluidas las prácticas de laboratorio), cada uno de los cuales contiene la combinación apropiada de texto, imágenes, audio, animaciones y gráficos que hagan posible el aprendizaje de los conceptos fundamentales de la química.

Objetivos del software

Diseñado como un texto electrónico, en el área de la química básica, para ser utilizado como guía y estímulo del aprendizaje de la química en el aula de clase.

Ofrece a los profesores y estudiantes de química general un texto de química diferente a los libros convencionales, que aprovecha todas las ventajas de los nuevos desarrollos tecnológicos aplicables a la creación de nuevos productos en el área de la informática educativa.

Permite evaluar el material entre los estudiantes y profesores de cuarto medio y primer semestre de universidad, para determinar su impacto en el aprendizaje de los conceptos básicos de la química.

Poly

Este software de geometría es una herramienta muy amigable, que permite tanto al profesor como al alumno, visualizar todos los poliedros conocidos y clasificados en tres dimensiones. Al interactuar con el programa, es posible ver sus redes, proyecciones de Schlegel, y rotarlos, animarlos para que pueda visualizar el proceso de armado y desarmado en distintas velocidades, de tal forma que se puede apreciar a cabalidad cada uno de los poliedros descritos en esta memoria.

Cabri y Geogebra.

Estos programas permiten toda clase de construcciones geométricas en el plano, son bastante amigables en su manejo, y no representa dificultades para el usuario.

Tessmania

Este programa realiza teselaciones del plano, permitiendo al alumno interactuar de forma entretenida con la geometría, considerando que su uso es de fácil manejo para el usuario, sólo se necesita creatividad, el resto lo hace el programa.

4.13 Páginas Web

A continuación se presentará una serie de páginas web asociadas al estudio de cuerpos geométricos. Esta exploración complementaria puede ayudar a encontrar recursos para sus diseños de clases.

Cuerpos geométricos y sus redes planas

- <http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/Divul/POLIEDROS/Imagenespoliedrales/sld002.htm>
- <http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/Divul/POLIEDROS/Imagenespoliedrales/sld003.htm>

En estas páginas encontrará algunos poliedros en trabajos de marquetería, en las obras de arte de Fray Giovanni da Verona.

- http://www.revilo-oliver.com/Kevin-Strom-personal/Art/Dali_CorpusHypercubus1954.jpg
- <http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/Divul/POLIEDROS/Imagenespoliedrales/sld005.htm>
- <http://jeannero.free.fr/Images/Salvador-Dali/Salvador-Dali-nu.jpg>
- <http://www.darc-o10.de/images/Dali.jpg>

En estas páginas encontrará algunos cuerpos en las obras de Salvador Dalí. En esta primera dirección encontrará la obra denominada “La crucifixión”, a continuación se encuentra “Cruz nuclear”, posteriormente “Dalí desnudo” y otras.

- <http://www.skylook.net/album/conj/con6.htm>
- <http://www.skylook.net/album/comet/habo/hab2.htm>
- <http://www.skylook.net/album/meteor/leo/leo2.htm>
- <http://www.skylook.net/album/comet/iz/iz2.htm>
- <http://www.skylook.net/album/eclip/sopa/spa2.htm>
- <http://www.skylook.net/album/eclip/luto/lto8.htm>
- <http://www.skylook.net/album/luna/fases/flu5.htm>

En estas páginas, más allá de los fenómenos naturales que se presentan, observe los cuerpos presentes en las estructuras que están alrededor del enfoque del fenómeno y encontrará distintos tipos de cuerpos en la realidad.

- <http://www.unex.es/tcorco/cilindros.html>
- <http://www.unex.es/tcorco/conos.html>
- <http://www.unex.es/tcorco/prismas.html>
- <http://www.unex.es/tcorco/ciudades.html>
- <http://www.segoviamint.org/images/segovia/alcazar.jpg>
- <http://www.spectra.it/images/strumenti/dodeca.jpg>

En estas páginas encontrará una serie de fotografías de cuerpos geométricos presentes en la realidad, clasificados de acuerdo a su forma.

• <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/poliedros/rosecentercubo.jpg>

Foto del Planetario de Nueva York

- <http://www.amejor.com/mates/poliedros/poliedros.html>

En este sitio encontrará una serie de cuerpos poliedros, características, sus respectivas redes planas y su presencia en el arte y en la historia.

- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1756#cubo
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1157
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1758
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1520#construccion
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1071

En estas páginas Web encontrará algunos elementos básicos pertenecientes a los cuerpos geométricos, características, poliedros regulares, redes planas y pasos a seguir en la construcción de estas, armado de pirámides y las áreas correspondiente al áreas de paralelepípedos y cilindros.

- <http://icarito.latercera.cl/icarito/1999/icaro/722/pag3.html>

Sitio perteneciente a la revista Icarito donde encontrará las redes planas de cuerpos poliedros como prismas y pirámides.

- <http://primates.ximian.com/~sandino/geoviva/3d.htm>

En este sitio encontrará un applet que muestra los cuerpos geométricos básicos. Estos pueden ser observados en forma sólida o sólo su contorno (aristas).

- <http://www.cs.mcgill.ca/~sqr/unfold/unfolding.html>

En este espacio se encuentra unos applets que permiten visualizar los poliedros regulares y otros cuerpos poliedros, además, de visualizar sus respectivas redes planas.

- <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2003/agosto/nosotros87.htm>

En este espacio se muestra la construcción de cuerpos poliedros mediante la técnica del origami.

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.

- <http://www.codelcoeduca.cl/divisiones/teniente/estudio/matematica2.html#redondos>

Espacio que entrega la idea de lo que es volumen, además de algunas definiciones de cuerpos geométricos básicos y un tabla de las fórmulas de volumen para estos cuerpos.

- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=979
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1863
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=3556
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1762
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1288
- http://www.tareasya.com/noticia.php?noticia_id=1249

Páginas web que muestran las nociones de las unidades de medida y conversión de unidades de capacidad (volumen). Aproximación intuitiva de volumen y cálculos de algunos cuerpos geométricos (cubo, prismas, pirámides y cilindro). Además de trabajo con el volumen del cubo, pirámide, esfera y cono.

- <http://icarito.latercera.cl/icarito/1999/icaro/722/pag5.html>
- <http://icarito.latercera.cl/icarito/1999/icaro/727/>

Sitio perteneciente a la revista Icarito donde encontrará las áreas de cuerpos poliedros. Además de información relacionada con los cuerpos redondos y el cálculo de sus respectivas áreas.

- http://www.edulat.com/2daetapa/matamaticas/temas_consulta/22.htm

Espacio web que muestra cómo calcular el volumen en los cuerpos geométricos básicos.

- http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Volumenes_d3/index.htm

Sitio que muestra en forma interactiva, mediante applet, el concepto de volumen, la relación de volumen entre cuerpos que cumplen con ciertas similitudes, el principio de Cavalieri, entre otras.

Poliedros Regulares

- <http://www.luventicus.org/articulos/03Tr001/index.html>

Sitio web perteneciente a Luventicus, donde encontrará información relacionada con los sólidos platónicos, una breve reseña histórica, características y un applet que permite visualizar los poliedros regulares.

- <http://www.luventicus.org/articulos/03GdA002/i.html>

Galería de arte Luventicus. Donde se presentan los cinco poliedros regulares con una pequeña descripción.

- http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Poliedros_regulares_d3/los_poliedros_regulares.htm

Página del sitio web Descartes donde muestra en forma interactiva, mediante un applet, los poliedros regulares y el por qué son sólo cinco, además de la regla de Euler.

- http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Poliedros_regulares_d3/index.htm

Sitio web Descartes donde se encuentran algunos conceptos básicos de los poliedros regulares mostrando una descripción del cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, la cantidad de caras aristas y vértices, además del significado que dio Platón a cada uno de los cuerpos geométricos regulares y un acercamiento a la esfera.

- <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/maticas/materiales/4eso/geometria/poliedros/poliedros.htm>

Espacio que muestra las características de los poliedros regulares, la regla de Euler, redes planas, áreas y volumen para estos cuerpos.

Conclusiones

El estudio realizado durante esta memoria, que ya comenzamos a terminar, nos ha mostrado un campo totalmente moderno para nosotros. Entrelazar nuestra área matemática con otras formas de cultura, ciencias, tecnología y artes, nos permite una visión más amplia y contextualizada de los poliedros en la vida cotidiana. Por ello, consideramos alcanzado uno de los objetivos generales de la memoria, en cuanto a la vinculación entre lo abstracto y lo concreto.

Cuando nos propusimos como objetivo elaborar un marco teórico que abarque el desarrollo histórico matemático de los poliedros, pensamos que sería difícil de lograr, ya que la recopilación y posterior ordenamiento de la información tuvo bastantes grados de complejidad, pero en la medida que la lectura y comprensión de los datos obtenidos fueron profundizándose, nos permitió elaborar un texto coherente y organizado, creando un formato claro y específico en la metodología y presentación de los contenidos, la articulación entre éstos y sus aplicaciones, que facilitará el aprendizaje al mostrar el contexto histórico del desarrollo de los poliedros y su enlace topológico, las distintas visiones de dichos objetos geométricos, para una mayor aceptación y significancia de los contenidos tratados.

Los objetivos específicos propuestos fueron alcanzados en un porcentaje bastante alto, ya que el capítulo 4 está completamente abocado a alcanzar estos objetivos y lo logra, es un material de apoyo para el docente y alumnado, que contiene problemas teóricos y prácticos, talleres lúdicos, utilización de recursos tecnológicos que hacen de éste, un material didáctico y dinámico que integra a los poliedros con la ciencia, el arte y la tecnología de forma entretenida y de fácil comprensión y aplicación.

El apoyo del programa Poly ha sido fundamental para el desarrollo de nuestro trabajo, ya que son pocos los programas que permiten visualizar figuras en tres dimensiones, y este software nos entrega una serie de herramientas para poder trabajar en aula, permitiendo al alumno una mayor visualización de los poliedros, ya que al observar e interactuar con los mismos, rotándolos, pidiendo al programa que los arme y desarme, fortalece la capacidad espacial de alumno.

También, hemos llegado a la conclusión que el apoyo de software informáticos de matemática, recursos digitales y Web, son una herramienta poderosa que, en buenas manos, puede generar aprendizajes significativos en nuestros alumnos. Las nuevas metodologías, que se comienzan a impartir en los establecimientos, nos conducen a un aprendizaje por medio del descubrimiento del alumno y todos los recursos digitales disponibles, en parte en esta memoria, permiten llevar a cabo esta nueva forma de entregar las distintas materias y contenidos asociados a los distintos subsectores de aprendizaje.

Además, podemos formular, en el ámbito del crecimiento personal, que al trabajar un tema tan amplio en esta memoria, tuvimos que ahondar algunos de los conocimientos entregados en nuestra formación profesional, pero también tuvimos que investigar y estudiar ciertos tópicos matemáticos, con los cuales no estábamos familiarizados por no estar en el currículo de estudio nuestra carrera, lo que produjo un desafío personal que creemos rindió frutos notables.

También, se hace notorio el desarrollo profesional obtenido en la elaboración de este texto, pues salieron a la luz muchas capacidades creativas e innovadoras, de modo que nos damos cuenta lo útil que podemos llegar a ser, o el apoyo que podemos brindar para mejorar el actual Sistema de Educación Nacional.

En cuanto al desarrollo de la memoria, creemos importante hacer hincapié en los cursos de formación inicial de docentes de nuestra universidad, como modelos de investigación y proyectos de tesis, ya que consideramos no estar bien capacitados en esta área, las formas de redacción y metodologías de investigación, hacen de nosotros, profesores con déficit en este terreno.

Para finalizar, podemos mencionar que nuestra memoria es un real apoyo para el docente y para los alumnos de pregrado de carreras matemáticas, de tal forma, que encontrarán en esta investigación una visión amplia de los poliedros, pero que algunos temas específicos se podrían ahondar como temas de tesis para futuros profesores de matemáticas.

Sugerencias

De lo anteriormente señalado, dejamos abierta la puerta a las futuras generaciones de profesores de matemáticas para crear un currículo absolutamente ligado con otras áreas, ya sea en artes, ciencias o tecnología. Un estudio más exhaustivo de las formas poliedrales de ciertas moléculas desde un punto de vista matemático entregaría al profesor una aplicación cotidiana de un contenido netamente abstracto, como también al profesor de ciencias le permitiría ahondar en contenidos puramente matemáticos, que le ayudaría a fundamentar su conocimiento de una forma más sustentable y sólida.

Dentro de los contenidos investigados, recopilados y organizados dentro de nuestro trabajo, debemos resaltar los grupos de simetrías, que si bien es cierto, no profundizamos, porque no era ése nuestro objetivo, proponemos un estudio más exhaustivo de dichos contenidos, que permitan enriquecer nuestro conocimiento geométrico, pudiéndose éste incluir dentro de los planes de algún curso de geometría, alguna especialización en el área o bien como una mera búsqueda personal para aquellos interesados en la geometría.

Bibliografía

[1] Fernando Arenas, *“Geometría Elemental”*. Ediciones Universidad Católica de Chile, 1993.

[2] Liusternik, L.A, *“Convex figures and Polyhedra”*. New York: Dover, c1963, Biblioteca de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

[3] Wenninger, Magnus, *“Polyhedron Models”*. Cambridge: University Press, c1971, Biblioteca de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

[4] Seminario, *“Teoría de Grafos”*. Universidad de Tarapacá, 1984.

[5] Seminario *“Funciones de variable compleja, estudio de transformaciones de Moebius y estudio de algunas superficies curvas”*. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, 2006.

[6] Juan E. Nápoles Valdés 2002, *“La fórmula de Euler y la topología”*, archivo en formato PDF, búsqueda por sitio web Google.

[7] Seminario *“Algunos tópicos de transformaciones geométricas y geometría fractal y aplicaciones para su aprendizaje a nivel sistema escolar”*, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, 2004.

Bibliografía Digital y Software

Enciclopedia Virtual Wikipedia

- <http://es.wikipedia.org/wiki/Portada>
- <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2003/agosto/nosotros87.htm>
- <http://www.masaru-emoto.net/english/entop.html>
- http://www.emotoproject.org/eng_masaruemoto.html

Software

- Poly, *Pedagoguery Software Inc.*, versión 1.09, año 2002.
- Cabri Geometre II, *El cuaderno de geometría interactiva*, Jean-Marie Laborde y Franck Bellemain, Versión 1.0 MS Windows, Texas Instruments.