UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

"MATERIAL DE APOYO PARA EL APRENDIZAJE DE SECCIONES CÓNICAS COMPLEMENTO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN TERCER AÑO MEDIO"

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
PROFESOR DE MATEMÁTICA
CON MENCIÓN EN INFORMÁTICA EDUCATIVA
Y ESTADÍSTICA EDUCACIONAL

PROFESOR GUÍA: JUAN YAÑEZ GONZÁLEZ
LORNA BENAVENTE KENNEDY

NOMBRES: PATRICIO JAVIER ALMENDRA BELMAR
PABLO ESTEBAN CORREA RAMOS
JORGE ANDRÉS TORRES GONZÁLEZ

SANTIAGO, DICIEMBRE 2009

AGRADECIMIENTOS

A todo el Departamento de Matemática por contribuir en nuestra formación personal y profesional, en especial al señor Juan Yañez, por ser un pilar fundamental durante todo nuestro proceso educativo, como guía y modelo.

A nuestras familias y amigos, por depositar toda su confianza en nosotros y apoyarnos en nuestro proyecto de vida.

ÍNDICE **Página**

PRESENTACIÓN

Muchas veces como estudiantes de pedagogía nos hemos cuestionado cuales son los factores que influyen en la educación de calidad. El tiempo nos ha mostrado que ésta es multifactorial, es decir, son varios los factores que influyen de manera directa como indirecta en el aprendizaje de los estudiantes, desde el trato que se da entre estudiante-profesor, la forma de enseñar incluyendo la familia, entre otros. Nuestra motivación como estudiantes de pedagogía ha sido poder aportar con un material, no muchas veces visto en nuestras salas de clase, el cual pueda permitir a los estudiantes entender de mejor manera, los siempre tan complicados (para algunos) conceptos matemáticos. Nuestra intención ha sido trabajar de manera ardua en la creación de un material, que permita ayudar tanto a profesores como a estudiantes en el gran proceso enseñanza-aprendizaje.

Esperamos que este material sea de provecho para todos aquellos curiosos, tanto estudiantes como profesores, que deseen aprender algo más.

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo tiene como objetivo principal entregar un material de apoyo tanto a estudiantes como a profesores de matemática, específicamente en el área de la geometría, el cual se basa en el estudio de las secciones cónicas.

Entre las distintas partes que componen nuestro trabajo, presentaremos el estudio de las secciones cónicas a través del tiempo, cual es su utilidad en la sociedad actual y su relevancia en las distintas ciencias. Por otra parte deseamos hacer de este contenido, enseñado en secundaria de acuerdo al marco curricular chileno y al plan de estudio, algo más atractivo para los estudiantes y profesores con el fin de llamar la atención de este interesante tema.

Durante prácticamente toda la historia de la humanidad, el ser humano se ha visto enfrentado a diferentes tipos de problemas en diferentes áreas de la vida, es así como estos problemas derivan, a su vez, en diferentes soluciones que permiten al ser humano el avance del conocimiento.

En el caso de las secciones cónicas, uno de los problemas que permitió el inicio del estudio de las mismas fue la duplicación del volumen del cubo. Fue el matemático griego Menecmo quien, intentando dar solución a este problema, encontró que había una familia de curvas adecuadas (que luego llamaron cónicas) las cuales se obtienen por el mismo método, a partir de la sección producida por un plano a un cono recto, y según el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso, aparecerían distintas curvas. Más adelante presentaremos los diferentes personajes que estudiaron las propiedades de las cónicas y su aporte al campo de las ciencias. Es muy interesante destacar esto debido a que fueron grandes matemáticos los que contribuyeron en el avance en esta área, entre los cuales podemos nombrar a Blaise Pascal, Isaac Newton, Johannes Kepler, entre otros.

La utilidad de las cónicas también es parte de nuestro trabajo, es por ello que buscamos en diferentes bibliografías y otras fuentes de información la utilidad real de las secciones cónicas, de esta forma queremos entregar a los estudiantes y profesores una amplia gama de información útil para acercar de buena manera el contenido matemático al nivel escolar de nuestro país, esperamos que tanto estudiantes y profesores puedan percatarse de la importancia real del estudio de las cónicas.

Entre los diferentes aspectos que podemos nombrar por ahora, ya que más adelante profundizaremos según corresponda, están el uso de las cónicas en el estudio de las órbitas planetarias, la utilidad de las parábolas en la construcción de radares, antenas parabólicas o espejos y las hipérbolas aparecen en aplicaciones de navegación. Éstas y otras aplicaciones están muy presentes en la vida cotidiana, muchas veces los diferentes afanes no nos permiten estar atentos a lo que nuestros ojos ven.

Otro aspecto en el que también nos adentraremos, y a la vez es uno de nuestros principales ejes de trabajo, será la presentación de diferentes actividades didácticas de carácter simple, es decir, de fácil comprensión para estudiantes y profesores. Esperamos que estas actividades permitan tratar el contenido dentro del aula de la mejor forma posible. Estas situaciones problemáticas son creadas de tal manera que los estudiantes se sientan atraídos para poder desarrollarlas. La idea principal es poder mezclar el contenido matemático, en este caso las secciones cónicas, con los intereses de los estudiantes, basando esto en teorías del aprendizaje que argumentan que para que el estudiante tenga un aprendizaje significativo el nuevo conocimiento debe ser de interés o debe ser relacionado con los intereses del alumnado. En la actualidad, de acuerdo al constructivismo, el profesor es un facilitador del conocimiento, el cual pretende que el estudiante vaya construyendo su conocimiento conforme a su capacidad. Es por lo mismo que en este trabajo tratamos presentar un conjunto de actividades atractivas a los intereses o contexto sociales en los cuales se desenvuelven los estudiantes.

CAPÍTULO 1 “LA PROBLEMÁTICA”

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Nuestro trabajo tiene como finalidad o interés ahondar en el área de geometría, específicamente en lo que tiene referencia a secciones cónicas, por lo mismo nos planteamos desarrollar un material didáctico de apoyo al profesor, y que a la vez sea útil también para los estudiantes, es decir, nos planteamos la creación de diferentes tipos de actividades didácticas que complementen la labor del profesor dentro del aula, es por esto que esperamos que el material creado tenga una gran utilidad para los docentes en la actualidad.

De acuerdo a una publicación del diario la tercera.com en su revista Icarito, los establecimientos escolares chilenos enseñan menos de la mitad de los contenidos mínimos obligatorios entre 1° y 4° medio . El Ministerio de Educación constató este hecho a través de un estudio dirigido por la Unidad de Currículum y Evaluación (UCE) que determinó que menos de la mitad de los contenidos que se incluyen en los programas obligatorios entre primero y cuarto medio eran cubiertos completamente o, por lo menos, en un 75% durante las clases en los establecimientos.

La investigación se realizó durante cuatro años consecutivos y encuestó a una muestra representativa de 6.853 profesores de colegios particulares, municipales y subvencionados. Si bien la investigación constató que la cobertura mejoró en el transcurso de los años, un número importante de materias no se alcanzan a enseñar por completo antes de que los alumnos egresen.

Por su parte los docentes alegan que el currículum de cada curso es demasiado extenso y termina arrastrándose para el año siguiente, provocando un atraso generalizado.

Algunas de las áreas más afectadas actualmente están incluidas en la pruebas de selección universitaria**.** Dentro de la asignatura de matemática, por ejemplo, en primero medio las transformaciones isométricas se cubren sólo en un 40%**,** lo mismo que las congruencias de figuras planas**,** que son los contenidos menos enseñados. En segundo medio, los contenidos menos enseñados son geometría y probabilidades; en tercero medio, tenemos geometría y estadística y geometría nuevamente es el punto débil en cuarto medio.

Dentro de lo que se enseña en geometría en tercero medio tenemos el contenido de secciones cónicas o lugares geométricos, área a la cual está dirigido nuestro trabajo, y ésta, al igual que otras unidades de geometría, son parcialmente enseñadas**.**

En lo que a información recopilada se refiere, en cuanto a geometría, tenemos la opinión de Enrique González, especialista en didáctica de la Usach el cual comenta "La geometría es una materia que se aborda escasamente en la formación de pregrado de los profesores"**.**

Una realidad preocupante si se considera que es el segundo contenido más preguntado en la PSU de matemática**,** con 21 ejercicios.

Según la UCE (Unidad de Currículum y Evaluación), las razones de los profesores para no cubrir la totalidad de los temas propuestos se debe a tres factores principales:

1) El cambio de currículum
2) La extensión
3) El dominio frente a los nuevos contenidos.

Es precisamente frente al dominio de los contenidos que maneja el profesor en donde queremos realizar nuestro aporte, creemos que al presentar un material de apoyo que sea didáctico, simple en cuanto a entendimiento y atractivo en cuanto a la forma en que se presentará a los alumnos, se puede contribuir para que se enseñe la totalidad del contendido de secciones cónicas.

Ahora más allá de lo problemático que esta deficiencia (la falta de enseñanza de los contenidos) pueda resultar para la formación de los jóvenes, especialmente en geometría, surge una inquietud no menor: la incidencia de esta situación en la preparación de los jóvenes con los contenidos que quizás vean en su primer año de universidad.

Por lo mismo si el joven decide estudiar alguna carrera que contenga matemática es muy probable que el contenido de cónicas le sea pasado en la universidad y si ya lo ha abordado en enseñanza media de la mejor manera, creemos que le será menos complicado entenderlo a nivel superior.

1.2 OBJETIVOS DE LA MEMORIA:

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Crear y desarrollar de actividades didácticas orientadas a motivar y apoyar el aprendizaje de los estudiantes de tercer año medio con respecto a los lugares geométricos tales como la parábola, la elipse y la hipérbola.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Diseñar material de apoyo para profesores, dirigido a estudiantes de tercero medio, que contengan aplicaciones de cónicas a situaciones cotidianas.

- ✓ Buscar aplicaciones de las cónicas en otras áreas de las ciencias y en situaciones cotidianas con el fin de familiarizar el contenido a los estudiantes.

CAPÍTULO 2 "MARCO TEORICO"

2.1 HISTORIA DE LAS CÓNICAS

Se cuenta que en la antigüedad para el filósofo griego Platón los seres geométricos ideales eran la recta y la circunferencia, y toda la geometría habría que limitarla a las construcciones con regla y compás.

Según los antiguos geómetras esta era la forma correcta de resolver los problemas geométricos, y que cualquiera que quisiera resolver los problemas geométricos de otra forma debía ser considerado inculto, ignorante o degradante.

De esta forma los griegos, fuertemente influidos por Platón, se dispusieron a construir la geometría con regla y compás, no en vano en su academia tenía acuñada la frase "*nadie entre aquí que no sepa geometría*". Al pasar el tiempo los griegos se encontraron con tres problemas que no fueron capaces de resolver, posteriormente llegaron a ser llamados: "Los Tres Problemas Clásicos de la antigüedad". Estos problemas son:

La duplicación del cubo: este problema consistía en construir un cubo cuyo volumen sea doble que el de un cubo de lado dado.

La trisección del ángulo: este problema consistía en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales.

La cuadratura del círculo: el problema consistía en, dado un círculo, encontrar el lado de un cuadrado cuya área sea la misma que la del círculo inicial.

Estos problemas no tenían solución con regla y compás porque cualquier operación que se realice con una regla es equivalente a la resolución de una ecuación de primer grado, mientras que las realizadas con un compás equivalen a resolver ecuaciones de segundo grado, lo cual es lógico, pues con la regla dibujamos rectas, objetos que se expresan mediante ecuaciones de primer grado, y con el compás circunferencias, las cuales se expresan mediante ecuaciones de segundo grado.

Dicho de otro modo con la regla y compás podemos realizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, y raíces de índice igual a una potencia de dos. Ahora resulta que la resolución de la cuadratura del círculo requiere conocer el valor del número π, que es un número trascendente (es decir, que no se puede obtener como solución de ninguna ecuación algebraica), resulta también que para trisecar el ángulo es necesario realizar raíces cúbicas, y que para duplicar el cubo necesitamos la raíz cúbica de dos. Y por lo dicho anteriormente, el cálculo de π y de raíces cúbicas no es posible utilizando únicamente regla y compás, los tres problemas quedan sin solución.

Pero no todos los griegos se cerraron a dicha limitación, de hecho fueron capaces de resolver los problemas utilizando nuevas curvas como:

La espiral de Arquímedes: que es el lugar geométrico descrito por un punto que se desplaza a lo largo de una semirrecta con velocidad uniforme al tiempo que esta gira, también uniformemente. Con ella se resuelve la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

La trisectriz de Hipias: esta es una curva inventada por Hipias de Ellis. Permite la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Y por último las cónicas: quizá el descubrimiento más importante relacionado con los tres problemas sea el que realizó Menecmo, intentando conseguir la duplicación del cubo. Las cónicas son aquellas curvas que resultan de cortar un cono mediante un plano, pero estas merecen su propia historia.

2.1.1 GEOMETRÍA CLÁSICA

2.1.1.1 "*EL DESCUBRIMIENTO DE MENECMO*"

De acuerdo a las distintas fuentes de información que hemos investigado, se atribuye a Menecmo (hacia 350 a.C.) de la *Academia* platónica, el más famoso de los discípulos de Eudoxio y maestro de Aristóteles y Alejandro Magno, la introducción de las secciones cónicas, es decir, el descubrimiento de las curvas que más tarde recibirían los nombres de elipse, parábola e hipérbola. Que en ese entonces se llamaba como la «*Triada de Menecmo*».

Menecmo detectó que para la resolución del problema de la duplicación del cubo había una familia de curvas adecuadas, demostró que la intersección de una hipérbola equilátera y una parábola producen el resultado de situar dos medias entre dos extremos. Los tres tipos de cónicas obtenidas por el mismo método se producen a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.

En cuanto a las cónicas tenemos otro geómetra de importancia llamado Apolonio de Perga.

2.1.1.2 LA OBRA DE APOLONIO

De los tres grandes matemáticos del helenismo: Euclides, Arquímedes y Apolonio, este último ha sido el menos conocido a lo largo de los siglos. Aunque del personaje Euclides no sabemos casi nada, su obra “Los Fundamentos” fue pronto el paradigma de la sistematización del saber matemático que conservó este halo por siempre. Arquímedes, por su genio polifacético y por las leyendas creadas alrededor de su persona, coronadas con la historia de su muerte, es sin duda de entre los tres, la figura más conocida universalmente.

Apolonio representa la grandeza técnica especializada, el virtuosismo geométrico por excelencia. Pero por su carácter tan especializado y tan difícil, ni siquiera su obra maestra “*Las Cónicas”*, se conoce hoy en su integridad y más de la mitad de ella permaneció oculta para el mundo occidental hasta que fue publicada por Edmond Halley en 1710.

Los tres genios griegos de la matemática representan una nueva era y son verdaderos hijos de su época histórica. El helenismo significa, tanto en política como en filosofía, una auténtica fragmentación. En política, el imperio de Alejandro se fragmenta en reinos más o menos pequeños que compiten en ser dignos herederos de la tradición del siglo de oro helénico.

En filosofía se produce también una fragmentación del saber unificado al que Platón y Aristóteles (siguiendo el trazo de la corriente pitagórica) aspiran. El saber orientado hacia el hombre, con sus hondas conexiones con la estética, ética, religión, política, cede el paso al saber especializado que en matemáticas viene a ser representado por Euclides, Arquímedes y Apolonio, muy particularmente por este último.

Los datos de la vida de Apolonio son ciertamente escasos y casi todos ellos provienen de algunas noticias que aparecen en las introducciones de los diferentes libros de Las Cónicas.

Apolonio nació a mediados del siglo III a. de C. en Perga, ciudad situada en Panfilia, se cree hacia el 262 a. de C., según otros entre 246 y 221. Fue probablemente unos veinte años más joven que Arquímedes y se comenta que estudió largo tiempo en Alejandría, cuyo Museo y Biblioteca constituían en aquel tiempo el centro del saber occidental.

Parece extraño que Apolonio no dedicara alguno de los libros de su gran obra "Las Cónicas" a alguno de los reyes de Alejandría, por ejemplo Tolomeo III Euergetes (246-222) Tolomeo IV Filopator (222-205), sino más bien dedicó los libros a personajes de Pérgamo, tales como Eudemo (libros I, II, III) y Atalo (tal vez es el rey Atalo I de Pérgamo, 241-197, libros IV-VIII). Quizás esto fue debido a posibles problemas que surgieran entre Apolonio y las autoridades del Museo. Apolonio pasó tiempo también en Pérgamo y en Efeso.

Entre los personajes nombrados en los prólogos de los libros de Las Cónicas se pueden identificar Eudemo y Filónides. Filónides fue matemático y filósofo epicúreo conocido personalmente por el rey Seleúcida Antíoco IV Epifanes (175-163) y por Demetrio Sotero (163-150). Eudemo parece haber sido el primer maestro de Filónides. Así, la presentación por Apolonio a Eudemo del joven Filónides tuvo lugar probablemente a comienzos del siglo II. Las Cónicas debieron ser escritas en aquel entonces, ya que estas fechas calzan bien con la evidencia interna de la dependencia de Apolonio. De su muerte no hay información rescatable.

Durante más de ciento cincuenta años, las curvas introducidas por Menecmo se llamarían a partir de la descripción trivial de la forma como habían sido descubiertas, es decir, mediante las perífrasis: sección (perpendicular a una generatriz) de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

Fue Apolonio en su obra Las Cónicas quien, no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tipos de curvas, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica las dos ramas de la hipérbola.

En la construcción de Apolonio, las tres secciones cónicas se obtienen mediante un cono único, variando la inclinación del plano que corta al cono.

Además, siguiendo probablemente una sugerencia de Arquímedes, Apolonio acuñó a la posteridad los nombres de elipse, parábola e hipérbola para las secciones cónicas. A lo largo de la historia de la matemática, los conceptos han sido siempre más importantes que la terminología utilizada, pero en este caso el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio, tiene una importancia más allá de lo meramente nominalista.

Los términos adoptados en realidad no eran nuevos, sino que procedían, como sabemos, del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas del método de Aplicación de las Áreas. Elipse significa deficiencia; Hipérbola significa exceso (en el lenguaje ordinario una hipérbole es una exageración); y por ultimo Parábola significa equiparación.

El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva y expresaban sus propiedades intrínsecas.

Otra forma de entender las cónicas, aunque más adelante lo detallaremos con mayor precisión ya que pertenece a la geometría moderna, es como lugares geométricos, de esta manera la elipse será el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. La circunferencia será el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante. La hipérbola será el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante y la parábola será el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo, llamado foco, y una recta dada, llamada directriz, pero en lo referente a esta forma de entender las cónicas lo analizaremos más adelante en nuestro documento.

Las Cónicas de Apolonio fueron escritas en ocho libros de los que conservamos siete gracias a los trabajos de Thabit ibn Qurra (hacia 856 d.C.) y de Edmond Halley (1656-1742).

Su índice se puede proponer de esta forma:

I. Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.
II. Diámetros, ejes y asíntotas.
III. Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.
IV. Número de puntos de intersección de cónicas.
V. Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.
VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.
VII. Relaciones métricas sobre diámetros.
VIII. Se desconoce su contenido. Tal vez teoremas y/o problemas sobre diámetros conjugados.

El **Libro I** de Las Cónicas de Apolonio se inicia con la generación de las cónicas, Apolonio se dedica a estudiar por métodos planimétricos las propiedades fundamentales de las cónicas, incluyendo tangentes y diámetros conjugados, a partir de esas ecuaciones planas, obviando toda referencia explícita al cono generador. Apolonio utiliza de forma sistemática un par de diámetros conjugados o un diámetro y una tangente como equivalente de un sistema de coordenadas oblicuas, habiendo demostrado previamente que si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o de una hipérbola, paralela a su diámetro conjugado, la recta trazada es tangente a la cónica. El sistema de referencia diámetro - tangente se muestra de una significativa utilidad ante la invariancia de la ecuación de la cónica frente a un cambio de referencia diámetro - tangente de un punto a otro punto de la cónica. En particular, Apolonio conocía las propiedades de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas $xy = a^2$

El **Libro II** ahonda en nuevas propiedades y hace un estudio exhaustivo de las asíntotas. Al final del Libro estudia el problema de trazar una tangente que forme un ángulo dado con el diámetro que pasa por el punto de contacto.

El **Libro III** estudia primero propiedades de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados y otras propiedades de las tangentes, entre ellas se establece el cómo tres tangentes a la parábola se cortan en la misma razón de modo que la parábola resulta envolvente de las rectas con esta propiedad. Luego aparece la hipérbola como lugar de puntos tales que $xy = constante$, donde x e y son abscisa y ordenada respecto a los ejes constituidos por las asíntotas.

Después Apolonio estudia una serie de hermosas propiedades focales, entre las que destacan las proposiciones que permiten el trazado de estas cónicas mediante una composición de movimientos continuos y que sirven para definirlas de forma planimétrica como lugares geométricos:

«En una hipérbola la diferencia de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje transverso»,

«En una elipse la suma de distancias de cada punto a los focos es constante e igual al eje mayor».

En el **Libro IV** se estudian los puntos de intersección de las cónicas. Que exhibe un método de trazar dos tangentes a una cónica desde un punto.

El **Libro V** es una de las principales obras maestras de la geometría griega. Está dedicado a los segmentos máximos y mínimos, es decir, a la distancia máxima y mínima de un punto a los de una cónica.

En este libro encontramos el germen de la teoría de evolutas y evolventes que figura en la obra de Huygens Horologium Oscilatorium de 1673. Al intuir el concepto de curvatura, Apolonio se sitúa en las raíces de la geometría diferencial. En sus proposiciones mediante métodos puramente sintéticos, Apolonio obtiene la evoluta de las cónicas como lugar de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto.

En otras proposiciones, Apolonio construye la normal a una cónica desde un punto exterior mediante la intersección de la cónica dada con una hipérbola equilátera, llamada Hipérbola de Apolonio asociada al punto.

El **Libro VI** está dedicado a la igualdad y semejanza de cónicas. Sobresalen en este libro aquellas proposiciones, donde se resuelve el problema de dados una cónica y un cono circular recto hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada.

El **Libro VII** relaciona numerosas propiedades de los diámetros conjugados entre las que sobresalen las de las proposiciones acerca de la constancia de la suma en la elipse y la diferencia en la hipérbola de los cuadrados de los diámetros conjugados.

2.1.1.3 APORTES DE APOLONIO A OTROS CAMPOS DE LA CIENCIA

Apolonio escribió unas cuantas obras más que se difundieron bastante en su entorno, una buena parte relativa a la geometría y otras a campos de la física, donde sus profundos conocimientos geométricos aportaron en gran manera, por ejemplo, tenemos el caso del estudio de la reflexión sobre espejos curvos; otras de astronomía, campo en el que Apolonio ejerció una notable influencia, siendo citado explícitamente por Tolomeo, autor del Almagesto alrededor del año 140 d. de C, como responsable de un importante teorema en la teoría de epiciclos.

2.1.1.4 EL IMPACTO DE LA OBRA DE APOLONIO ENCAMINADO A OCCIDENTE.

La influencia de Apolonio en los geómetras griegos y árabes fue muy profunda. No en vano Apolonio fue llamado "El Geómetra de la Antigüedad", al pasar el tiempo, la obra de Apolonio comienza a filtrarse lentamente hacia Occidente por medio de la matemática árabe. Vitelio, un monje polaco establecido en Italia, escribe en 1260 un tratado de óptica, aunque en verdad lo que realizó es un comentario al tratado de óptica del árabe Al-Hazen, el cual residió en la península ibérica en el siglo XI, y en el que se contienen diversas proposiciones geométricas de Apolonio. El primer texto griego de Las Cónicas que aparece en Occidente es el traído por Francisco Filelfo, nacido en Tolentino Italia en 1398, el texto fue traído de Constantinopla a Venecia en 1427.

La primera versión al latín de los cuatro primeros libros de Las Cónicas de Apolonio fue realizada en Venecia por el matemático Juan Bautista Memo, esta traducción revela grandes lagunas en el conocimiento del griego, pero a pesar de ello, al morir Juan Bautista, un sobrino suyo, Juan María Memo, editó la obra en 1537.

En 1566, en Bolonia, Federico Commandino publica una segunda traducción, mucho mejor, de los cuatro primeros libros, basada sobre los textos griegos, y acompañada de los lemas de Pappus, del comentario de Eutoquio y de dos libros sobre cónicas de Serenus Antissensis. Una segunda edición de esta obra fue impresa en París en 1626.

En 1655 aparece publicado un exponente de lo que constituía el ejercicio de moda en ese tiempo, la reconstrucción conjetural de las obras perdidas de los clásicos. El Padre Claude Richard publica en Amberes un comentario de los cuatro primeros libros sobre las cónicas de Apolonio, basado en los textos de Memo y Commandino, seguido de otros cuatro libros que, a juicio de Richard, pretendían reconstruir el contenido de los cuatro libros de Apolonio desconocidos entonces en Occidente.

En 1675 Isaac Barrow, el maestro de Newton en Cambridge, publicó en Londres un manual de geometría en que condensaba los cuatro primeros libros de Apolonio, además de otras obras de Arquímedes y de Teodosio. A partir de 1629 a través de Golius, profesor de lenguas orientales en Leyden, comienzan a conocerse en Occidente los primeros manuscritos árabes de la obra de Apolonio, que contenían más libros de los que hasta entonces eran conocidos, El Padre Mersenne se hace eco de ello en una obra en 1644. Golius los trajo consigo a Holanda, después de un viaje por el Pronio, y en principio planeó traducirlos y publicarlos. No se sabe bien por qué no llevó a cabo su proyecto ni por qué su colección se dispersó después de su muerte.

Mientras el geómetra Viviani, en 1658, se ocupaba de reconstruir conjeturalmente el contenido de los cuatro libros desconocidos de Apolonio, otro geómetra italiano, Borelli, encontró en la biblioteca de los Médicis, en Florencia, un manuscrito árabe, probablemente de la colección de Golius, que contenía los libros V, VI y VII de Las Cónicas, en una versión resumida y más o menos retocada por el matemático persa Abalphat de Ispahan.

Viviani logró que Borelli no publicase tal hallazgo sino después de que él hubiese publicado su reconstrucción, lo que hizo en 1659. Como se pudo ver después, la reconstrucción del libro V de Viviani fue de un acierto sorprendente y extendía el campo de Apolonio considerablemente.

Borelli por su parte hizo traducir el libro de Abalphat al latín y lo publicó con numerosos comentarios en Florencia en 1661.

Otro manuscrito árabe que contenía una versión abreviada de los mismos libros de Las Cónicas, comentada por el geómetra persa Abdolmelek de Chiraz en 1250, fue adquirida en 1641 por el orientalista alemán Christian Rau. Este lo tradujo al latín y lo publicó en Kiel en 1669.

La primera versión completa en árabe de los libros V, VI, VII, aparece públicamente en Occidente al comienzo del siglo XVII en Irlanda, en un manuscrito que los herederos de Golius habían vendido al obispo de Armach (Codex Armachanus). Se trataba de una traducción del griego al árabe, realizada en el siglo IX por Thabit ben Kurra, en Bagdad. La edición principal de

Las Cónicas se debe al entusiasmo de Edmond Halley (1656-1742), el gran impulsor del trabajo de Newton, a quien convenció para que escribiese los Principios que posteriormente él mismo hizo imprimir con los costos a su cargo, en 1687.

En 1704 Halley sustituyó a Gregory como profesor de geometría en Oxford. Gregory había traducido los Elementos de Euclides y en 1703 los había publicado en latín y griego. Él y Halley se habían propuesto traducir y publicar los siete libros de las Cónicas de Apolonio. Con tal fin Halley decidió aprender árabe. En 1706 publica Halley el tratado de Apolonio sobre la sección de la razón. Muerto Gregory, Halley emprende en solitario la conclusión de la publicación de los siete libros conservados de las Cónicas y en 1710 aparece la obra en una impecable presentación, la cual se compone de tres partes.

La primera contiene el texto griego de los cuatro primeros libros, publicado (en griego) por vez primera, junto con la versión latina de Commandino más o menos corregida, con los textos griegos de los lemas de Pappus y con el comentario de Eutoquio, todos los textos griegos acompañados de sus versiones en latín.

La segunda parte comprende la traducción latina de los libros V, VI, VII, basada sobre la versión árabe de Thabit ben Kurra, seguida del texto griego de los lemas de Pappus relativos a estos tres libros y una reconstrucción conjetural del libro VIII hecha por Halley mismo.

La tercera parte contenía el texto griego y una versión latina de los dos libros de Serenus Antissensis sobre la sección del cilindro y del cono.

2.1.2 GEOMETRÍA MODERNA:

2.1.2.1 LA LLEGADA A OCCIDENTE

A medida que fue avanzando el tiempo variados matemáticos se interiorizaron en dar solución a los problemas relacionados con la geometría, pero en esta ocasión, nos centraremos en algunos matemáticos que revolucionaron, por decir lo menos, el ámbito matemático de aquel entonces.

Se puede afirmar que en muy pocos aspectos o ramas de la matemática se puede asignar el trabajo a un único individuo. En el caso de la geometría analítica "de Descartes y Fermat" ocurrió lo mismo, es decir, no fue un producto exclusivo de las investigaciones realizadas por ellos, sino más bien, es la síntesis e investigación de varias tendencias matemáticas convergentes en los siglos XVI y XVII.

Entre los autores que contribuyeron pueden contarse Apolonio, Oresme, Vieta y muchos otros matemáticos.

Se debe destacar en gran manera, por su magnitud e importancia, el trabajo de Apolonio (262 –190 a. de C.), Las Cónicas, en el que ya se advierten, respecto al uso de coordenadas, muchos aspectos tan similares a los acercamientos modernos, tanto que, en algunas ocasiones, es juzgada como una geometría analítica que se anticipó a aquella de Descartes y Fermat por 1800 años, en la que se identifican formas retóricas de las ecuaciones de las curvas establecidas por Apolonio como relaciones entre las abscisas y las ordenadas.

Las abscisas y las ordenadas de la época eran aplicaciones de líneas de referencia en general, y de un diámetro y una tangente en sus extremos en particular, lo que no hace diferencias esenciales con un marco coordenado rectangular, o más generalmente, oblicuo.

En este sistema de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro desde el punto de tangencia son las abscisas, y los segmentos paralelos a la tangente e intersecados entre el eje y la curva son las ordenadas, sin embargo, el álgebra geométrica Griega no tenía magnitudes negativas y, aún más, el sistema coordenado en cada caso era construido a posteriori con el fin de estudiar las propiedades de una curva dada y no a priori para propósitos de representación gráfica de una ecuación o relación expresada, ya fuera retórica o simbólicamente.

2.1.2.2 LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE DESCARTES Y FERMAT.

Dentro de los pasos finales en la preparación para la nueva matemática infinitesimal, estuvieron aquellos que tuvieron más posibilidades para la investigación en el desarrollo de la geometría, es decir, René Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 - 1665).

La geometría de Descartes fue publicada en 1637 como uno de tres agregados de su Discurso del Método para conducir bien la razón, y buscar la verdad en las ciencias. Además la dióptica, los meteoros y la geometría que son ensayos de este Método.

En el mismo año, Fermat envió a sus delegados en París su introducción a los lugares planos y sólidos. Estos dos ensayos establecieron los fundamentos para la geometría analítica, sin embargo, aunque el trabajo de Fermat fue más sistemático en algunos aspectos, no fue publicado de hecho sino hasta 1679, después de su muerte, y por esta razón hoy hablamos de la geometría cartesiana en lugar de la geometría fermatiana.

La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación $f(x,y)=0$ y el lugar (generalmente una curva) consistente de todos aquellos puntos cuyas coordenadas (x,y) relativas a dos ejes fijos satisfacen la ecuación, de hecho ninguno de los dos usaron sistemáticamente dos ejes de coordenadas en la forma estándar actual, lo más cercano a ello viene indicado en el principio de la guía de Fermat, que dice:

“Cuando encontremos dos cantidades conocidas en una ecuación, tenemos un lugar geométrico, la extremidad de una de éstas describe una línea, recta o curva.”

Para Fermat, al igual que para Descartes, las dos cantidades desconocidas en una ecuación eran segmentos lineales más que números. Uno de éstos era medido a la derecha desde un punto de referencia sobre un eje horizontal, y el segundo era localizado con una ordenada vertical sobre el extremo del primero.

El principio de Fermat afirma entonces que el punto terminal de la ordenada describe la curva correspondiente a la ecuación dada. La práctica general de Descartes fue similar, de tal manera que ambos, de hecho, dieron con la "geometría ordenada" en lugar de la geometría co-ordenada. Fermat se adhirió a la notación algebraica de Vieta, y designó a sus variables como A y E en lugar de x e y, sin embargo, Descartes usó totalmente la notación estándar actual, bueno, debemos hacer una aclaración, en realidad nosotros usamos la notación de Descartes. Estandarizó la notación exponencial para las potencias e inició la práctica común de usar letras cerca del inicio del alfabeto para los parámetros y aquellas cerca del final para las variables.

La intención de ambos, Descartes y Fermat, fue aplicar los métodos del álgebra renacentista para dar solución a los problemas de geometría. Descartes establece el plan como sigue:

"*Si entonces, deseamos resolver algún problema, primero suponemos que ya disponemos del problema y damos nombre a todas las líneas que parecen ser necesarias para su construcción, tanto a aquellas que son desconocidas como a las conocidas. Entonces, sin hacer distinción entre las líneas conocidas y desconocidas debemos desembrollar la dificultad en cualquier manera que muestre más naturalmente las relaciones entre esas líneas, hasta que nos sea posible expresar una cantidad de dos formas. Esto constituirá una ecuación, ya que los términos de una de esas dos expresiones es en conjunto igual a los términos de la otra.*"

Descartes empezó con un problema geométrico que comúnmente involucraba una curva dada y la definía tanto como un lugar geométrico estático, a la manera de los griegos, como en términos de un movimiento continuo uniforme, como la espiral de Arquímedes.

Su procedimiento fue trasladar un problema geométrico al lenguaje de una ecuación algebraica, luego simplificarla y finalmente resolver esta ecuación.

La primera referencia del Método de Descartes se encuentra en una carta de Constantino Huygens a Descartes, de octubre de 1635, donde le manifiesta su satisfacción por haberse decidido a publicar la Dióptica y le aconseja sobre la mejor manera de hacer la figura y de imprimirla.

La parte menos discutida en su época fue la Geometría, sin duda porque ella tendría un pequeño número de lectores, pues debían ser personas que no solamente estuviesen al corriente de todo lo que se sabía de Geometría y de Álgebra, sino que debían ser, además, *"laboriosos, ingeniosos et attentos".*

2.1.2.3 LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

A continuación se presenta un breve resumen del la obra realizada por René Descartes en relación a la geometría.

El *Libro Primero* de la *Geometría* trata de los "*Problemas que pueden resolverse sin emplear más que círculos y líneas rectas."*

El *Libro Segundo,* el cual se titula *De la naturaleza de las líneas curvas,* trata especialmente de las curvas de grado superior y, sobre todo, de la construcción y propiedades de tangentes y normales, líneas cuya importancia deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas.

El *Libro Tercero* tenemos está dedicado a los problemas de sólidos o supersólidos, lo cual lo lleva al estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado, y da luego su famosa regla de los signos. Por último, trata los célebres problemas de tercer grado: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo y señala que a ellos puede reducirse cualquier otro problema de tercer grado.

2.1.2.4 DESCARTES Y FERMAT

Mientras que Descartes comúnmente empezaba con una curva y derivaba su ecuación algebraica, Fermat comenzaba con una ecuación algebraica y derivaba de ella las propiedades geométricas de la curva correspondiente. Por ejemplo, él comenzó con la ecuación de segundo grado en dos variables: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ mostrando mediante técnicas de traslación y rotación que su lugar geométrico es una sección cónica (excepto para casos degenerados), y clasificó la variedad de casos de esa ecuación como elipse, hipérbola o parábola.

Así, los trabajos de Descartes y Fermat tomaron acompasadamente, los dos aspectos complementarios de la geometría analítica - estudiando ecuaciones a través del significado de las curvas y estudiando curvas definidas por ecuaciones. Una característica común e importante de su trabajo en geometría analítica fue su concentración en ecuaciones indeterminadas que involucraban variables continuas. Vieta, por ejemplo, había estudiado solamente ecuaciones determinadas en las cuales la "variable", aunque desconocida, es de hecho una constante fija a ser encontrada.

La noción de variable, como en principio enfatizaron Descartes y Fermat, fue indispensable para el desarrollo del cálculo - una materia que difícilmente puede ser discutida excepto en términos de variables continuas. Más aún, la geometría analítica dio cabida a un vasto territorio virgen de curvas nuevas para ser estudiadas y se convirtió en incentivo para la invención de técnicas algorítmicas que permitieran su investigación sistemática.

Mientras que los geómetras griegos habían sufrido por la escasez de curvas conocidas, ahora una nueva curva podía ser introducida por el simple acto de escribir una nueva ecuación. En este sentido, la geometría analítica proveyó tanto un campo más amplio para manejar las técnicas infinitesimales del siglo XVII, como la maquinaria técnica necesaria para su especificación.

2.1.2.5 POSICIÓN Y VALOR DE LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

A continuación describiremos la importancia del aporte de Descartes, en un breve resumen de la historia de la geometría.

La aplicación del cálculo a la geometría, para el estudio de las propiedades de las figuras y la solución de los problemas derivados de ellas, fueron utilizados por los matemáticos desde los tiempos más remotos, pero al principio sólo para determinar longitudes, áreas y volúmenes o establecer proporciones entre ellos.

La escuela de Platón sistematizó el raciocinio en las matemáticas, señalando normas para abordar la solución de los problemas y dio jerarquía a esa ciencia. Pero es en los Elementos de Euclides donde se encuentra tratada en forma gráfica la resolución de las ecuaciones de 2º grado y luego un intento de representación de las cantidades racionales y de las irracionales; también se muestra la inconmensurabilidad de la relación entre el lado y la diagonal del cuadrado.

En los *Porismas*, parece que se consideraban las secciones cónicas como lugares de puntos que respondían a condiciones determinadas. Arquímedes avanzó en el estudio de los cuerpos, tratando los "conoides" y los "esferoides" (paraboloide y elipsoide), así como nuevas curvas, principalmente las espirales, y creando el método de los isoperímetros, por lo que debe considerársele como vidente lejano de la geometría infinitesimal.

Apolonio, el insigne geómetra de Pérgamo, que vivió tres siglos antes de Cristo, se encuentra en su gran obra sobre las *Secciones cónicas*, y en su tratado sobre los *Lugares planos*, un estudio racional de verdadera geometría.

Apolonio distinguió las tres variedades de curvas y les dio los nombres de *parábola, elipse* e *hipérbola*, obtenidas todas con planos que cortaban un cono de rotación, con inclinación igual, menor o mayor que la del cono, encontrando que en el primer caso el cuadrado de la cuerda es proporcional a su distancia al vértice de la cuerda $y^2 = 2px$ y en los otros casos, la cuerda presenta defecto o exceso sobre aquel valor $y^2 = 2px \pm cx^2$. Fue el primero en considerar los dos mantos del cono, señalando que las dos ramas de la hipérbola son partes de una misma curva. Además descubrió las secciones circulares de un cono que no es de rotación; la constancia de la suma o diferencia de las distancias de un punto de las curvas a dos puntos fijos (focos), y la relación del diámetro con las cuerdas que divide por mitad, direcciones que llamó *conjugadas*, dando la expresión del cuadrado de dicha semicuerda en proporción constante con el producto de los segmentos en que el diámetro queda dividido: a estos segmentos los llamó *abscisas* y a la semicuerda, *ordenada*. Como se ve, Apolonio puede ser considerado el verdadero precursor de la geometría analítica, y Zeuthen, en su estudio sobre las *Secciones cónicas en la antigüedad*, piensa que muchas de las propiedades de esas curvas debieron ser encontradas por Apolonio por medio del sistema de coordenadas, pero que las demostraciones fueron después transformadas según los métodos geométricos de entonces. La obra de Apolonio es el fundamento de la teoría moderna de las cónicas.

Más de cinco siglos después, en el III de la era cristiana, aparece Pappus, cuya obra es una recopilación cuidadosa y ordenada de la escrita por sus antecesores, pero con el agregado de muchas proposiciones nuevas, algunas dejadas sin resolver. Hasta la época del renacimiento, el desarrollo de la matemática no presenta aspectos nuevos, y el tratamiento de los problemas responde a los principios de la geometría griega. Merece señalarse, no obstante, la concepción de Nicolás Oresme, erudito del siglo XIV, que se ocupó, entre otras cosas, de las matemáticas y quien, para estudiar ciertas figuras geométricas, relacionaba las posiciones de los puntos con líneas fijas, por analogía con la longitud y la latitud para los puntos de la tierra.

En época algo anterior a la de Descartes, la figura descollante es *Vieta* (1540-1603), quien introdujo indiscutibles progresos en álgebra y en trigonometría, a la vez que la aplicación, en geometría, para la solución de muchos problemas, de los recursos de las otras ramas. A él se deben el estudio de los triángulos esféricos, la resolución gráfica de algunas ecuaciones de 3er grado, la determinación del círculo tangente a otros tres y otras cuestiones relacionadas con éstas.

Descartes seguramente no conoció la obra de Vieta hasta después de su salida del colegio, por ser su autor protestante y por haberla publicado en edición muy reducida y sólo difundida entre los amigos; bien puede creerse a Descartes cuando afirma que mientras estuvo en Francia "no la conoció ni por las tapas". Poco después de haber dado la solución del problema de Pappus, Mersenne le envió un ejemplar de la *Logística Speciosa*, a lo cual Descartes le manifiesta "que no ha encontrado en ella nada de utilidad ni cree que nadie pueda aprender allí, no ya a resolver todos los problemas, ni siquiera ciertos problemas bien sencillos". Sin duda, le habrá desagradado el estilo confuso y complicado, el lenguaje, mezcla de palabras griegas y latinas y las notaciones, del sistema cósico pero con agregados raros y especiales que inventaba Vieta y que hicieron decir a Vasset, traductor al francés de algunas de sus memorias, "que se necesitaba otro Vieta para entenderlas". Entre los geómetras de la época de Descartes merecen señalarse *Kepler* (1571-1630) y *Desargues* (1593 - 1632), pero las obras de éstos no tuvieron influencia alguna sobre el método analítico.

Descartes conoció de Kepler sus estudios sobre óptica y sobre el perfil de los lentes y de Desargues tuvo referencias después de la publicación de la *Geometría*, formándose, por cierto, una elevada opinión de él e interesándose por el parecer que le merecía su libro.

Fermat es el que podía disputar a Descartes la gloria por la creación de la geometría analítica y así han querido presentarlo algunos críticos, porque dio las ecuaciones de algunas líneas, cónicas y línea recta, como lugar geométrico de puntos, en una forma más sencilla que la expuesta por Descartes.

En el *Elogio* que se publicó el día siguiente de la muerte de Fermat, en 1665, se dice que entre sus obras dejó un tratado analítico para resolver los problemas planos y sólidos, conocido antes de que Descartes hubiera publicado nada sobre ese tema; y en los tiempos modernos, Cantor, por ejemplo, en su gran *Historia de las matemáticas*, afirma que en ninguna parte Descartes describe el establecimiento de un lugar geométrico tan claramente como lo hace Fermat en su tratado.

Fermat era cinco años menor que Descartes, pues nació en agosto de 1601, en el sur de Francia, cerca de Montauban (Gascuña). Hizo la carrera de magistrado y poseyó una cultura superior muy completa, distinguiéndose por su dedicación a las matemáticas, en las que ha dejado una obra muy profunda en la teoría de los números, así como en la de las probabilidades, de la cual es uno de los creadores. No se conoce la fecha de sus primeros trabajos, pues no se publicaron, limitándose a hacerlos conocer por sus amigos, Pascal (padre), Roberval, Mersenne, Carcavi y otros. En 1619, cuando Descartes ya había resuelto, con métodos propios y con el compás por él ideado, muchos problemas que no habían sido solucionado antes, Fermat contaba con sólo 17 años. Sin embargo, lo que más debe señalarse es el alcance y trascendencia de la obra de uno y otro: Fermat pudo haber concebido el modo de construir curvas por medio de las ecuaciones representativas, la "propiedad específica" de cada una, como la llamó; pero no lo vio o no lo presentó como un procedimiento que pudiera dominar en la matemática; como un método nuevo y general de resolver todos los problemas, según lo hace Descartes. De aquí que éste tuviera discípulos y que su obra se enseñara, se difundiera, se ampliara con nuevas aplicaciones. Descartes tuvo conciencia, y lo dijo bien claramente, que hacía una obra definitiva, en lo que tiene de ordenado y sistemático.

2.2 LA IMPORTANCIA DE LAS CÓNICAS EN LA ACTUALIDAD

2.2.1 CÓNICAS EN LA VIDA REAL.

En la unidad de secciones cónicas de tercero medio es importante resaltar a los estudiantes el valor de sus aplicaciones en distintos ámbitos de la vida cotidiana, esperando que por sí mismos se percaten de la trascendencia del estudio de estas curvas.

Sin duda es curioso que muchas veces las curvas cónicas están donde menos nos imaginamos, tanto en la naturaleza, como en obras que han realizado grandes artistas a lo largo de la historia de la humanidad.

No debemos olvidar que fue René Descartes quien demostró que las secciones cónicas de Apolonio se hallan todas contenidas en un único conjunto de ecuaciones cuadráticas de la siguiente forma.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Dado que las secciones cónicas incluyen a las circunferencias de los antiguos astrónomos, las elipses de Kepler y la parábola utilizada por Galileo para describir la trayectoria de un proyectil, este descubrimiento de Descartes facilitaba a los físicos una poderosa herramienta, sin la cual el propio Newton se habría visto severamente limitado.

La ecuación general de segundo grado tiene algunas propiedades generales que permiten clasificar cada una de las cónicas según los valores de los parámetros *a, b, c, d, e, f.*

Pero la pregunta que nos podríamos hacer es ¿cuál es el motivo principal de que las secciones cónicas ocupen un lugar tan importante entre todas las posibles curvas?

Como dijimos anteriormente muchos años más tarde se comprobó que las órbitas de los planetas y las trayectorias de los cuerpos pesados son curvas de este tipo.

Pero esto no es todo, podemos decir entre otras cosas que la importancia fundamental de las cónicas reside en el aparato sensitivo del hombre mismo. Su capacidad de percepción depende principalmente del ojo. Como el hombre es, ante todo, un observador, los rayos luminosos que penetran en el ojo o que de él parten en dirección contraria para construir la visión forman un cono, según las leyes de refracción y convergencia de una lente biconvexa.

Toda imagen de la realidad óptica, toda perspectiva, toda proyección, se presenta bajo forma de una sección cónica. Por tanto, no es exagerado calificar a nuestro mundo como "mundo de las secciones cónicas".

2.2.2 SU IMPORTANCIA

Ya interiorizándonos más en lo que estamos estudiando, específicamente en lo referente a la trayectoria de los cuerpos pesados, fue Galileo Galilei quien, en 1589, con apenas 25 años y recién nombrado profesor de matemáticas de la Universidad de Pisa, quien inició los experimentos. Este joven durante tres años, se dedicó a lanzar objetos desde lo alto de la famosa torre inclinada, donde logró probar que la trayectoria de uno de esos proyectiles es una parábola y que su recorrido vertical es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido desde que fue lanzado.

Naturalmente, Galileo y sus contemporáneos no se contentaron con lanzar piedras desde lo alto de las torres o acantilados. Rápidamente demostraron que la trayectoria descrita por los proyectiles de los cañones también describía una parábola. Y así, Galileo, Tartaglia y otros se hicieron famosos calculando todas las posibles trayectorias de una bala, variando la cantidad de pólvora y el ángulo de tiro.

Otra propiedad importante de la parábola sembró terror entre las naves romanas que, en el año 214 A.C, llevaban los 50.000 legionarios del cónsul Marco Claudio Marcelo a la conquista de Siracusa. Los valientes romanos, que no retrocedieron ni ante los elefantes de Aníbal, estuvieron a punto de ser derrotados por un viejo solitario de 72 años. Arquímedes, ése era su nombre, él sabía que si los rayos del sol incidían paralelos al eje de un espejo parabólico, éstos serían reflejados y convergerían en un solo punto (llamado foco).

Por esta razón se alcanzaría en dicho punto elevadas temperaturas que permitían incendiar las naves atacantes. Hoy en día sigue usándose esta propiedad: es la base de los radares.

Newton construyó, basándose en la misma propiedad, un aparato menos "infernal" que es el telescopio reflejante. Hizo construir un espejo parabólico parecido al de Arquímedes, pero en vez de dirigirlo al sol lo dirigió hacia las estrellas y la luna, todos los rayos de la luz que partían de un cuerpo celeste situado en la dirección del eje del espejo se concentraban, tras su reflexión, en el foco. La imagen obtenida puede ser observada después de una reflexión de 45º y situado cerca del foco (que impide que la cabeza interrumpa los rayos de la luz de la estrella) o bien, tal y como ocurre en los telescopios modernos de este tipo, mediante un microscopio especial llamado "ocular del telescopio".

Otro aspecto por nombrar es por ejemplo que en cualquier automóvil moderno existen dos espejos parabólicos que, en vez de usarse para concentrar la luz que les llega (como ocurre con los espejos de Arquímedes o el telescopio de Newton), sirven para lo contrario: dispersar una luz muy intensa. Son los faros.

Simplificando su funcionamiento, diremos que están formados por una potente ampolleta situada exactamente en el foco de un espejo parabólico. Los rayos de luz se reflejan en el espejo, pero, por ser éste parabólico, lo hacen paralelamente al eje (cuya dirección coincide con la del eje de simetría del vehículo).

Lewis Carroll, el matemático autor de Alicia en el País de las Maravillas, se construyó una mesa de billar de forma elíptica, en ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro foco después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se pare. Una bola lanzada en una mesa de billar elíptica rebota como si se sustituyera la elipse por la recta tangente en ese punto. Si la lanzamos desde un foco, debido a esta propiedad, rebotará en la recta tangente dejando ángulos iguales y dirigiéndose, luego, al otro foco.

Muchos tipos de antenas tienen forma parabólica (como su nombre indica) y gracias a ello cualquier onda que rebote en la superficie de la antena irá a parar al foco, la antena es un aparato encargado de recoger todas las ondas y enviarlas a nuestro televisor. Esta propiedad de la parábola como dijimos anteriormente también se utiliza en los faros de los automóviles, pero justamente al revés. En principio, una ampolleta de un faro no alumbraría lo suficiente para poder conducir de noche con seguridad. Por lo tanto, se le ha dado a la superficie del faro una sección parabólica, ya que de esta manera dispersará los rayos de la ampolleta de forma suficientemente potente para que pueda verse adecuadamente.

Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica (forman la envolvente de una parábola). Se creía hace tiempo que las cuerdas o cadenas que se suspenden agarradas únicamente por sus extremos también formaban parábolas (hoy sabemos que la curva que describen es un coseno hiperbólico).

Las trayectorias de los proyectiles tienen forma parabólica. Los chorros de agua que salen de una manguera tienen también forma parabólica. Si salen varios chorros de un mismo punto a la misma velocidad inicial pero diferentes inclinaciones, la envolvente de esta familia de parábolas es otra parábola (llamada en balística parábola de seguridad, pues por encima de ella no es posible que pase ningún punto de las parábolas de la familia). Donde el mayor alcance que se puede obtener es aquel en que el ángulo de inclinación inicial es de 45 grados.

La forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicas.

Un telescopio de espejo líquido es un telescopio reflectante (es decir, que usa la propiedad reflectante de la parábola) cuyo espejo principal está hecho de mercurio líquido. Un famoso ejemplo lo constituye el telescopio HUBBLE situado en el espacio exterior.

La pregunta es cómo puede un líquido formar un espejo parabólico y por qué se quiere así. La respuesta es que si se tiene un contenedor giratorio de liquido, la superficie del mismo formará un paraboloide perfecto, incluso si la superficie interior del contenedor tiene imperfecciones. De este modo, no es necesario el pulido de los lentes y además los espejos pueden hacerse más grandes que los sólidos. Al utilizar mercurio líquido se consigue que los espejos sean más baratos que los tradicionales (sólo hace falta una capa muy fina de mercurio pues este es muy pesado).

Las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas (el sol se encuentra en uno de los focos). La excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167.

La de mayor excentricidad es la órbita de Plutón, 0,2481, que incluso es pequeña.

Los cometas y los satélites también describen órbitas elípticas. En el extremo contrario está el cometa HALLEY cuya excentricidad es de 0,967 muy próxima a 1.

En Óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas.

En diseño artístico es común encuadrar retratos y fotografías en un marco con forma elíptica.

La mayoría de los dispositivos usados para recortar figuras elípticas están basados en las ecuaciones de la elipse como comentamos anteriormente.

Una revolucionaria técnica médica introducida a mediados de la década pasada para el tratamiento de los cálculos renales utiliza propiedades reflexivas de las cónicas. La idea principal consiste en usar ondas sonoras intensas generadas fuera del cuerpo del paciente para pulverizar las piedras y convertirlas en arena que pueda ser fácilmente eliminada por el organismo. La clave está en enfocar las ondas para que no afecten al cuerpo, sólo al cálculo. Para ello se usa una cámara semielipsoidal. En uno de sus focos se crea una poderosa chispa que evapora agua. La parte que golpea el reflector converge en el otro foco, donde se encuentra la piedra, con toda su intensidad, provocando su destrucción. Este tratamiento se aplica en la actualidad en más del 80% de piedras en el riñón y la uretra, además el tiempo de recuperación es de 3 días en comparación con las dos semanas con la cirugía convencional, así como la tasa de mortalidad es del 0,01% frente al 2% del método tradicional.

2.2.3 PROPIEDADES DE LAS CÓNICAS.

Una propiedad sencilla es que, dados tres puntos no alineados, existe una y sólo una circunferencia que pasa por los tres, no tan conocida ni tan sencilla es que por cinco puntos pasa una y sólo una cónica, la cual será degenerada si por lo menos tres de los puntos están alineados.

La elipse es la curva que aparece con más frecuencia en la vida cotidiana. La trayectoria de un objeto móvil que describe una órbita cerrada bajo la influencia de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Kepler fue quien anunció por vez primera este descubrimiento, tan sorprendente para la época donde no se aceptaba que las trayectorias de los cuerpos celestes fueran menos perfectas que los círculos. Observamos que, por efecto de la erosión, las piedras de las playas tienden a adoptar formas elipsoidales, no esféricas.

El lugar geométrico de los puntos en el extremo de la puerta de un garaje montada en unas poleas sobre un eje vertical es precisamente (un cuadrante de) una elipse.

Las hipérbolas aparecen en algunas aplicaciones aeronáuticas. Supongamos que un avión vuela a una altura “h” sobre la superficie terrestre a la velocidad supersónica “v”. Se plantea el problema de determinar la región de la superficie terrestre en cuyos puntos y en un momento determinado se oye o se ha oído el sonido del motor del avión. La ya comentada propiedad reflexiva de la parábola tiene el inconveniente de que sólo es posible absorber rayos de luz paralelos que lleguen en una sola dirección. Esto no permite fabricar telescopios de grandes proporciones. Sin embargo, una combinación de las propiedades de las parábolas y de las circunferencias tiene ventajas prácticas como la posibilidad de fabricar el telescopio de radio más grande del planeta (situado en el Centro Astronómico y de Ionósfera Nacional en Arecibo, Puerto Rico), con forma circular. Su tamaño no permite dirigirlo en diferentes direcciones, pero al hacerlo esférico ya no es necesario. En su lugar, una antena situada en el foco de la parábola de la que la circunferencia es el círculo de curvatura puede dirigirse a diferentes lugares del estanque para elegir una dirección de observación. Desde luego, no enfocará de forma tan precisa como un paraboloide, pero localmente se tendría una aproximación bastante aceptable.

Como se puede notar, las curvas cónicas están más presentes de lo que muchas veces nos imaginamos, por lo mismo el estudio de estas curvas no debe dejarse de lado, los estudiantes y profesores tienen la posibilidad de maravillarse con las curvas que permiten el avance de la ciencia y el conocimiento en los diferentes campos del saber.

2.3 LA MATEMÁTICA EN EL MARCO CURRICULAR CHILENO

En el Marco Curricular Chileno existen aspectos que toman gran importancia durante todos los años de enseñanza media, esto se debe a que las ideas fundamentales se tienden a repetir durante el paso de los años. En matemática por ejemplo se le da mucha importancia al desarrollo del pensamiento, de manera textual se extrae del marco curricular[1] lo siguiente:

"Respecto al desarrollo del pensamiento, se busca que los alumnos y las alumnas desarrollen y profundicen las habilidades intelectuales de orden superior relacionadas con la clarificación, evaluación y generación de ideas; que progresen en su habilidad de experimentar y aprender a aprender; que desarrollen la capacidad de predecir, estimar y ponderar los resultados de las propias acciones en la solución de problemas; y que ejerciten y aprecien disposiciones de concentración, perseverancia y rigurosidad en su trabajo".

2.3.1 HABILIDADES A DESARROLLAR EN EDUCACIÓN MEDIA

Entre las habilidades que la Educación Media, es decir, todas las asignaturas que la componen, deben fomentar y desarrollar en el alumnado, se encuentran:

Las de Investigación:

Que tienen relación con la capacidad de identificar, procesar y sintetizar información de una diversidad de fuentes; organizar información relevante acerca de un tópico o problema; revisar planteamientos a la luz de nuevas evidencias y perspectivas; suspender los juicios en ausencia de información suficiente;

[1] Marco Curricular Chileno MINEDUC

Las Habilidades Comunicativas:

Que se vinculan con la capacidad de exponer ideas, opiniones, convicciones, sentimientos y experiencias de manera coherente y fundamentada, haciendo uso de diversas y variadas formas de expresión;

Las de Resolución de Problemas:

Que se ligan tanto con habilidades que capacitan para el uso de herramientas y procedimientos basados en rutinas, como con la aplicación de principios, leyes generales, conceptos y criterios; estas habilidades deben facilitar el abordar, de manera reflexiva y metódica y con una disposición crítica y autocrítica, tanto situaciones en el ámbito escolar como las vinculadas con la vida cotidiana a nivel familiar, social y laboral.

Las de análisis, interpretación y síntesis de información y conocimiento:

Conducentes a que los estudiantes sean capaces de establecer relaciones entre los distintos sectores de aprendizaje; de comparar similitudes y diferencias; de entender el carácter sistémico de procesos y fenómenos; de diseñar, planificar y realizar proyectos; de pensar, monitorear y evaluar el propio aprendizaje; de manejar la incertidumbre y adaptarse a los cambios en el conocimiento.

2.3.2 EL ROL DE LA MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA MEDIA

La matemática ofrece un conjunto amplio de procedimientos de análisis, modelación, cálculo, medición y estimación del mundo natural y social, que permite establecer relaciones entre los más diversos aspectos de la realidad, no sólo cuantitativas y espaciales, sino también cualitativas y predictivas.

El conocimiento matemático forma parte del acervo cultural de nuestra sociedad; es una disciplina cuya construcción empírica e inductiva surge de la necesidad y de el deseo de responder y resolver situaciones provenientes de los más variados ámbitos, tanto de la matemática misma como del mundo de las ciencias naturales, sociales, del arte y la tecnología; su construcción y desarrollo es una creación del ser humano, ligada a la historia y a la cultura.

Su aprendizaje permite enriquecer la comprensión de la realidad, facilita la selección de estrategias para resolver problemas y contribuye al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo. Más específicamente, aprender matemática proporciona herramientas conceptuales para analizar la información cuantitativa presente en las noticias, opiniones, publicidad, aportando al desarrollo de las capacidades de comunicación, razonamiento y abstracción e impulsando el desarrollo del pensamiento intuitivo y la reflexión lógica.

Además, aprender matemática contribuye a que los estudiantes valoren su capacidad para analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas, incorporando formas habituales de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la aplicación y el ajuste de modelos, la flexibilidad para modificar puntos de vista ante evidencias, la precisión en el lenguaje y la perseverancia en la búsqueda de caminos y soluciones.[2]

El aprendizaje de la matemática es un buen aliado para el desarrollo de capacidades no sólo cognitivas (de razonamiento, abstracción, inducción, deducción, reflexión, análisis), sino también para el desarrollo de actitudes, tales como la confianza de los estudiantes en sus propios procedimientos y conclusiones, favoreciendo la autonomía de pensamiento; la disposición para enfrentar desafíos y situaciones nuevas; la capacidad de plantear conjeturas y el cultivo de una mirada curiosa frente al mundo que los rodea; la disposición para cuestionar sus procedimientos, para aceptar que se pueden equivocar y que es necesario detectar y corregir los errores; la apertura al análisis de sus propias estrategias de reflexión, de diversidad de procedimientos y de nuevas ideas.

Asimismo, el aprendizaje de la matemática contribuye al desarrollo de habilidades comunicativas, que hacen más precisa y rigurosa la expresión de ideas y razonamientos, incorporando en el lenguaje y en argumentaciones habituales las diversas formas de expresión matemática (numérica, gráfica,

[2] Marco curricular Chileno MINEDUC.

simbólica, lógica, probabilística y estadística) y comprendiendo los elementos matemáticos cuantitativos y cualitativos (datos, estadísticas, gráficos planos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad y analizándolos autónomamente.

La enseñanza de la matemática debe enfatizar el desarrollo del pensamiento creativo, analógico y crítico para la formulación de conjeturas, exploración de caminos alternativos y discusión de la validez de las conclusiones. Esto supone dar espacio a la experimentación e investigación; incentivar la observación, descripción y clasificación de situaciones concretas y la abstracción de propiedades comunes a un conjunto de objetos reales o simbólicos. Cobra relevancia, entonces, el trabajo en equipo, la comunicación y la confrontación de ideas, la fundamentación de opiniones y argumentos, el examen de sus conexiones lógicas y el apoyo en elementos tecnológicos. Se fomenta, así, en los estudiantes una apreciación equilibrada del valor, función y ámbito de acción de la matemática.

Es necesario que el proceso de aprendizaje se fundamente en contextos significativos y accesibles para los jóvenes, favoreciendo la comprensión por sobre el aprendizaje de reglas y mecanismos sin sentido; se desarrolle en climas de trabajo propicios para la participación, permitiendo que los estudiantes expresen sus ideas, aborden desafíos y perseveren en la búsqueda de soluciones, dispuestos a tolerar cierto nivel de incerteza en el trabajo que realizan; se evalúe teniendo en consideración tanto el proceso de aprendizaje como el resultado del mismo. El estudio de las secciones cónicas se da en el plan diferenciado de enseñanza media. Entre los aprendizajes esperados por los estudiantes tenemos los siguientes:

2.3.3 APRENDIZAJES ESPERADOS[3]

Los alumnos y las alumnas:

- Reconocen que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas.
- Reconocen la recta, circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan.
- Resuelven problemas que involucran intersecciones y/o posiciones relativas de lugares geométricos.

Y por nombrar sólo uno de los varios contenidos mínimos que propone el Ministerio de Educación tenemos el siguiente.

Contenido Mínimo:

- Resolución gráfica y analítica de problemas sencillos que involucren rectas, circunferencia y parábola.

Breve reflexión en torno al Tema

Como podemos ver, a pesar de que las secciones cónicas se enseñan en el plan diferenciado de enseñanza media, tienen relevancia general dadas las características y habilidades que se desarrollan con este tipo de contenido, la capacidad de poder resolver distintos tipos de problemas asociados a contextos reales, le permite a los estudiantes razonar en su toma de decisiones de manera autónoma lo cual incide en las acciones que realizan en su vida.

[3] Op. Cit. en 1

2.4 DEFINICIONES DE CÓNICAS[4].

2.4.1 DEFINICIÓN DE CÓNICAS DE ACUERDO A INVARIANTES

A continuación presentamos un cuadro resumen de las definiciones de las secciones cónicas que nos convocan en esta memoria.

Fue Descartes quien demostró que las secciones cónicas de Apolonio se hallan todas contenidas en un único conjunto de ecuaciones cuadráticas:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Dado que las secciones cónicas incluyen a las circunferencias de los antiguos astrónomos, las elipses de Kepler y la parábola utilizada por Galileo para describir la trayectoria de un proyectil, este descubrimiento de Descartes facilitaba a los físicos una poderosa herramienta, sin la cual el propio Newton se habría visto severamente limitado.

La ecuación general de segundo grado tiene algunas propiedades generales que permiten clasificar cada una de las cónicas según los valores de los parámetros *a, b, c, d, e, f.*

En primer lugar, las siguientes tres cantidades son invariantes con respecto a traslaciones

x` = x + h

y` = y + k

y giros x` = xcosα - ysenα

y` = xcosα + ysenα

[4] Las cónicas y sus aplicaciones, Pedro alegría, 2000

Invariante cúbico: $\Delta \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$

Invariante cuadrático: $\delta \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$

Invariante cuadrático: S = a + c.

De acuerdo a los signos de los mismos y comparando con las ecuaciones canónicas, se deducen las siguientes condiciones para cada tipo de cónica:

$$\text{Si } \delta>0 \text{ y } \begin{cases} \Delta < 0 : elipse\_real \\ \Delta > 0 : elipse\_imaginaria \\ \Delta = 0 : dos\_rectas\_con\_un\_punto\_real\_común \end{cases}$$

$$\text{Si } \delta<0 \text{ y } \begin{cases} \Delta \neq 0 : hiperbole\_real \\ \Delta = 0 : dos\_rectas\_reales\_concurrentes \end{cases}$$

$$\text{Si } \delta=0 \text{ y } \begin{cases} \Delta \neq 0 : parabola\_real \\ \Delta = 0 : dos\_rectas \begin{cases} af - d^2 < 0 paralelas\_reales \\ af - d^2 = 0 .reales\_e\_iguales \\ af - d^2 > 0 .imaginarias \end{cases} \end{cases}$$

2.5 TEORÍAS DEL APRENDIZAJE.

2.5.1 IMPORTANCIA DE LAS TEORÍAS DEL APRENDIZAJE

"Los jóvenes van al colegio a aprender", es la frase recurrente de los apoderados de los establecimientos educacionales a lo largo del país cuando se enteran de las calificaciones de su hijo, al parecer esta frase suena de manera muy simple, pero detrás de ella se esconde una gran cantidad de procesos cognitivos y situaciones adecuadas que permiten lograr tal cometido, los procesos involucrados en el aprender son variados y muchas veces complejos, dependiendo de las capacidades que tengan los estudiantes, del ambiente que se genera en el aula, etc.

En el transcurso de los años se han planteado distintas teorías referentes al aprendizaje, por cierto, teorías que deberían conocer los profesores para poder aplicarlas en sus labores como docentes. Es necesario decir también, que los enfoques educativos han ido cambiando, se están dando prioridad a ciertos aspectos en la educación, hoy, por ejemplo, se pretende una educación centrada en estudiante y no en el profesor como sucedía en las décadas anteriores. Ahora en la nueva perspectiva de la educación, el profesor es un facilitador en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es por esto que pretendemos, en esta parte de nuestra memoria, interiorizarnos en alguna de las nuevas teorías del aprendizaje las cuales creemos serán de importancia para todos aquellos que lean este documento.

No debemos olvidar que la geometría como parte de la matemática tiene la finalidad que los estudiantes sean capaces de razonar, comprender, analizar, evaluar, entre otros aspectos cognoscitivos. En líneas generales, la enseñanza de la geometría apunta a dos grandes objetivos: Por una parte, permite el estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos; y por la otra, pretende en el estudiante el inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico.

2.5.1.1 PSICOLOGÍA EDUCATIVA Y LABOR DOCENTE.

Durante mucho tiempo se consideró que el aprendizaje era sinónimo de cambio de conducta, esto, porque dominó una perspectiva conductista de la labor educativa; sin embargo, se puede afirmar con certeza que el aprendizaje humano va más allá de un simple cambio de conducta, conduce a un cambio en el significado de la experiencia.

La experiencia humana no sólo implica pensamiento, sino también afectividad y únicamente cuando se consideran en conjunto se capacita al individuo para enriquecer el significado de su experiencia.

Para entender la labor educativa es necesario tener en consideración otros tres elementos del proceso educativo: los profesores y su manera de enseñar; la estructura de los conocimientos que conforman el currículo y el modo en que éste se produce y el entramado social en el que se desarrolla el proceso educativo.

Lo anterior se desarrolla dentro de un marco psicoeducativo, puesto que la psicología educativa trata de explicar la naturaleza del aprendizaje en el salón de clases y los factores que lo influyen, estos fundamentos psicológicos proporcionan los principios para que los profesores descubran por sí mismos los métodos de enseñanza más eficaces, puesto que muchos de ellos intentan descubrir métodos por “Ensayo y error” lo cual es muchas veces un procedimiento ciego y, por tanto innecesariamente difícil y antieconómico[5]. En este sentido una "teoría del aprendizaje" ofrece una explicación sistemática, coherente y unitaria del ¿cómo se aprende?, ¿Cuáles son los límites del aprendizaje?, ¿Porqué se olvida lo aprendido?, ahora si el docente desempeña su labor fundamentándola en principios de aprendizaje bien establecidos, podrá racionalmente elegir nuevas técnicas de enseñanza y mejorar la efectividad de su labor.

La teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, ofrece el marco apropiado para el desarrollo de la labor educativa para el diseño de técnicas educacionales coherentes con tales principios, constituyéndose en un marco teórico que favorecerá dicho proceso.

2.5.1.2 CONCEPCIONES ERRADAS DE LA EDUCACIÓN

Existen algunos de los problemas o creencias equivocadas que dificultan el proceso de enseñanza- aprendizaje, entre ellas podemos nombrar tres.

- El profesor es quien enseña y el alumno es el que aprende.

[5] AUSUBEL: 1983.

- Razonar es sólo una tarea del alumno.
- Lo que verdaderamente importa es la respuesta correcta.

En la actualidad se pretende que estas falacias sean corregidas para crear una atmósfera ideal y así fortalecer el proceso enseñanza-aprendizaje.

2.5.2 EL CONSTRUCTIVISMO

"Se sustenta en la premisa de que cada persona construye su propia perspectiva del mundo que le rodea a través de sus propias experiencias y esquemas mentales desarrollados. El constructivismo se enfoca en la preparación del que aprende para resolver problemas en condiciones ambiguas"[6].

Es un enfoque que sostiene que el individuo, tanto en los aspectos cognoscitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. El conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, que se realiza con los esquemas que ya posee, con lo que ya construyó en su relación con el medio que la rodea.

En pedagogía, es una corriente que afirma que el conocimiento de todas las cosas es un proceso mental del individuo, que se desarrolla de manera interna conforme el individuo obtiene información e interactúa con su entorno.[7]

[6] Schuman, 1996
[7] http://www.ecourban.org/plaintext/profesores/didactica/constructivismo/index.html

2.5.2.1 IDEAS FUNDAMENTALES DE LA CONCEPCIÓN CONSTRUCTIVISTA[8]

La concepción constructivista del aprendizaje y de la enseñanza se organiza en torno a tres ideas fundamentales:

1. El estudiante es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje.

Es él quien construye el conocimiento y nadie puede sustituirle en esa tarea. La importancia prestada a la actividad del estudiante no debe interpretarse en el sentido de un acto de descubrimiento o de invención sino en el sentido de que es él quien aprende y, si él no lo hace, nadie, ni siquiera el facilitador, puede hacerlo en su lugar. La enseñanza está totalmente mediatizada por la actividad mental constructiva del estudiante. Este no es sólo activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, sino también cuando lee o escucha las explicaciones del facilitador.

2. La actividad mental constructiva del estudiante se aplica a contenidos.

Esta actividad mental constructiva se aplica a aquellos contenidos que ya poseen un grado considerable de elaboración, es decir, que es el resultado de un cierto proceso de construcción a nivel social.

Los estudiantes construyen objetos de conocimiento que de hecho están elaborados. Los estudiantes construyen el sistema de la lengua escrita, pero este sistema ya está diseñado; los estudiantes construyen las operaciones aritméticas elementales, pero estas operaciones ya están definidas; construyen el concepto de tiempo histórico, pero este concepto forma parte del bagaje cultural existente; construyen las normas de relación social, pero estas normas son las que regulan normalmente las relaciones entre las personas.

[8] Op. Cit.20

3. El hecho que la actividad constructiva del estudiante se aplique a unos contenidos de aprendizaje preexistente condiciona el papel que está llamado a desempeñar el facilitador.

Su función no puede limitarse únicamente a crear las condiciones óptimas para que el estudiante despliegue una actividad mental constructiva rica y diversa; el facilitador ha de intentar, además, orientar esta actividad con el fin de que la construcción del estudiante se acerque de forma progresiva a lo que significan y representan los contenidos como saberes culturales.

2.5.2.2 EL APRENDIZAJE SEGÚN EL CONSTRUCTIVISMO[9]

El Constructivismo ve el aprendizaje como un proceso en el cual el estudiante construye activamente nuevas ideas o conceptos basados en conocimientos presentes y pasados. En otras palabras, "el aprendizaje se forma construyendo nuestros propios conocimientos desde nuestras propias experiencias"[10] . Solución de problemas reales o simulaciones, normalmente en colaboración con otros estudiantes. Esta colaboración también se conoce como proceso social de construcción del conocimiento. Algunos de los beneficios de este proceso social son[11]:

- Los estudiantes pueden trabajar para clarificar y para ordenar sus ideas y también pueden contar sus conclusiones a otros estudiantes.
- Eso les da oportunidades de elaborar lo que aprendieron.

Los teóricos cognitivos como Jean Piaget y David Ausubel, entre otros, plantearon que aprender era la consecuencia de desequilibrios en la comprensión de un estudiante y que el ambiente tenía una importancia fundamental en este proceso. El Constructivismo en sí mismo tiene muchas variaciones, tales como Aprendizaje Generativo, Aprendizaje Cognoscitivo, Aprendizaje basado en Problemas, Aprendizaje por Descubrimiento, Aprendizaje Contextualizado y

[9] Constructivismo pedagogía, Wikipedia la enciclopedia libre
[10] Ormrod, J. E., Educational Psychology: Developing Learners, Fourth Edition. 2003, p. 227
[11] Ormrod, J. E., Educational Psychology: Developing Learners, Fourth Edition. 2003, p. 232

Construcción del Conocimiento. Independientemente de estas variaciones, el Constructivismo promueve la exploración libre de un estudiante dentro de un marco o de una estructura dada, misma estructura que puede ser de un nivel sencillo hasta un nivel más complejo, el cual es conveniente que los estudiantes desarrollen actividades centradas en sus habilidades así pueden consolidar sus aprendizajes adecuadamente

2.5.2.3 TEORÍA DEL CONSTRUCTIVISMO[12]

La formalización de la teoría del Constructivismo se atribuye generalmente a Jean Piaget, que articuló los mecanismos por los cuales el conocimiento es interiorizado por el que aprende. Piaget sugirió que a través de procesos de acomodación y asimilación, los individuos construyen nuevos conocimientos a partir de las experiencias. La asimilación ocurre cuando las experiencias de los individuos se alinean con su representación interna del mundo. Asimilan la nueva experiencia en un marco ya existente. La acomodación es el proceso de reenmarcar su representación mental del mundo externo para adaptar nuevas experiencias. La acomodación se puede entender como el mecanismo por el cual el incidente conduce a aprender. Cuando actuamos con la expectativa de que el mundo funciona en una forma y no es cierto, fallamos a menudo. Acomodando esta nueva experiencia y rehaciendo nuestra idea de cómo funciona el mundo, en donde aprendemos de cada experiencia.

Es importante observar que el Constructivismo en sí mismo no sugiere un modelo pedagógico determinado, la teoría del Constructivismo sugiere que construyen su conocimiento. El Constructivismo como descripción del conocimiento humano se confunde a menudo con las corrientes pedagógicas que promueven el aprendizaje mediante la acción (las corrientes pedagógicas se justifican mediante la acción) de buscar cómo afecta en la sociedad, de qué sirve que estudiemos educación, en qué nos va a beneficiar.

[12] Constructivismo pedagogía, Wikipedia la enciclopedia libre

Corrientes Pedagógicas basadas en el Constructivismo

Hay muchas corrientes pedagógicas que utilizan la teoría constructivista. La mayoría de los acercamientos que han nacido desde el Constructivismo sugieren que el aprendizaje se logra mejor tocando los objetos. Los que aprenden lo hacen mediante la experimentación y no porque que se les explique lo que sucede. También acentúa que el aprender no es un proceso de “todo o nada” sino que los estudiantes aprenden la nueva información que se les presenta construyendo sobre el conocimiento que ya poseen.

Es importante que los profesores determinen constantemente el conocimiento que sus estudiantes han ganado y con esto cerciorarse de que las percepciones de los estudiantes son las que esperaba el profesor.

Se conoce como error de la reconstrucción cuando llenamos los agujeros de nuestro entendimiento con lógicos, aunque incorrectos, pensamientos. Los profesores necesitan atrapar e intentar corregir estos errores, aunque es inevitable que algunos errores de reconstrucción continuarán ocurriendo debido a nuestras limitaciones innatas de recuperación.

En la mayoría de las corrientes pedagógicas basadas en el Constructivismo, el papel del profesor no es sólo observar y determinar, sino también, conectarse con los estudiantes mientras ellos están realizando actividades planteándoles preguntas a los estudiantes para estimular su razonamiento[13].

Los profesores también intervienen cuando se presenta un conflicto; sin embargo, ellos simplemente facilitan a los estudiantes su resolución de los problemas y estimulan la autoregulación, con un énfasis en que los conflictos son de los estudiantes y deben resolverlos por sí mismos.

Las teorías pedagógicas que se acercan al Constructivismo desde la Educación, incluyen:

- El aprender recíproco
- Procedimientos de facilitación de la escritura

[13] DeVries y otros., 2002

- Tutores cognitivos
- Enseñanza dirigida cognitivamente
- Aprendizaje anclado[14] - los problemas y los acercamientos a las soluciones se encajan en un ambiente narrativo
- El aprendizaje colaborativo[15]- el aprendizaje se alcanza por la integración en una cultura implícita y explícita específica del conocimiento
- Flexibilidad cognitiva[16] -una investigación y programa de desarrollo profesional del profesor en matemáticas elementales creado por Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema y sus colaboradores en la Universidad de Wisconsin-Madison. Su premisa importante es que los profesores pueden utilizar las estrategias informales de los estudiantes. Es decir, construcción de las estrategias de los estudiantes basada en su comprensión de situaciones cotidianas como base primaria para las matemáticas de enseñanza en los grados elementales.

Una definición práctica del Constructivismo Social

El constructivismo social expone que el ambiente de aprendizaje más óptimo es aquel donde existe una interacción dinámica entre los instructores, los estudiantes y las actividades que les proveen oportunidades de crear su propia verdad gracias a la interacción con los otros. Esta teoría, por lo tanto, enfatiza la importancia de la cultura y el contexto para el entendimiento de lo que está sucediendo en la sociedad y para construir conocimiento basado en este entendimiento.

[14] Bransford y otros
[15] Collins y otros
[16] Spiro y cols

Cómo el Constructivismo impacta en el Aprendizaje

En el currículum (plan de estudios). El Constructivismo plantea la eliminación de un plan de estudios estandarizado. En su lugar, promueve el uso de programas personalizados de acuerdo a requisitos particulares al conocimiento anterior de los estudiantes. También pone énfasis en metodologías de solucionar problemas prácticos.

Instrucción. Bajo la teoría del Constructivismo, los educadores se centran en hacer conexiones entre diversos hechos y fomentar una nueva comprensión en los estudiantes. Los instructores adaptan sus estrategias de enseñanza a las respuestas del estudiante y animan a que analicen, interpreten, y predigan la información. Los profesores también confían realmente en preguntas de respuestas abiertas y promueven el diálogo extenso entre los propios estudiantes.

Evaluación. El Constructivismo hace un llamado para la eliminación de grados y de los test estandarizados. En su lugar, la evaluación debe llegar a ser parte del proceso de aprendizaje de modo que los estudiantes desempeñen un papel más vital en juzgar su propio progreso.

Características de un profesor constructivista

- Acepta e impulsa la autonomía e iniciativa del estudiante.
- Hace uso de materiales físicos, interactivos y manipulables.
- Usa terminología cognitiva tal como: Clasificar, analizar, predecir, crear, inferir, deducir, estimar, elaborar, pensar.
- Investiga acerca de la comprensión de conceptos que tienen los estudiantes, antes de compartir con ellos su propia comprensión de estos conceptos.

- Desafía la indagación haciendo preguntas que necesitan respuestas muy bien reflexionadas y desafía también a que se hagan preguntas entre ellos[17].

2.5.3 TEORÍA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE AUSUBEL.

Ahora nos interiorizaremos en un aspecto que tiene relevancia para los actores de la educación este tiene relación con el "aprender a aprender",

Esta frase persigue con mayor interés el enseñar al estudiante a aprender por sí mismo, independiente, autorregulado que sean capaces de "aprender a aprender". En palabras simples "Aprender a aprender" significa la reflexión sobre el propio aprendizaje (Metacognisión), crear su propia ruta hacia el aprendizaje, construyendo sus herramientas para conseguirlo. La construcción del conocimiento se produce a través de la interacción mental con el mundo físico y social, en oposición con la mera recuperación de esa realidad.

Así mismo la cognición y el aprendizaje han dejado de ser considerados como procesos racionales puros, para estudiarse como procesos que involucran la emoción[18].

Existe un consenso entre investigadores y educadores en torno a seis afirmaciones del aprendizaje.

- El aprendizaje está orientado por dos tipos de objetivos: la comprensión de un contenido o conocimiento particular y la regulación del propio aprendizaje.
- Consiste en establecer relaciones entre la información previa y el nuevo conocimiento, según la ciencia cognitiva lo anterior es posible gracias a los llamados esquemas, que son estructuras donde la mente almacena el conocimiento.

---

[17]http://www.monografias.com/trabajos11/constru/constru.shtml
[18] http://boards2.melodysoft.com/sistemase/re-septimo-topico-de-discusion-modelo-134.html

- El aprendizaje implica organizar el conocimiento o la información, relacionando de esta forma los conceptos viejos con los nuevos.
- El aprendizaje implica adquisición de un repertorio de estrategias cognitivas y metacognitivas, adquiriendo la conciencia y control sobre lo que se aprende y como utilizar el mismo.
- El aprendizaje ocurre por fases, es un proceso no lineal dinámico, consiste en 3 fases, a) prepararse para el aprendizaje, b) Procesamiento, c) consolidación o extensión de lo aprendido y finalmente.
- El aprendizaje está influenciado por el desarrollo.

Uno de los mejores representantes de este modelo educativo es Ausubel. Teoría en al cual profundizaremos desde ahora en nuestro trabajo.

2.5.3.1 LA PERSPECTIVA DE AUSUBEL[19]:

En los años setenta las propuestas de Bruner sobre el Aprendizaje por Descubrimiento estaban tomando fuerza. En ese momento, las escuelas buscaban que los niños construyeran su conocimiento a través del descubrimiento de contenidos.

Ausubel considera que el aprendizaje por descubrimiento no debe ser presentado como opuesto al aprendizaje por exposición (recepción), ya que éste puede ser igual de eficaz, si se cumplen ciertas características.

De acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que él se interese por aprender lo que se le está mostrando.

En 1963, Ausubel hizo su primer intento de explicación de una teoría cognitiva del aprendizaje verbal significativo publicando “The Psychology of Meaningful Verbal Learning”; en el mismo año se celebró en Illinois el Congreso

[19] http://www.monografias.com/trabajos10/dapa/dapa.shtml

Phi, Delta, Kappa, en el que intervino con la ponencia “Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento”.

Cuarenta años de vigencia tiene esta teoría, lo que justifica su fuerza explicativa. Mucho tiempo, sin duda, en el que los profesionales de la educación se han familiarizado con la idea de significatividad del aprendizaje

2.5.3.2 ¿QUÉ ES LA TEORÍA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO?

Se puede considerar en palabras resumidas como una teoría psicológica del aprendizaje en el aula. Ausubel (1973, 1976, 2002) ha construido un marco teórico que pretende dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la adquisición y la retención de los grandes cuerpos de significado que se manejan en la escuela. Es una teoría psicológica porque se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma, ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación[20].

Es una teoría de aprendizaje porque ésa es su finalidad. La Teoría del Aprendizaje Significativo aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo. Se trata de una teoría constructivista, ya que es el propio individuo-organismo el que genera y construye su aprendizaje.

El origen de la Teoría del Aprendizaje Significativo está basado en el interés que tiene Ausubel por conocer y explicar las condiciones y propiedades del aprendizaje, lo que se puede relacionar con formas efectivas y eficaces de

[20] Ausubel, 1976

provocar de manera deliberada cambios cognitivos estables, susceptibles de dotar de significado individual y social[21].

Como se quiere conseguir que los aprendizajes que se producen en la escuela sean significativos, Ausubel entiende que una teoría del aprendizaje escolar que sea realista y científicamente viable, debe ocuparse del carácter complejo y significativo que tiene el aprendizaje verbal y simbólico. Así mismo, y con objeto de lograr esa significatividad, debe prestar atención a todos y cada uno de los elementos y factores que afectan y que pueden ser manipulados para tal fin.

2.5.3.3 VENTAJAS DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO:

- Produce una retención más duradera de la información.
- Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.
- La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.
- Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del estudiante.
- Es personal, ya que la significación del aprendizaje depende los recursos cognitivos del estudiante.

2.5.3.4 CONCEPTOS CLAVE DE LA TEORÍA DE AUSUBEL[22]

El aprendizaje significativo es el proceso donde se relaciona un nuevo conocimiento con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce

[21] Op. Cit. 32
[22] http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf

considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje[23].

La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo[24], pero no se trata de una simple unión, sino que en este proceso los nuevos contenidos adquieren significado para el sujeto produciéndose una transformación de los subsumidores de su estructura cognitiva, que resultan así progresivamente más diferenciados, elaborados y estables. Pero aprendizaje significativo no es sólo este proceso, sino que también es su producto. La atribución de significados que se hace con la nueva información es el resultado emergente de la interacción entre los subsumidores claros, estables y relevantes presentes en la estructura cognitiva y esa nueva información o contenido; como consecuencia del mismo, esos subsumidores se ven enriquecidos y modificados, dando lugar a nuevos subsumidores o ideas-ancla más potentes y explicativas que servirán de base para futuros aprendizajes.

2.5.3.5 REQUISITOS DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO:

Significatividad lógica del material: el material que presenta el maestro al estudiante debe estar organizado, para que se dé una construcción de conocimientos.

Significatividad psicológica del material: que el estudiante conecte el nuevo conocimiento con los previos y que los comprenda. También debe poseer una memoria de largo plazo, de lo contrario se le olvidará todo en poco tiempo.

Actitud favorable del estudiante: ya que el aprendizaje no puede darse si el estudiante no quiere. Este es un componente de disposiciones emocionales y actitudinales, donde el maestro sólo puede influir a través de la motivación.

Atendiendo al objeto aprendido, el aprendizaje significativo puede ser representacional, de conceptos y proposicional. Si se utiliza como criterio la

[23] Ausubel, 1976, 2002; Moreira, 1997
[24] Moreira, 2000

organización jerárquica de la estructura cognitiva, el aprendizaje significativo puede ser subordinado, superordenado o combinatorio.

Para Ausubel lo que se aprende son palabras u otros símbolos, conceptos y proposiciones. Dado que el aprendizaje representacional conduce de modo natural al aprendizaje de conceptos y que éste está en la base del aprendizaje proposicional, los conceptos constituyen un eje central y definitorio en el aprendizaje significativo.

A través de la asimilación se produce básicamente el aprendizaje en la edad escolar y adulta. Se generan así combinaciones diversas entre los atributos característicos de los conceptos que constituyen las ideas de anclaje, para dar nuevos significados a nuevos conceptos y proposiciones, lo que enriquece la estructura cognitiva. Para que este proceso sea posible, hemos de admitir que contamos con un importantísimo vehículo que es el lenguaje: el aprendizaje significativo se logra por intermedio de la verbalización y del lenguaje y requiere, por tanto, comunicación entre distintos individuos y con uno mismo.

2.5.3.6 PRINCIPIOS DE AUSUBEL

En la programación del contenido de una disciplina encaminada a la consecución de aprendizajes significativos en el alumnado han de tenerse en cuenta tres principios[25]:

Diferenciación progresiva: cuando el concepto nuevo se subordina a conceptos más inclusores que el estudiante ya conocía.

Reconciliación integradora: cuando el concepto nuevo es de mayor grado de inclusión que los conceptos que el estudiante ya conocía

Consolidación: cuando el concepto nuevo tiene la misma jerarquía que los conocidos.

[25] Ausubel, 1976

Resumiendo los tipos de aprendizaje significativo tenemos:

Aprendizaje de representaciones: es cuando el niño adquiere el vocabulario. Primero aprende palabras que representan objetos reales que tienen significado para él. Sin embargo no los identifica como categorías.

Aprendizaje de conceptos: el niño, a partir de experiencias concretas, comprende que la palabra "mamá" puede usarse también por otras personas refiriéndose a sus madres. También se presenta cuando los niños en edad preescolar se someten a contextos de aprendizaje por recepción o por descubrimiento y comprenden conceptos abstractos como "gobierno", "país", "mamífero"

Aprendizaje de proposiciones: cuando conoce el significado de los conceptos, puede formar frases que contengan dos o más conceptos en donde afirme o niegue algo. Así, un concepto nuevo es asimilado al integrarlo en su estructura cognitiva con los conocimientos previos.

Ausubel concibe los conocimientos previos del estudiante en términos de esquemas de conocimiento, los cuales consisten en la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad. Estos esquemas incluyen varios tipos de conocimiento sobre la realidad, como son: los hechos, sucesos, experiencias, anécdotas personales, actitudes, normas, etc.

2.5.3.7 APLICACIONES PEDAGÓGICAS.

El maestro debe conocer los conocimientos previos del estudiante, es decir, se debe asegurar que el contenido a presentar pueda relacionarse con las ideas previas, ya que al conocer lo que sabe el estudiante ayuda a la hora de planear.

Organizar los materiales en el aula de manera lógica y jerárquica, teniendo en cuenta que no sólo importa el contenido sino la forma en que se presenta a los estudiantes.

Considerar la motivación como un factor fundamental para que el estudiante se interese por aprender, ya que el hecho de que se sienta contento en su clase, con una actitud favorable y una buena relación con el maestro, hará que se motive para aprender.

El maestro debe tener utilizar ejemplos, por medio de dibujos, diagramas o fotografías, para enseñar los conceptos.

2.5.3.8 APORTES DEL CONSTRUCTIVISMO[26]

El principal aporte es su modelo de enseñanza por exposición, para promover el aprendizaje significativo en lugar del aprendizaje de memoria. Este modelo consiste en explicar o exponer hechos o ideas. Este enfoque es de los más apropiados para enseñar relaciones entre varios conceptos, pero antes los estudiantes deben tener algún conocimiento de dichos conceptos. Otro aspecto en este modelo es la edad de los estudiantes, ya que ellos deben manipular ideas mentalmente, aunque sean simples. Por esto, este modelo es más adecuado para los niveles más altos de primaria en adelante.

Otro aporte al constructivismo son los organizadores anticipados, los cuales sirven de apoyo al estudiante frente a la nueva información que funciona como un puente entre el nuevo material y el conocimiento actual del estudiante. Estos organizadores pueden tener tres propósitos: dirigir su atención a lo que es importante del material; resaltar las relaciones entre las ideas que serán presentadas y recordarle la información relevante que ya posee.

Los organizadores anticipados se dividen en dos categorías:

Comparativos: activan los esquemas ya existentes, es decir, le recuerdan lo que ya sabe pero no se da cuenta de su importancia. También puede señalar diferencias y semejanzas de los conceptos.

Explicativos: proporcionan conocimiento nuevo que los estudiantes necesitarán para entender la información subsiguiente. También ayudan al estudiante a aprender, especialmente cuando el tema es muy complejo, desconocido o difícil; pero estos deben ser entendidos por los estudiantes para que sea efectivo.

[26] http://www.monografias.com/trabajos10/dapa/dapa.shtml

2.5.3.9 RELACIONES Y DIFERENCIAS DE AUSUBEL CON RESPECTO A PIAGET, VIGOTSKY, BRUNER Y NOVAK.

Piaget: Coincide en la necesidad de conocer los esquemas de los alumnos. Ausubel no comparte con él la importancia de la actividad y la autonomía. Ni los estadios piagetianos ligados al desarrollo como limitantes del aprendizaje, por lo tanto, él considera que lo que condiciona es la cantidad y calidad de los conceptos relevantes y las estructuras proposicionales del estudiante.

Vigotsky: Comparte con él la importancia que le da a la construcción de su historia de acuerdo a su realidad.

Bruner: Ausubel considera que el aprendizaje por descubrimiento es poco eficaz para el aprendizaje de la ciencia.

Novak: Lo importante para ambos es conocer las ideas previas de los alumnos.

Proponen la técnica de los mapas conceptuales a través de dos procesos: diferenciación progresiva y reconciliación integradora[27].

David Paul Ausubel es un psicólogo que ha dado grandes aportes al constructivismo, como es su teoría del Aprendizaje Significativo y los organizadores anticipados, los cuales ayudan al estudiante a que vaya construyendo sus propios esquemas de conocimiento para alcanzar una mejor comprensión de los conceptos.

Para conseguir este aprendizaje se debe tener un adecuado material, las estructuras cognitivas del estudiante, y sobre todo la motivación.

[27] Op. Cit 38

***CAPÍTULO 3* “MATERIAL COMPLEMENTARIO PARA LA ENSEÑANZA DE SECCIONES CÓNICAS EN EDUCACIÓN MEDIA”.**

3.1 CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL PROPUESTO

A continuación se presenta un conjunto interesante de problemas de aplicación, que servirán de apoyo a la labor docente en el contenido de secciones cónicas. El objetivo de estos planteamientos es llevar tanto a alumnos como a profesores, a profundizar en las diferentes utilidades y usos que se pueden realizar con éste tipo de curvas, las cuales tienen mucha relevancia en la historia del ser humano.

Debemos decir que la enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo y significativo. Lo que en el fondo se persigue es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de los problemas. Consideramos un verdadero problema cuando el estudiante se encuentra en una situación desde la que quiere llegar a otra, unas veces este proceso es conocido, pero en otras oportunidades no se conoce el camino para llegar a la solución o a la respuesta correcta.

Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas. La apariencia exterior puede ser engañosa. También en un ejercicio se expone una situación y se pide que se llegue a otra, la enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe dejar a un lado en absoluto, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de formar pensamientos eficaces.

Esperamos con este trabajo poder contribuir a la enseñanza de esta hermosa disciplina llamada matemática, sin la cual muy pocos avances se habrían logrado en la historia de la humanidad.

3.2 INTRODUCCIÓN A LA PARÁBOLA Y SU UTILIDAD

Para esta sección cónica tenemos que cualquier cuerpo lanzado al aire de forma oblicua u horizontal describe un movimiento parabólico bajo la acción de la gravedad. Por ejemplo es el caso de una pelota que se desplaza botando.

También, el caso de los chorros y las gotas de agua que salen de los tubos de las numerosas fuentes que podemos encontrar en las ciudades.

El desplazamiento bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra permite obtener bonitos arcos parabólicos. También obtenemos formas parabólicas cuando un haz luminoso de forma cónica se proyecta sobre una pared blanca de manera que la pared sea paralela a la generatriz del cono.

Una de las propiedades más importantes de las formas parabólicas es que cualquier rayo que incida de forma paralela al eje de la parábola rebota en su superficie pasando por el foco. La parábola sirve para concentrar los rayos de luz en un punto, el foco, en el caso de la cocina solar, o las radiaciones electromagnéticas, en general, en las antenas parabólicas, las antenas satelitales y radiotelescopios. Pero también sirve, como en el caso del faro de un coche, para conseguir que la luz que sale del foco se concentre en un haz más o menos cerrado.

3.2.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS CON PARÁBOLAS.

A continuación se presenta una serie de 10 ejercicios en los cuales se pretende que el estudiante aprenda la utilidad y la aplicación de la sección cónica denominada parábola junto con sus principales características.

En el transcurso de los problemas el lector se percatará que a veces es necesario utilizar otros conceptos lo cual, una vez más, muestra que la matemática no es una isla en medio del conocimiento sino más bien un complemento a la labor del saber humano.

3.2.2 PRESENTACIÓN DEL MATERIAL DE PARÁBOLA

Trabajemos resolviendo los siguientes Problemas de Planteo.

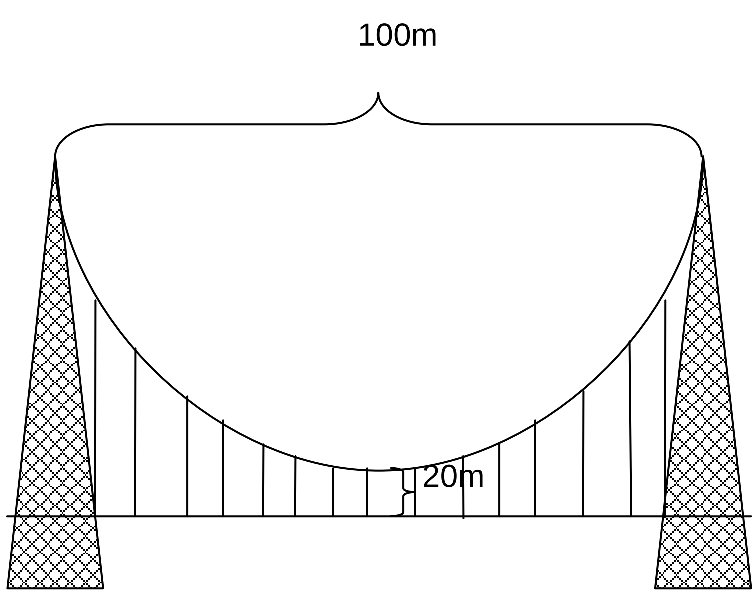
Problema Nº 1 “El puente colgante”

Objetivo del Problema:

- **Entender la utilidad de la parábola en la construcción de un puente**
- **Interpretar y graficar los datos entregados en el problema.**

Planteo del Problema.

1) En un puente colgante, el cable del cual se sostiene describe una parábola. Este cable esta afirmado en sus extremos por dos torres cuya distancia entre ellas es de 200m. Si la distancia desde el punto más bajo de este cable hasta la superficie del puente es de 20m. ¿Cuál es la altura desde la superficie del puente hasta la cima de la torre?



1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿Qué figura geométrica describe el cable que sostiene el puente?

Por la distancia que tienen las torres que sostienen el puente consideraremos que el cable describe una parábola. Al final del ejercicio aclararemos el porqué consideramos esta figura como una parábola.

¿Cuál es el punto más bajo de esta curva?

Al punto más bajo lo llamaremos vértice de la parábola que describe.

Debes darte cuenta: La superficie del puente para nuestro ejercicio cumplirá con ciertas características especiales y lo llamaremos directriz.

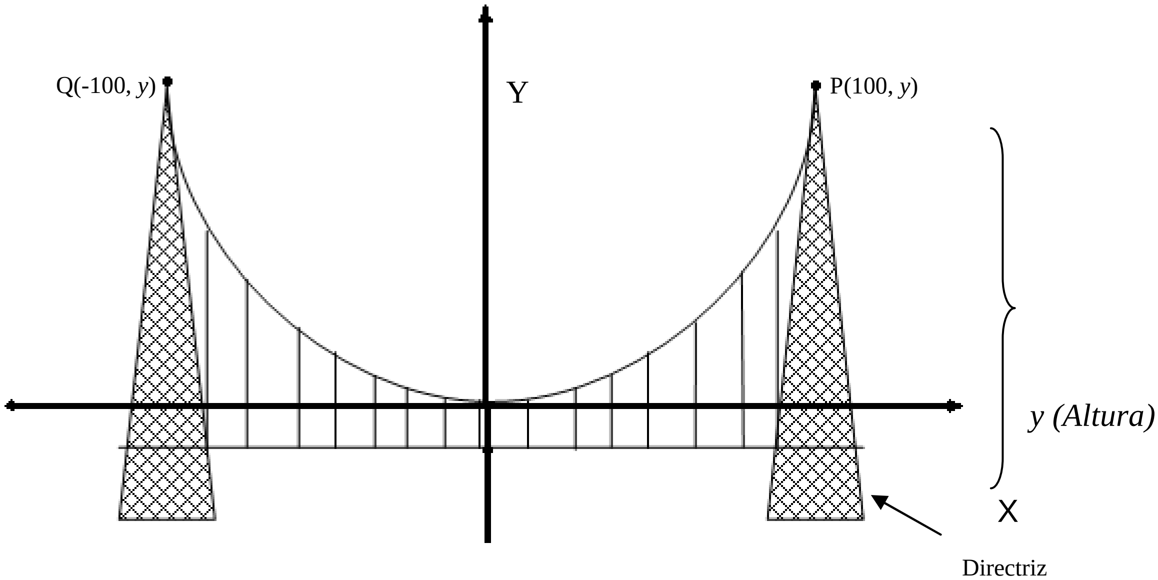
Y Como indica el enunciado la distancia que hay entre el punto más bajo del cable (vértice) y la superficie (directriz) es de 20 m.

Debes darte cuenta: Que si trazamos una recta perpendicular a la directriz y que pase por el vértice de la parábola esta se llamará eje de la parábola. Este eje de la parábola también pasará por otro punto importante de ésta llamado Foco, el cual tendrá una distancia al vértice igual a la que hay entre el vértice y la directriz.

2º Representación Gráfica.

Colocaremos el vértice de la parábola en el origen del plano de tal forma que el eje *y* sea el eje de la parábola el cual es perpendicular a la directriz cuya distancia al vértice es de 20m. Una de las torres tendrá como coordenadas en su parte superior al punto P(100,y) y la otra torre Q(-100,y). Véase la siguiente figura.

El siguiente grafico muestra la situación planteada



Como se puede ver en la figura, la ecuación de la parábola, que describe el cable, es de la forma $x^2=4py$.

3º Cálculos y Desarrollo.

En este caso el foco será el punto (0,p) y la ecuación de la directriz es y=-p, donde p=-20.

Luego Tenemos

$$x^2 = 4 \cdot 20y$$

$$x^2 = 80y$$

Como el punto *P(100,y)* debe satisfacer la ecuación $x^2 = 80y$, podemos reemplazar y despejar la coordenada *y*.

$$100^2 = 80y$$

$$y = \frac{10000}{80}$$

$$y = 125$$

Luego tenemos que el punto *P* tiene coordenadas *x=100, y=125.*

Por lo tanto, la altura de la torre será la distancia entre la directriz y el punto *P*. (distancia *h)*

$$h=20+125$$

$$h=135$$

Luego podemos concluir: La altura de la torre es 135m.

Si nos pidieran el foco de esta parábola. ¿Cuál sería?

El foco se encuentra en el eje de la parábola cuya distancia al vértice es la misma que del vértice a la directriz. Entonces el foco es *F(0,20).*

No olvides: **La curva que describe un cable que está fijo por sus dos extremos y no está sometido a otras fuerzas distintas que su propio peso es una catenaria. La catenaria se confundió al principio con la parábola, hasta que el problema lo resolvieron los hermanos Bernoulli simultáneamente con Leibniz y Huygens.**

Para distancias más cortas que 500 metros la curva de la catenaria se asemeja a la de la parábola, es por esta razón que podemos hacer los cálculos con esta cónica.

Problema Nº 2 “Golpeando un balón”

Objetivo del Problema:

- **Aplicar fórmulas físicas para resolver el problema.**
- **Interpretar los datos entregados en el enunciado.**

Planteo del Problema.

2) Deduzca la ecuación que modele la trayectoria de un balón de fútbol golpeado por un jugador con rapidez inicial de 50 m/s y un ángulo de elevación de 30º. Trace la trayectoria, indique a qué distancia del futbolista cae el balón y cuánto tiempo permanece en el aire.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿Alguna vez has visto la trayectoria que describe un balón cuando es golpeado por un futbolista?

En física esta aplicación es llamada “Lanzamiento de proyectil”, cuya trayectoria esta descrita por una parábola.

En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico:

Las ecuaciones del lanzamiento de proyectil son las siguientes:

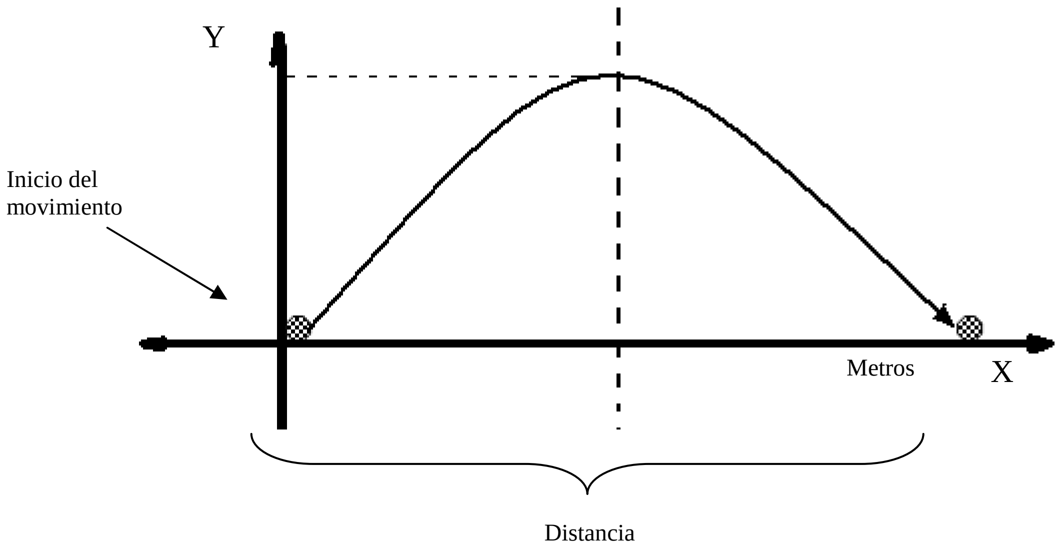
- $x = x_0 + (v_{0x} \cdot Cos\sigma)t$
- $y = (v_{0y} \cdot Sen\sigma)t + \dfrac{gt^2}{2}$

Donde x_0 e y_0 son las coordenadas del punto de inicio del movimiento y v_0 es la velocidad inicial.

2º Representación Gráfica.

Debes darte cuenta: Para resolver este problema colocaremos, por comodidad de los cálculos, el punto $(x_0 y_0)$ En el origen de plano cartesiano como indica la figura.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



De esta forma todos los cálculos que realicemos se simplificarán ya que $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3º Cálculos y Desarrollo.

Las ecuaciones que modelan la trayectoria del balón son:

$$x = (50 \cdot Cos30)t \qquad y = (50Sen30)t + \frac{gt^2}{2}$$

Resolviendo tenemos

$$x = 43{,}3t \qquad y = 25t - 4.9t^2$$

Debes darte cuenta: En el lanzamiento de proyectil debemos saber que la coordenada *y* se hace cero al momento de iniciar y terminar el movimiento ya que en ambos casos el balón estará sobre el piso.

Luego para deducir el tiempo de vuelo del balón reemplazamos en la ecuación $y = 25t - 4.9t^2$ el valor *y = 0.*

Quedando: $0 = 25t - 4{,}9t^2$

$$0 = t(25 - 4{,}9t)$$

$$t = 0\,; \quad t = 5{,}1$$

Luego el tiempo de vuelo es de 5,1 segundos.

Se observa que: Para saber a qué distancia cae el balón del futbolista sólo tenemos que reemplazar en la ecuación *x=43,3t* el tiempo de vuelo 5,1 segundos.

$$x = 43{,}3 \cdot 5{,}1$$

$$x = 220{,}8$$

Luego podemos concluir: Luego la distancia desde la salida del balón hasta que cayó es de 220,8 metros.

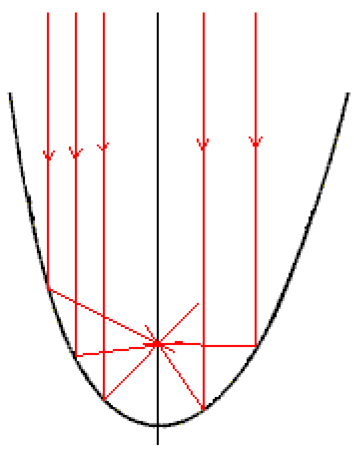
Problema Nº 3 “Recibiendo información del espacio”

Objetivo del Problema:

- **Aplicar propiedades de la parábola.**
- **Interpretar y graficar datos entregados.**

Importante: El foco de una parábola cumple una propiedad basada en el teorema siguiente:

“*La normal a la parábola en un punto P cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de P y la recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola” (vea la figura siguiente).*



En otras palabras si un rayo llega paralelo al eje de una parábola al chocar con ella este se desviará pasando justamente por el foco de esta.

Planteo del Problema.

3) Un satélite envía información a la tierra la cual es recibida por una antena con forma de parábola que está en el desierto sobre una superficie plana. Desde un extremo de la antena al otro hay 6m. de distancia y desde un extremo al suelo hay 2m.

¿Dónde debe estar ubicado el receptor de la antena para captar mejor la información, si la información enviada a través de rayos llega en forma perpendicular al suelo del desierto?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: Como la antena tiene forma de parábola podemos ocupar la propiedad antes enunciada.

¿Puedes ubicar algún punto de la parábola con los datos entregados?

Debes darte cuenta: que los extremos de la antena receptora son puntos de la parábola, por lo cual las coordenadas de estos puntos dependen del lugar donde ubiques la parábola en el gráfico.

Para facilitar los cálculos es mejor ubicar la parábola con vértice en el origen, **¿Cuál será la forma de la ecuación de la parábola?**

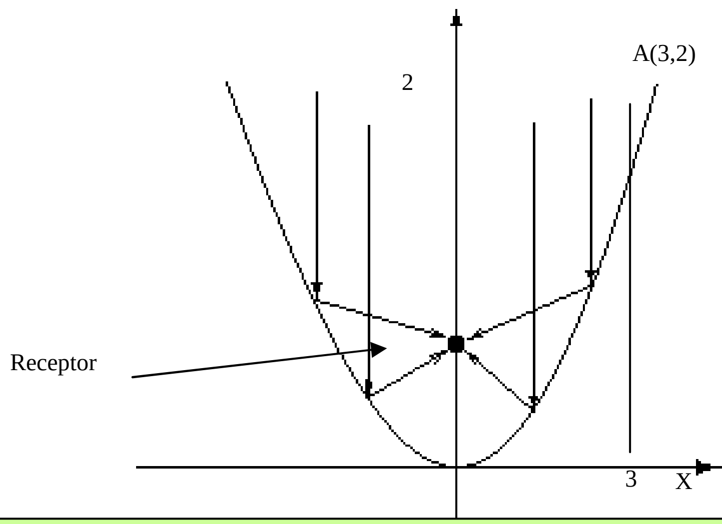
Debes darte cuenta: En esta ocasión usaremos una ecuación de la forma $x^2=4py$

2º Representación Gráfica.

Como quedamos de acuerdo anteriormente ubicaremos la parábola con vértice en el origen como indica la siguiente figura.

Debes darte cuenta: El punto A pertenece a la parábola, el cual nos será de mucha ayuda para resolver el problema planteado.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: Por la propiedad de la parábola descrita al inicio del problema podemos deducir que para que haya una mejor recepción de las señales enviadas, el receptor de la antena debe estar ubicado en el foco de la parábola. Como *p* es la distancia que hay entre el foco y el vértice de la parábola, el valor de *p* lo podemos calcular despejándolo de la ecuación si reemplazamos el punto conocido *A(3,2)* en ella:

$$A(3,2) \text{ en } x^2=4py$$

Nos queda:

$$3^2=4p2$$

$$\frac{9}{8}=p$$

$$p=1,125$$

Luego podemos concluir: el receptor de señal de la antena debe estar ubicado a 1,125m sobre el vértice de la parábola que describe la antena.

Y la ecuación de la parábola estará dada por

$$x^2=4,5y$$

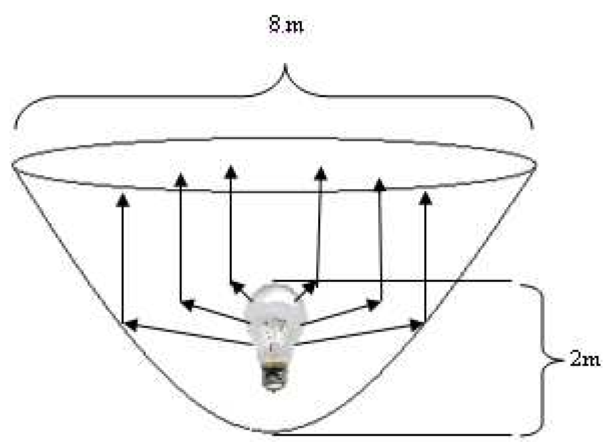
<u>Problema Nº 4</u> <u>“El reflector de luz</u>

<u>Objetivo del Problema</u>:

- **Aplicar propiedades que cumple la parábola para resolver problemas.**
- **Interpretar y graficar datos entregados en el enunciado.**

<u>Planteo del Problema.</u>

4) Un reflector de luz tiene forma de paraboloide de revolución como lo indica la figura.



Si se coloca una ampolleta a 2m. de distancia de la base del reflector y el diámetro de la parte superior es de 8m. ¿Qué profundidad debe tener este reflector para que se aproveche al máximo posible la luminosidad de la ampolleta?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Si llevamos este reflector al plano ¿Qué figura describiría?

Como este reflector es un paraboloide, entonces en el plano describirá una parábola.

¿Podemos aplicar la propiedad de las parábolas descrita en el ejercicio anterior?

En efecto, esta propiedad la podemos aplicar a este problema ya que los rayos de luz emanados por la ampolleta al interceptar con las paredes del reflector serán desviados de forma perpendicular a la directriz de la parábola.

¿Dónde debe ir ubicada la ampolleta para aprovechar mejor su luminosidad?

Debes darte cuenta que la propiedad de la parábola antes descrita nos indica que el Foco es el lugar donde se concentran los rayos captados por la parábola. Por lo tanto la ampolleta debe ir específicamente en el foco de la parábola.

¿Conocemos algún punto de esta parábola?

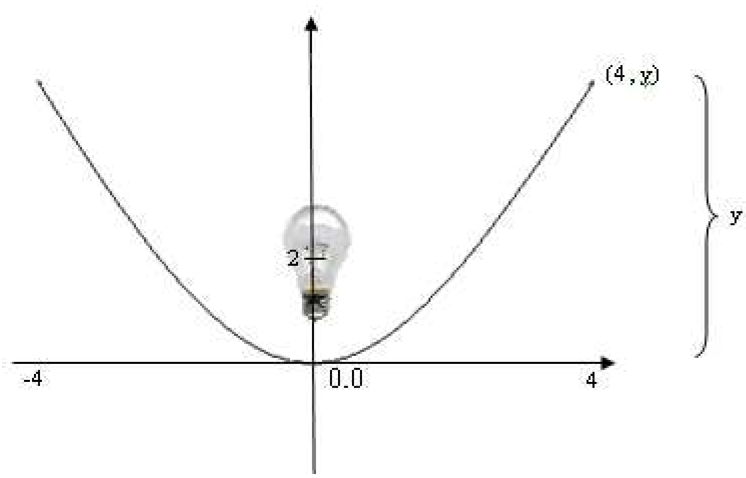
Podemos identificar las coordenadas del foco dependiendo del lugar donde ubiquemos la parábola en el gráfico.

2º Representación Gráfica.

¿Dónde ubicarías la parábola en el plano cartesiano?

Si llevamos este reflector al plano cartesiano su forma describiría en él una parábola cuya ubicación, para facilitar los cálculos, tendrá su vértice en el punto *O(0,0)* que representará la parte inferior del receptor como muestra la figura.

El siguiente grafico muestra la situación planteada



Debes darte cuenta: La ecuación de la parábola que describe al reflector en el plano cartesiano es de la forma $x^2=4py$.

3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: Para que se aproveche al máximo la luminosidad de la ampolleta ésta debe estar ubicada en el foco de la parábola. Por lo anterior podemos deducir que la distancia que debe haber entre el vértice y el foco es de 2m. *(p es la distancia entre el vértice y el foco, p=2m)*.

Luego la ecuación será $x^2=8y$ donde el eje de la parábola es el eje y.

Si A es el punto de uno de los extremos de la parábola. Para hallar la profundidad sólo nos bastará encontrar la coordenada y del punto $A(4,y)$ que satisface la ecuación de la parábola $x^2=8y$.

Tenemos:

$$4^2=8y$$

$$\frac{16}{8}=y$$

$$y=2$$

Luego podemos concluir: la profundidad ideal del reflecto para un mayor aprovechamiento de la luz de la ampolleta es de 2 metros.

<u>Problema Nº 5</u> <u>"Transportando una caja"</u>

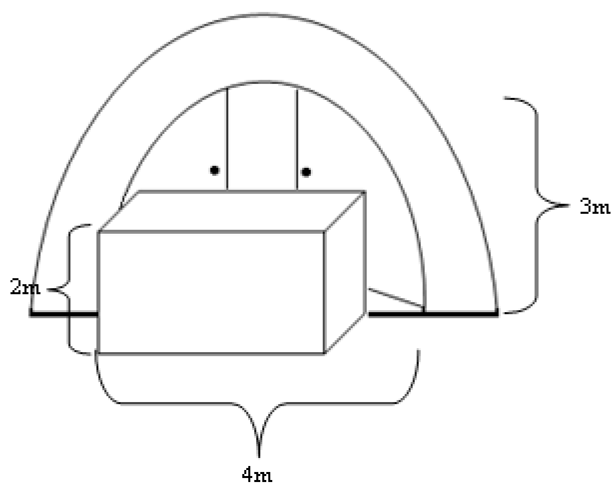
<u>Objetivo del Problema</u>:

- **Interpretar datos entregados en el enunciado.**
- **Graficar los datos entregados en el enunciado.**

<u>Planteo del Problema.</u>

5) Una puerta tiene forma de arco parabólico. El ancho de la base es de 4m. y la altura desde el centro es de 3m.

Se debe deslizar una caja rectangular de 2m. de alto por esta puerta. ¿Cuál es el ancho máximo que puede tener esta caja?



1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿Qué figura describe la puerta del enunciado?

Esta puerta describe una parábola cuyas ramas se abren hacia abajo (cóncavo hacia abajo)

¿Qué puntos importantes de la parábola podríamos identificar en este problema?

Podríamos identificar el vértice de la parábola el cual tendrá sus coordenadas dependiendo de la posición en que la ubiquemos la parábola.

Debes darte cuenta: También están los puntos de los extremos inferiores los cuales puestos en una buena ubicación en el plano serán de gran utilidad para resolver el problema y como el alto de la caja es de 2m. la mitad del ancho de la caja estará dado por la coordenada x del punto (x,2) (punto A).

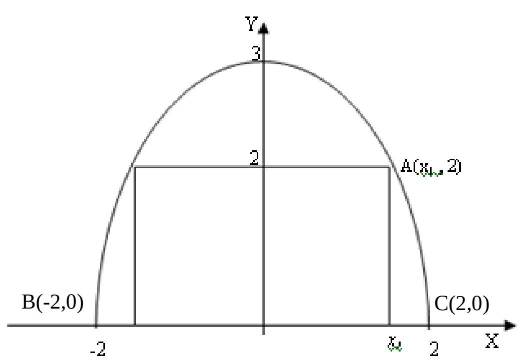
2º Representación Gráfica.

Se observa que: Para facilitar los cálculos ubicaremos en el plano el vértice de la parábola en el punto B(0,3). De esta manera si te das cuenta los extremos de la parte inferior de la puerta estarán dados por los puntos B(-2,0) y C(2,0).

¿Qué forma tendrá la ecuación de esta parábola?

Esta parábola por ser cóncava hacia abajo su ecuación será de la forma

$$(x-h)^2=4p(y-k).$$



Debes darte cuenta: Como puedes observar, en la figura anterior, el punto A que tiene coordenadas (x,2) nos es de gran utilidad para encontrar el ancho máximo que puede tener la caja.

3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: Ahora como tenemos las coordenadas del vértice y de un punto que pertenece a la parábola reemplazamos en la ecuación para encontrar el valor de *p*.

Reemplazamos (0,3) en la ecuación:

$$(x-0)^2=4p(y-3)$$

Luego reemplazamos el punto B(2,0)

$$(2-0)^2=4p(0-3)$$

Despejando *p*

$$4=-12p$$

$$-\frac{4}{12}=p$$

$$-\frac{1}{3}=p$$

No olvides: **esta respuesta es lógica porque si recuerdas se debe cumplir que:**

Si p>0 la parábola es cóncavo hacia arriba

Si p<0 la parábola es cóncavo hacia abajo

Luego la ecuación será: $x^2=-\frac{4}{3}(y-3)$

Ahora, como podemos fijarnos, en la figura para que la caja quepa por la puerta con máximo de ancho, el punto A(*x,2)* debe pertenecer a la parábola.

Se observa que: Si reemplazamos A(*x,2)* en la ecuaciones de la parábola tendremos.

$$x_1^2=-\frac{4}{3}(2-3)$$

$$x_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \; ; \; x_1^2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x_1^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \; ; \; x_1^2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Estos resultados nos indican que el ancho total de la caja en el gráfico estará dado por la distancia entre los puntos $(-\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$ y $(\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$.

Luego podemos concluir: el ancho máximo que puede tener la caja para que quepa por la puerta es aproximadamente 2,3m.

<u>Problema Nº 6</u> <u>“Paseando por una pasarela”</u>

<u>Objetivo del Problema</u>:

- **Recopilar información entregada en el enunciado e interpretarla.**
- **Graficar la información entregada en el enunciado y reconocer una nueva aplicación.**

<u>Planteo del Problema.</u>

6) Se construye una pasarela peatonal en forma de arco parabólico que tiene una envergadura de 90m. Se sabe que altura desde el piso al arco a una distancia de 30m, desde el centro de la pasarela es de 8m. ¿Cuál es la altura de la pasarela en el centro?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿Qué figura describe la pasarela?

La pasarela describe una parábola con las ramas hacia abajo (cóncavo hacia abajo).

¿Conocemos algún punto importante de esta parábola para facilitar los cálculos?

Efectivamente si te das cuenta la altura que conocemos de la pasarela a una distancia de 30m, del centro de ella nos da las coordenadas de un punto que pertenece a la parábola. Lo llamaremos punto B(30,8).

Debes darte cuenta: Otros puntos importantes que nos ayudarán a solucionar este problema son los puntos de los extremos inferiores de la pasarela cuyas coordenadas dependerán de la posición en que la coloquemos en el plano.

¿Cuál es el punto que buscamos?

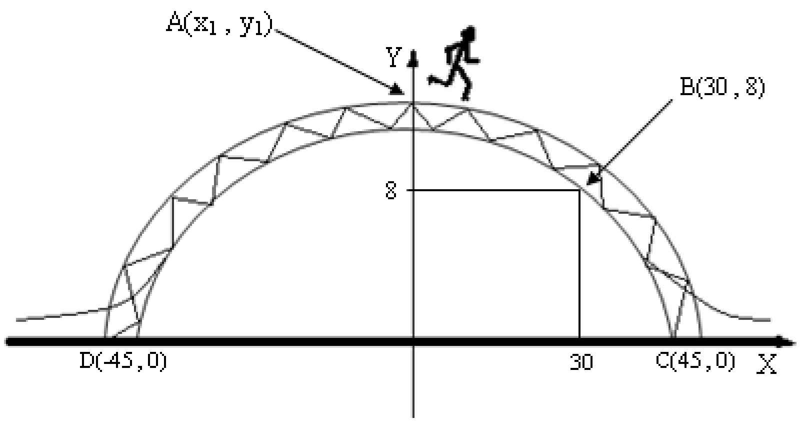
El punto que buscamos es el vértice de la parábola que describe la pasarela.

2º Representación Gráfica.

¿Cuál será la mejor posición en el plano para graficar esta parábola?

Para desarrollar este problema hacemos una representación gráfica en el plano cartesiano de tal forma que el eje *y* del plano sea el eje de la parábola y que los extremos inferiores D y C del puente estén sobre el eje *x* como muestra la figura.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



Debes darte cuenta: Como puedes observar en la figura anterior, el vértice de la parábola está sobre el eje *y* al que llamaremos $A(x_1,y_1)$.

¿Qué nos interesa encontrar?

Lo que nos interesa encontrar es la coordenada *y* del punto A, ya que ésta nos dará la altura máxima del puente.

¿Qué forma tiene la ecuación de la parábola que andamos buscando?

La forma de la ecuación de la parábola que andamos buscando es:

$(x-x_1)^2=4p(y-y_1)$

Donde $A(x_1,y_1)$ es el vértice de la parábola con $x_1=0$. Los puntos B(30,8) , C(45,0) y D(-45,0) pertenecen a la parábola.

3º Cálculos y Desarrollo.

¿Cómo podemos proceder para encontrar el punto pedido?

Debes darte cuenta: si reemplazamos B y C en la ecuación dada obtendremos dos ecuaciones con dos incógnitas, p y y_1 *(donde y_1 es lo que andamos buscando)*

$$1º \qquad (30-0)^2=4p(8-y_1)$$

$$900=32p-4py_1$$

$$2º \qquad (45-0)=4p(0-y_1)$$

$$2025=-4py_1$$

Reemplazamos 2º en 1º nos queda

$$900=32p+2025$$

$$900-2025=32p$$

$$-\frac{1125}{32}=p$$

Ahora si reemplazamos *p* en la ecuación 1º nos queda

$$900=32(-\frac{1125}{32})+4\frac{1125}{32}y_1$$

$$900+1125=\frac{1125}{8}y_1$$

$$2025=\frac{1125}{8}y_1$$

$$\frac{16200}{1125}=y_1$$

$$y_1=14{,}4$$

Luego podemos concluir: el vértice de la parábola es el punto (0, 14,4) y la altura máxima alcanzada por el puente es de 14,4.

Problema Nº 7 “Problema de Arquímides”

Objetivo del Problema:

- **Reconstruir el problema de Arquímedes y resolver el problema planteado.**

Planteo del Problema.

7) Cuenta Plutarco que Arquímedes fue capaz de incendiar las naves de los romanos que asediaban la ciudad de Siracusa, utilizando unos espejos móviles en forma de paraboloides llamados Ustorios.

La forma de estos espejos se genera al hacer girar una parábola con respecto a su eje. Los barcos eran incinerados cuando inclinaban los espejos y los rayos que rebotaban con él chocaban con los barcos justo cuando estos pasaban por el foco de la parábola que describía el reflector de Arquímedes.

Si Arquímedes quiere atacar los barcos romanos a una distancia de 100m, con un reflector de 2m. de diámetro.

¿Cuál es la ecuación de la parábola que describe al reflector?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Como ya sabemos por el enunciado, la figura geometría que utilizaremos es la parábola.

Debes darte cuenta: si observas, como el diámetro del reflector es de 2m, entonces la distancia de un extremo del reflector al eje central de él será de 1m.

Si pensamos en un caso ideal en que los rayos del sol llegan en forma perpendicular a la directriz de la parábola que describe el reflector, entonces para que los rayos al rebotar intercepten a los barcos romanos a una distancia de 100m, entonces estamos hablando que ese punto será el foco de la parábola.

2º Representación Gráfica.

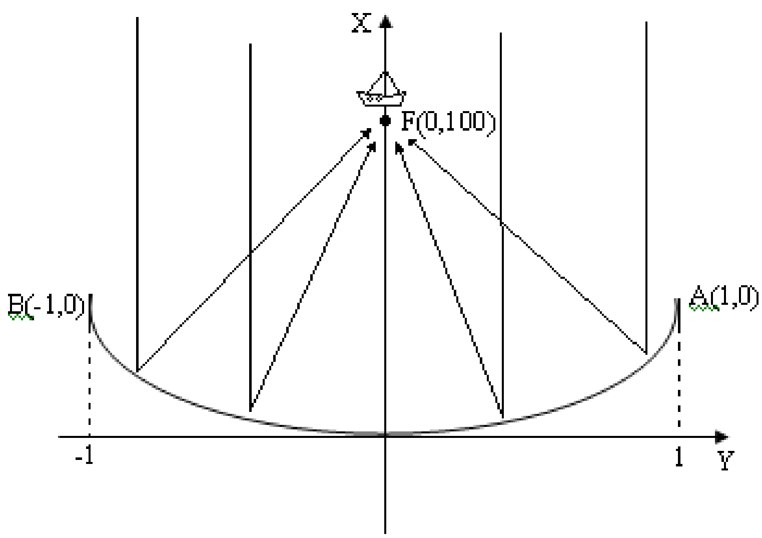
¿Cuál será el mejor lugar para graficar esta parábola?

El mejor lugar para graficar esta parábola es colocando el vértice de la parábola en el origen del sistema, el eje de la parábola que coincida con el eje *y*.

¿Dónde quedará ubicado el foco de esta parábola?

El foco de la parábola quedará ubicado sobre el punto F(0,100). El foco será el lugar donde convergerán todos los rayos solares recibidos.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



Se observa que: Los puntos A(1,0) y B(-1,0) son los extremos del reflector y son puntos que pertenecen a la parábola.

3º Cálculos y Desarrollo.

¿Cómo es la forma de la ecuación de la parábola para este desarrollo?

Si observas el gráfico anterior la forma de la parábola es

$$x^2 = 4py$$

¿Cómo procedemos para desarrollar este problema?

Debes darte cuenta: Para encontrar la ecuación de la parábola sólo debemos reemplazar los datos que tenemos en la ecuación anteriormente escrita.

Tenemos *p* que es igual a 100m.

Reemplazando

$$x^2 = 4 \bullet 100y$$

$$x^2 = 400y$$

Luego podemos concluir: Por lo tanto la ecuación de la parábola que describe el reflector es $x^2 = 400y$

No olvides: ***p* es la distancia que existe entre el foco y el vértice de la parábola, que es la misma distancia que hay entre el vértice y la directriz.**

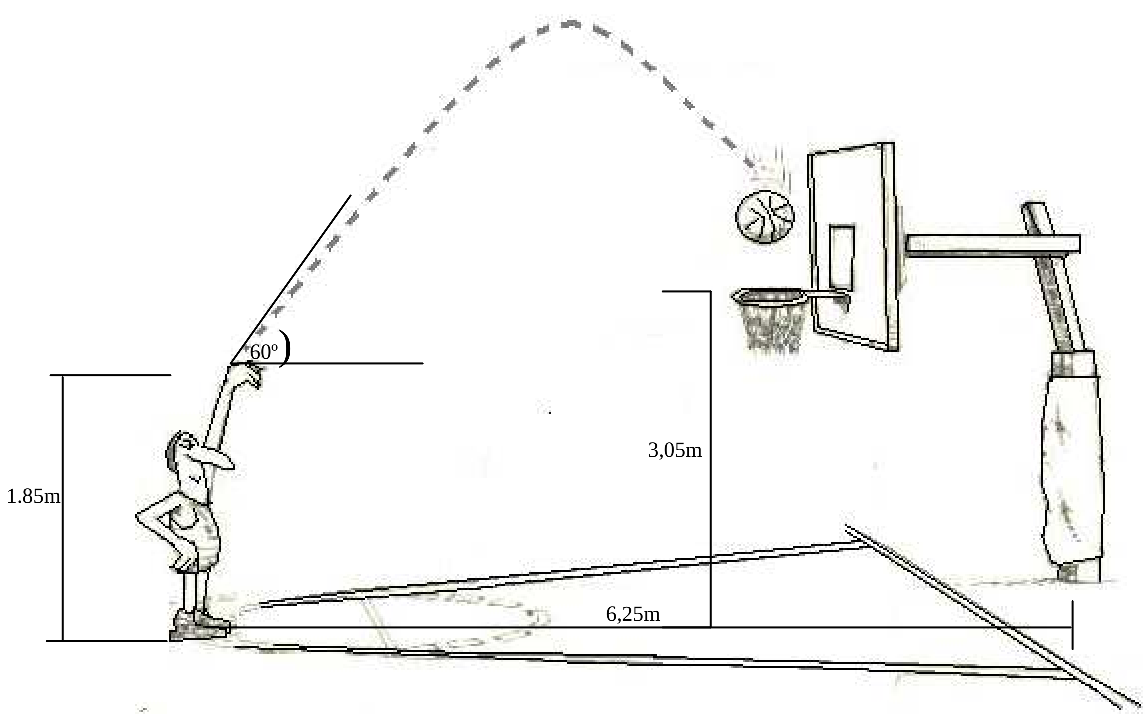
Problema Nº 8 “Jugando básquetbol”

Objetivo del Problema:

- **Reconocer la trayectoria que describe el lanzamiento de un objeto.**
- **Interpretar los datos entregados en el enunciado.**
- **Graficar la parábola que describe el movimiento.**

Planteo del Problema.

8) Un jugador de básquetbol hace un lanzamiento desde la línea de los puntos triples. Al lanzar el balón se forma un ángulo de elevación de 60º. Si el jugador mide 1.85m de estatura, la distancia que hay entre el jugador y la base de la canasta es de 6,25m. y la altura del tablero es de 3,05m. ¿Cuál es la velocidad inicial que se debe aplicar al lanzamiento para que el balón entre en la canasta?



1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico:

Para resolver este problema nuevamente haremos uso de algunas fórmulas utilizadas en la física ya que estamos hablando del lanzamiento de un proyectil.

Las fórmulas del lanzamiento de proyectil son:

- $x = x_0 + (v_{0x} \cdot Cos\sigma)t$
- $y = y_0 + (v_{0y} \cdot Sen\sigma)t + \frac{gt^2}{2}$

Donde x_0 e y_0 son las coordenadas del punto de inicio del movimiento y v_0 es la velocidad inicial.

¿Qué otros datos importantes sabemos?

Debemos calcular los valores de $sen 60$ y de $\cos 60$, los cuales son 0,86 y 0,5 respectivamente.

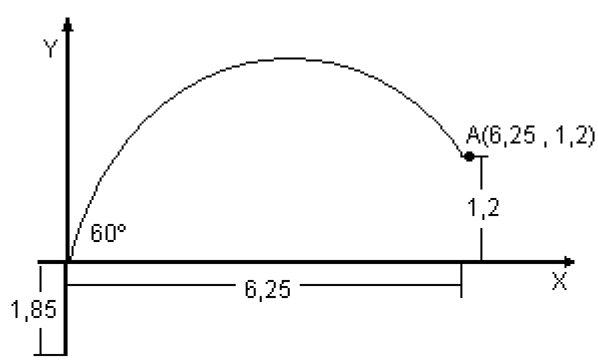
2º Representación Gráfica.

¿Cuál será la mejor posición para graficar este problema?

La mejor posición para graficar este problema es colocando el punto de lanzamiento del balón en el origen del gráfico.

Debes darte cuenta: la diferencia entre alturas del jugador con la de la canasta será la que consideraremos para resolver este problema.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



¿Qué importancia tiene A?

Debes darte cuenta: El punto A(6,25 **;** 1,2) pertenece a la parábola y es el lugar donde está ubicada la canasta. Este punto nos será de mucha ayuda para resolver este problema ya éste satisface las dos ecuaciones que tenemos.

3º Cálculos y Desarrollo.

¿Qué nos piden calcular?

Recuerda que nos piden calcular el valor de la velocidad inicial de este lanzamiento, la cual se encuentra presente en estas dos ecuaciones:

- $x = x_0 + (v_{0x} \cdot Cos\sigma)t$
- $y = y_0 + (v_{0y} \cdot Sen\sigma)t + \dfrac{gt^2}{2}$

Reemplacemos en las ecuaciones los valores conocidos

1) $6{,}25 = v_0 \quad 0{,}5t$

2) $1{,}2 = v_0 \quad 0{,}86t \quad \dfrac{9{,}8t^2}{2}$

De esta forma armamos un sistema de ecuaciones.

De la ecuación 1) despejamos *t* y nos queda

$$t = \frac{12{,}5}{v_0}$$

Luego reemplazamos 1) en 2), nos queda

$$1{,}2 = \cancel{v}_0 \quad 0{,}86 \quad \frac{12{,}5}{\cancel{v}_0} \quad 4{,}9 \quad \frac{12{,}5}{v_0{}^2}$$

Ahora despejamos v_0

$$9{,}6 = \frac{765.6}{v_0{}^2}$$

Luego

$$v_0 = \sqrt{\frac{765,6}{9,6}}$$

$$v_0 = 8,9$$

Luego podemos concluir: la velocidad inicial aplicada al balón por el jugador fue de 8,9 $\frac{m}{s}$

A continuación presentamos dos ejercicios en el programa computacional para geometría llamado GEOGEBRA.

Problema 9: "Propiedad de la Parábola"**(*)**

Objetivo del Problema:

- **El estudiante utilizar Geogebra en la aplicación del ejercicio.**
- **Aprender a descubrir propiedades de las cónicas con Geogebra.**

Planteo del Problema.

9) La parábola tiene una propiedad interesante: Si unimos cualquier punto, P, de la parábola con su foco, el ángulo que forman el radio focal con la tangente en ese punto, es igual al ángulo que forma la tangente en ese punto con la recta paralela al eje de la parábola.

Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde el foco se refleja paralelo al eje y viceversa (una emisión, de luz o sonido, paralela al eje de la parábola se concentra en el foco).

Los faros de los coches y las antenas parabólicas hacen uso de esta propiedad. (Notar que, en ambos casos son paraboloides no parábolas, pero la propiedad se mantiene).

Desafío:

Utilizando Geogebra demuestre esta interesante propiedad en el punto $B=\left(2,\frac{5}{2}\right)$, la parábola que utilizará tiene como foco el punto A=(0,1) y directriz y = 0.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿Podemos probar esta propiedad utilizando Geogebra?

Por supuesto que sí, lo primero que haremos será abrir el programa y construir la parábola con los datos que nos han proporcionado, recuerda el foco es F(0,1) y la directriz es y = 0, para ello utilizaremos la opción parábola que nos da el menú.

Ver figura 1 y 2

Figura 1

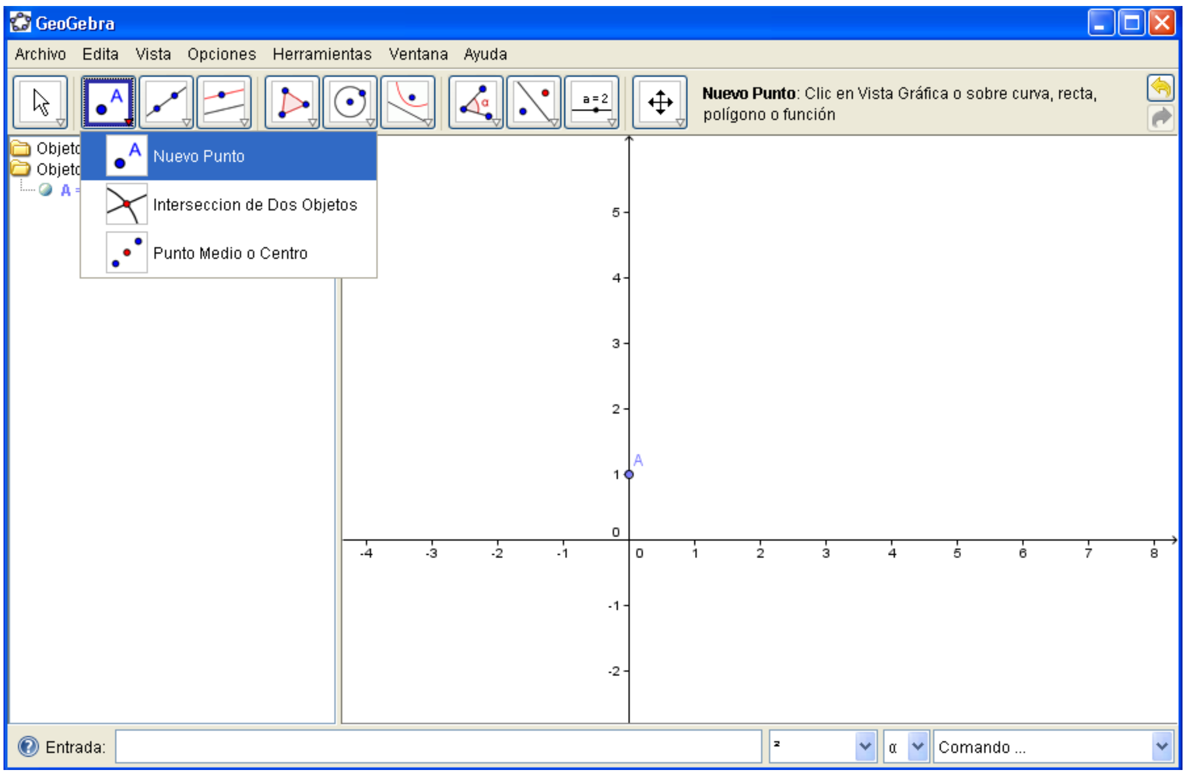
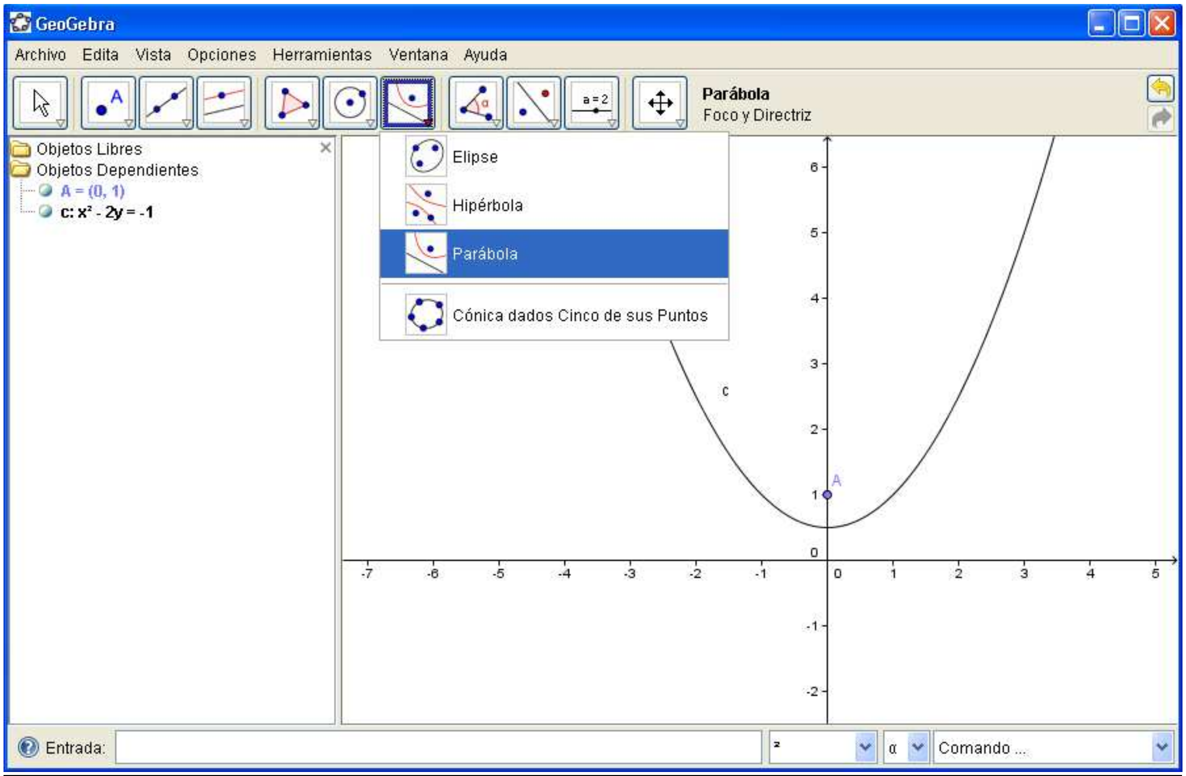


Figura 2



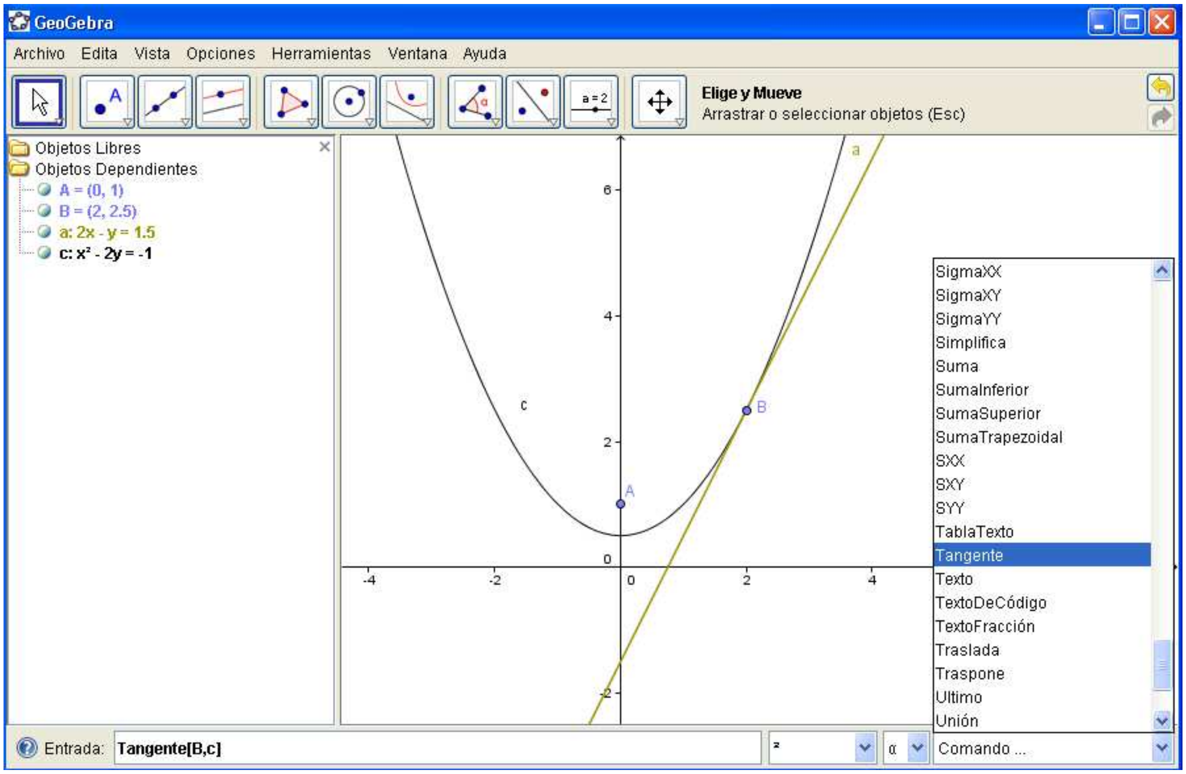
2º Representación Gráfica.

¿Puedo con este programa colocar una tangente a la figura que formé?

Por supuesto que sí, lo que debes hacer será buscar la opción TANGENTE en la barra de comando e ingresar el punto en donde quieres la tangente. Debes percatarte que el programa le ha asignado a la sección cónica la letra “c”. Pero primero no olvides ingresar el punto en donde se colocará la tangente, ese punto de acuerdo al problema planteado es el punto $\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

Ver figura 3

Figura 3



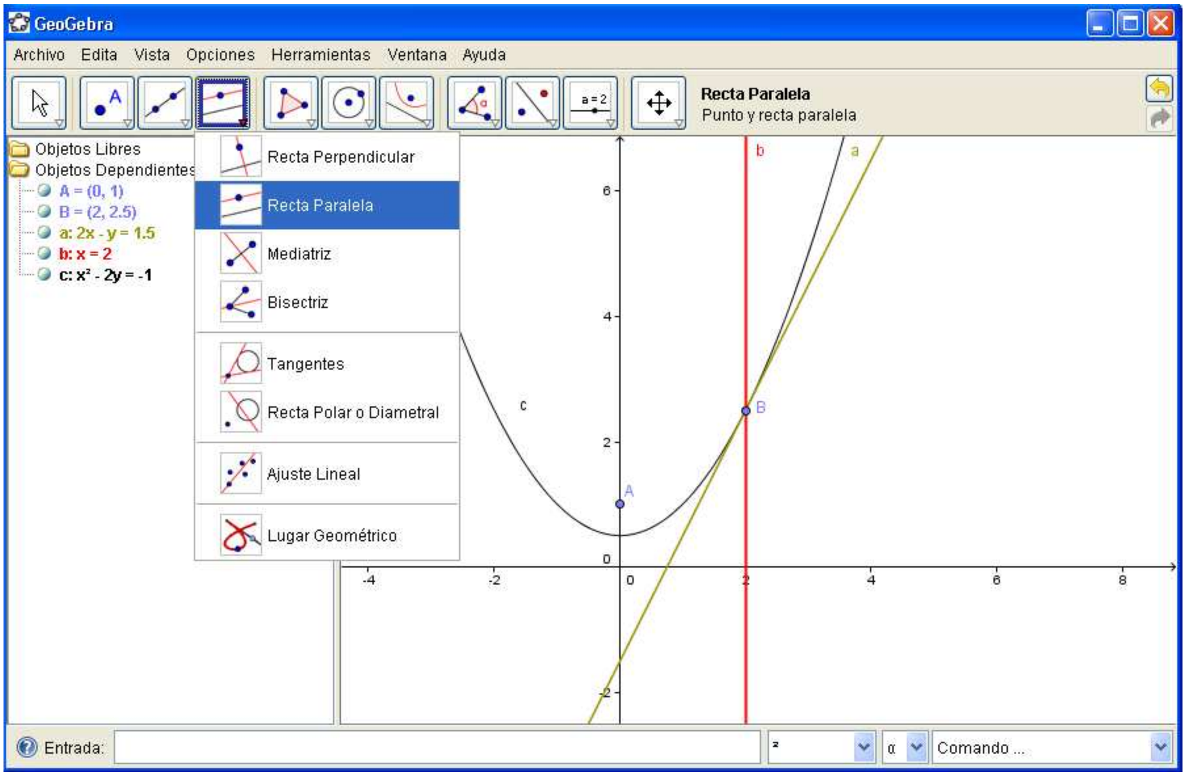
3º Cálculos y Desarrollo.

¿Qué necesitamos ahora para probar la propiedad?

Necesitamos una recta que sea paralela al eje de la parábola. Y por supuesto que lo podemos hacer con geogebra, debes escoger la opción “recta paralela” y en ella marcarás el punto en el cual quieres que pase la recta y la recta a la cual quieres que seas paralela, en este caso a la recta x = 0.

Ver figura 4.

Figura 4



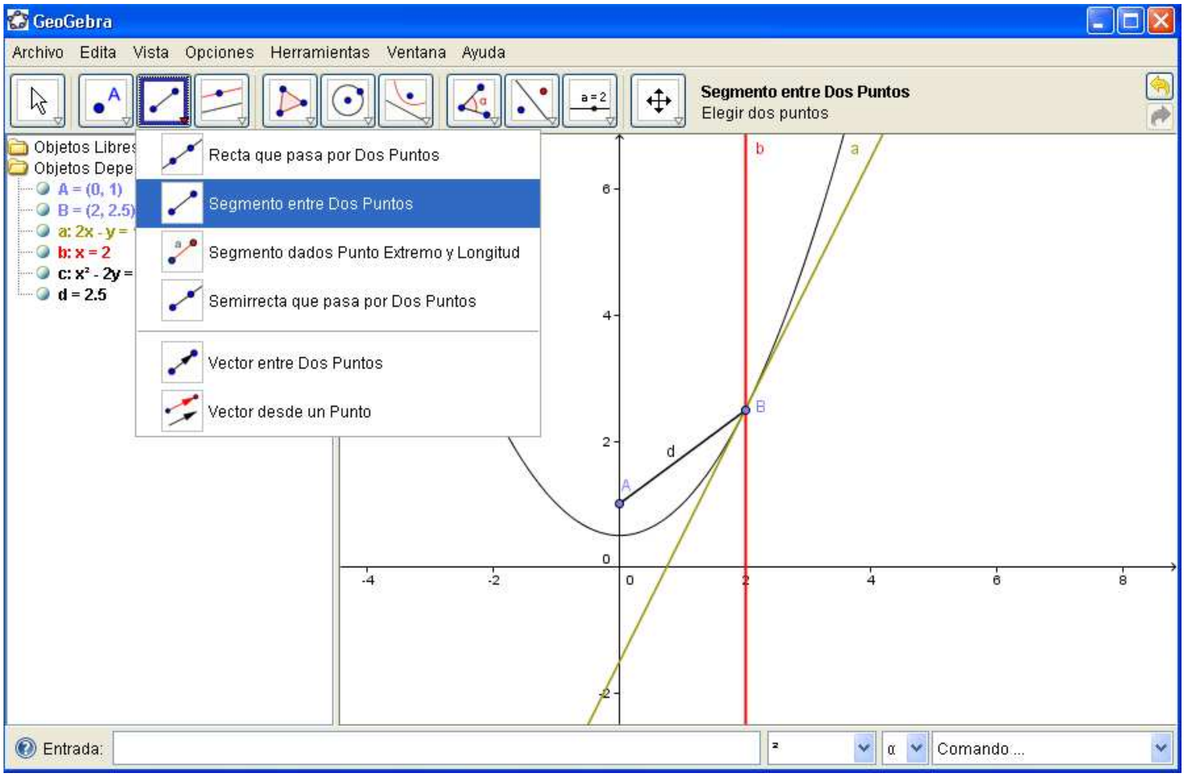
¿Qué otra cosa necesitamos?

Debemos unir el foco con el punto de tangencia por medio de un segmento de recta.

¿Podemos hacer eso con Geogebra? Por supuesto que sí, lo que harás será escoger la opción “segmento” y unirás el punto A con B.

Ver figura 5.

Figura 5

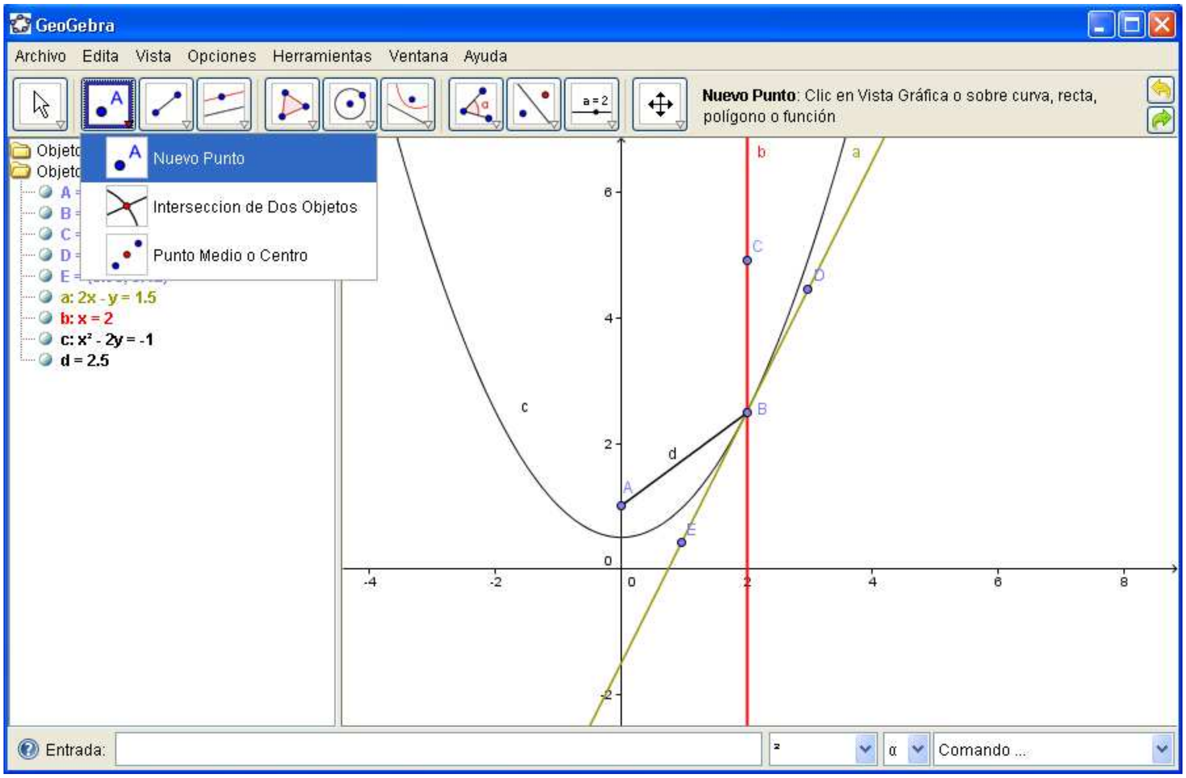


¿Podemos agregar más puntos si queremos?

Por supuesto escogerás la opción “nuevo punto” y agregarás tres puntos más, uno en la recta paralela y dos en nuestra recta tangente.

Ver figura 6.

Figura 6



¿Para qué nos sirve el haber agregado esos puntos?

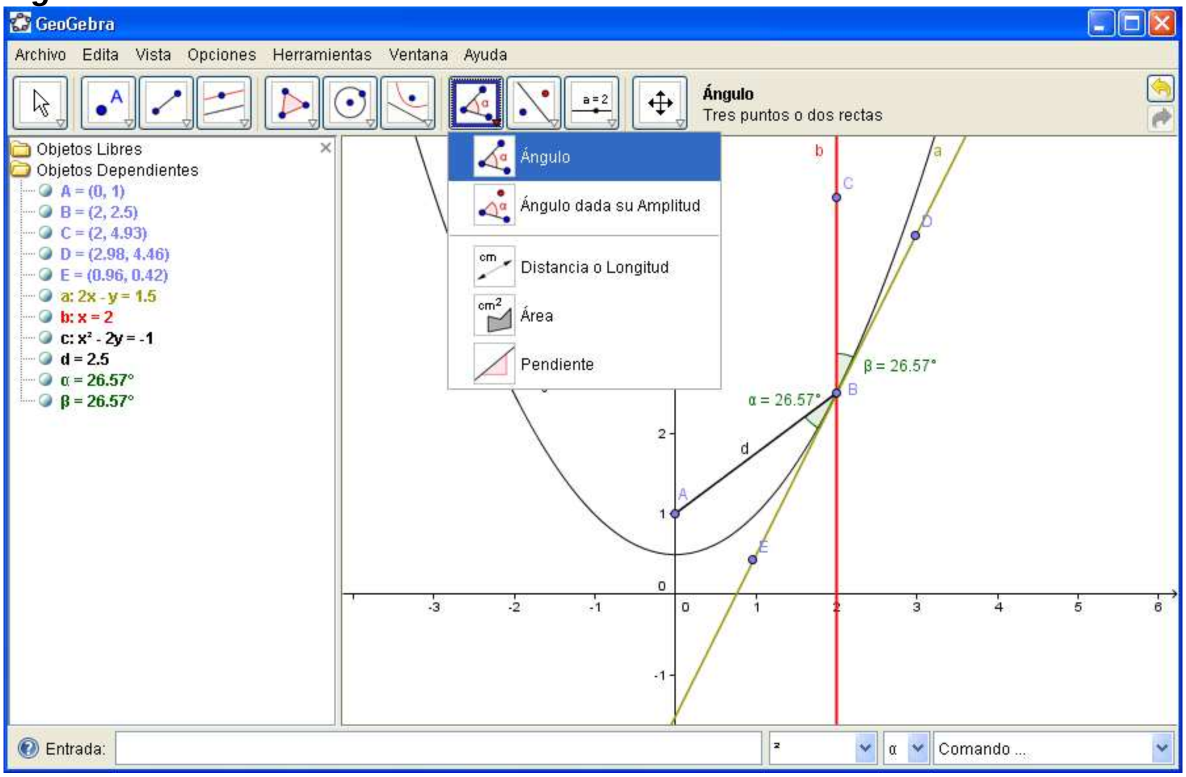
Esto nos servirá para comprobar si la propiedad es correcta o si no, para ello nos centraremos en medir los ángulos que se forman

¿Cómo podemos medir los ángulos?

Simple, para ello escogeremos la opción ángulo y comprobaremos si la propiedad es correcta.

Ver figura 7

Figura 7


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Ángulo
Tres puntos o dos rectas
Objetos Libres
Objetos Dependientes
A = (0, 1)
B = (2, 2.5)
C = (2, 4.93)
D = (2.98, 4.46)
E = (0.96, 0.42)
a: 2x - y = 1.5
b: x = 2
c: x² - 2y = -1
d = 2.5
α = 26.57°
β = 26.57°
Ángulo
Ángulo dada su Amplitud
Distancia o Longitud
Área
Pendiente
β = 26.57°
α = 26.57°
Entrada:
Comando ...

Problema 10: “El Puente”**(*)**

Objetivo del Problema:

- **Utilizar Geogebra en la aplicación del ejercicio.**
- **Aprender a usar propiedades de las cónicas con Geogebra.**
- **Encontrar datos específicos.**

Planteo del Problema.

10) Un grupo de ingenieros quiere construir un puente colgante con dos grandes torres y un cable que penda de él. Para ello han determinado que la altura mínima del cable al suelo es de 10 metros. Y las torres serán colocadas 40 metros en dirección este y 40 metros en dirección oeste del lugar en donde la distancia del cable al suelo es mínima.

Determine por medio de un programa computacional (Geogebra)

1) La forma de la parábola que modela la situación y grafíquela.
2) La ubicación del foco y vértice de la parábola.
3) La altura de los pilares luego de haber avanzado los 40 metros en ambas direcciones descrito en el problema.
4) Y, compruebe que cualquier distancia del foco a un punto de la parábola es la misma que desde ese punto a la directriz. (definición de parábola).

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Nota: Para nuestra mayor conveniencia hemos decidido colocar nuestro sistema de ejes coordenados de tal manera que tanto el foco como el vértice de nuestra parábola estén el eje de las ordenadas (y). y, análogamente el suelo será representado por el eje x.

¿Cómo puedo graficar la parábola con los datos que me proporcionan en Geogebra?

Debes darte cuenta: que como nos dicen que la distancia mínima entre el cable y el suelo es 10 metros, esto quiere decir que ese será el vértice de nuestra parábola, vamos a suponer que el eje x es el suelo. Ahora entonces, el vértice está ubicado en el punto C (0,10) y como la distancia entre el vértice y la directriz es la misma entonces el foco de nuestra parábola estará en el punto A (0,20).

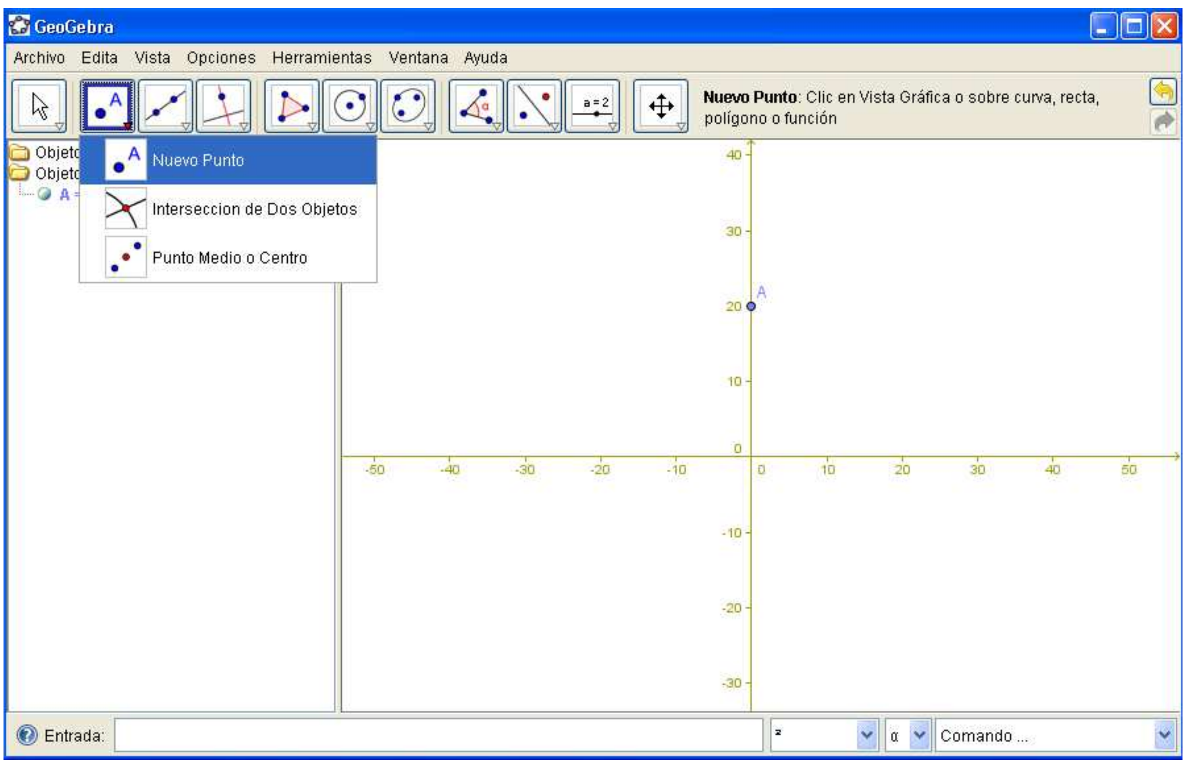
2º Representación Gráfica.

Ahora podemos graficar nuestra parábola con los datos que tenemos.

Lo primero que haremos es colocar el punto llamado foco de nuestra parábola

Ver figura 1.

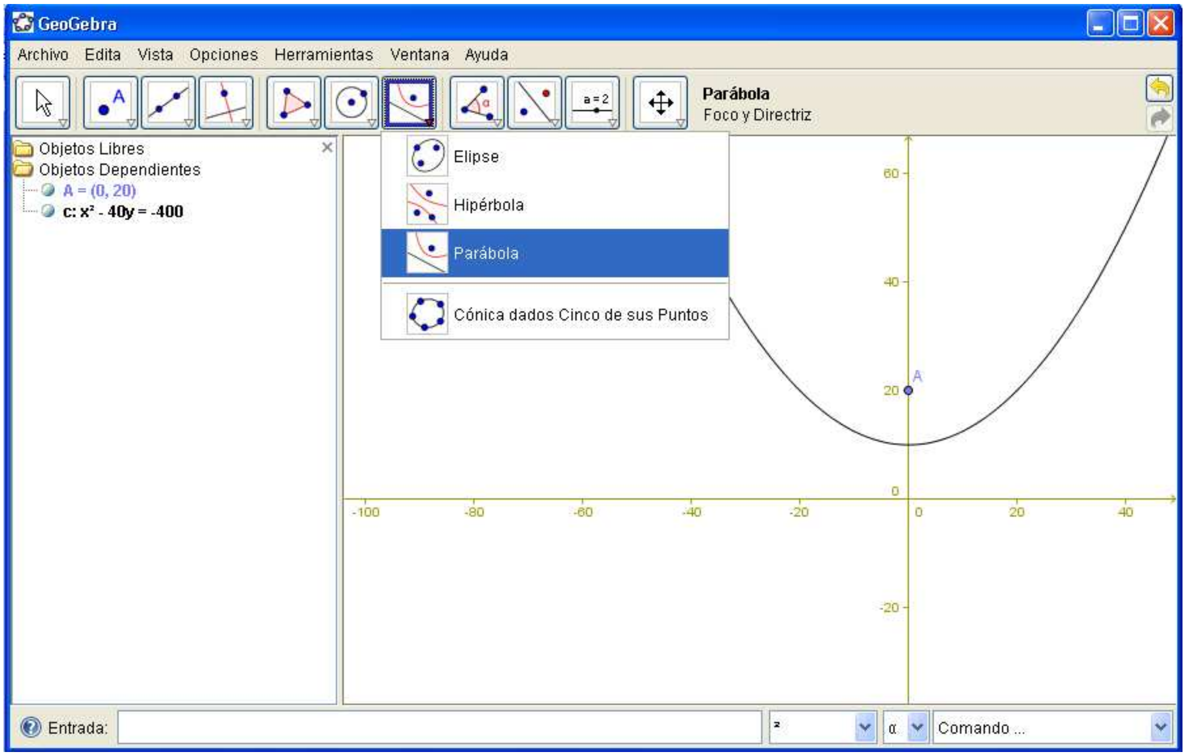
Figura 1



Ahora utilizaremos de acuerdo a los datos que tenemos el eje x como directriz y el foco para construir nuestra parábola.

Ver figura 2.

Figura 2



¿Cómo podemos marcar el foco y el vértice de nuestra parábola que da forma a nuestro puente colgante?

Para encontrar los focos de nuestra elipse utilizaremos el comando "FOCOS [c]"

Se observa que: por defecto el programa signa con la letra "c" a la sección cónica. De la misma manera debes escoger la opción VERTICE[c] para encontrar el vértice.

Ver figura 3 y 4.

Figura 3

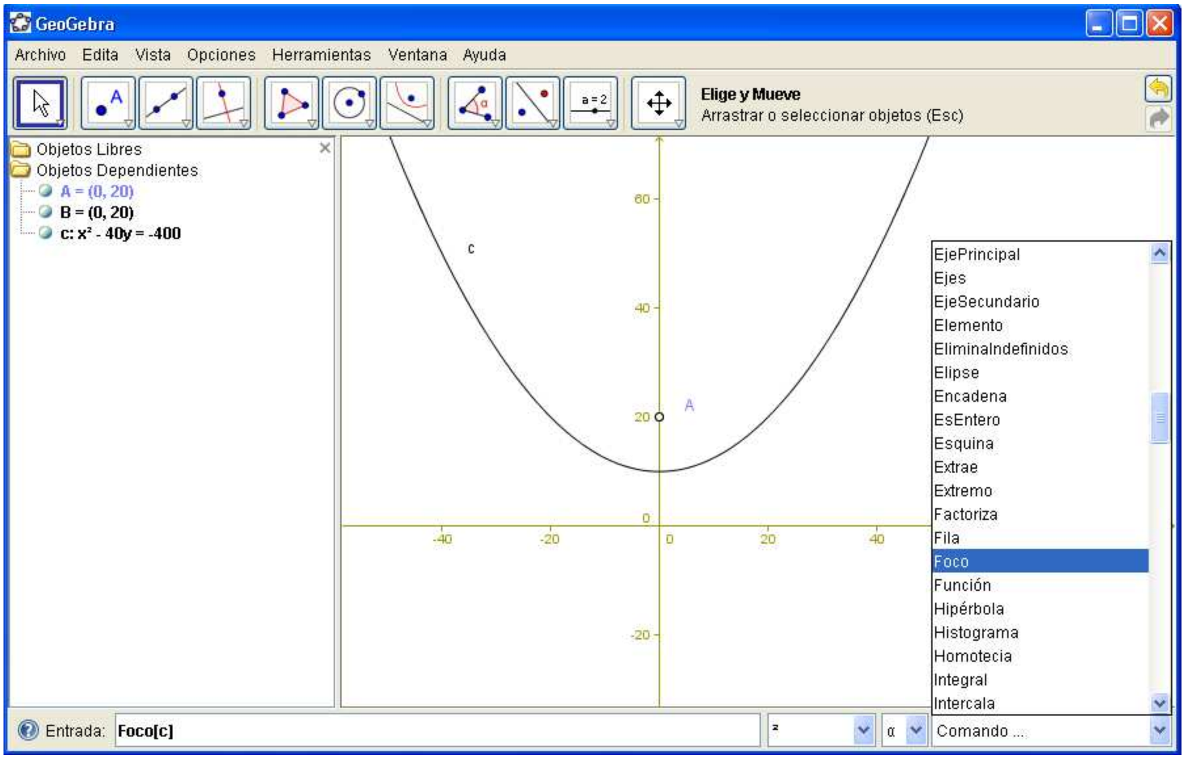
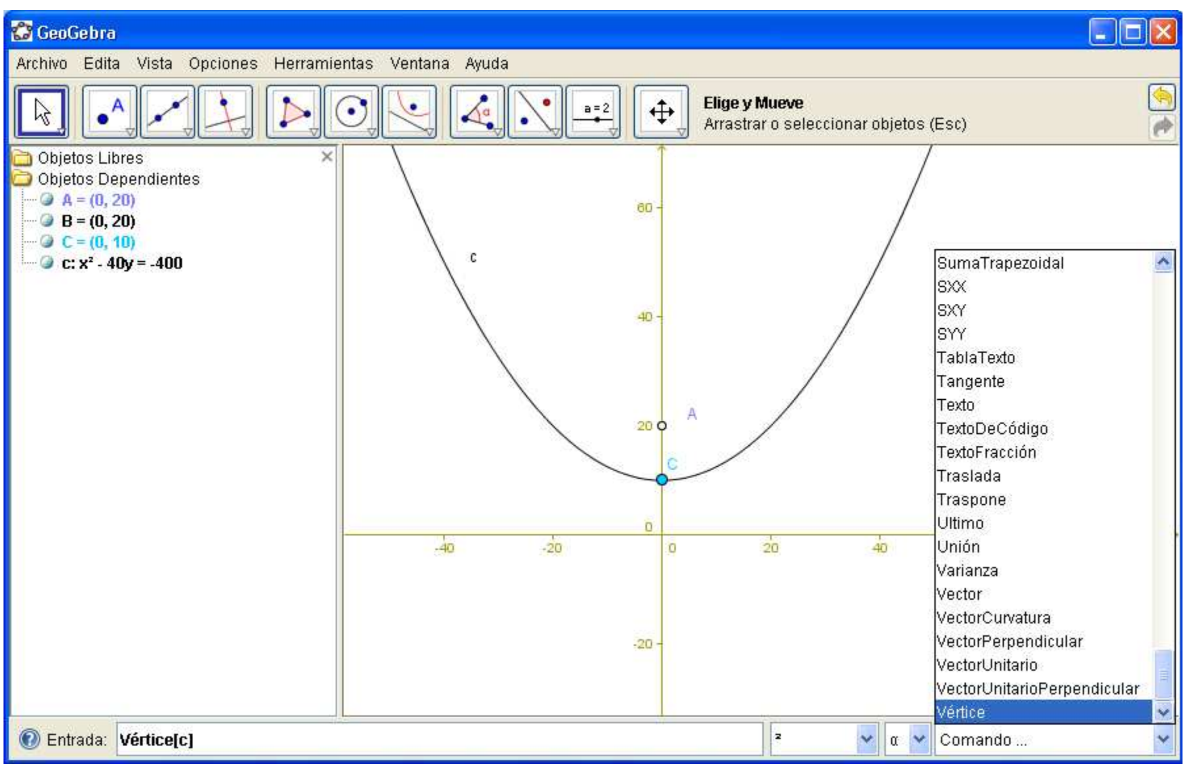


Figura 4



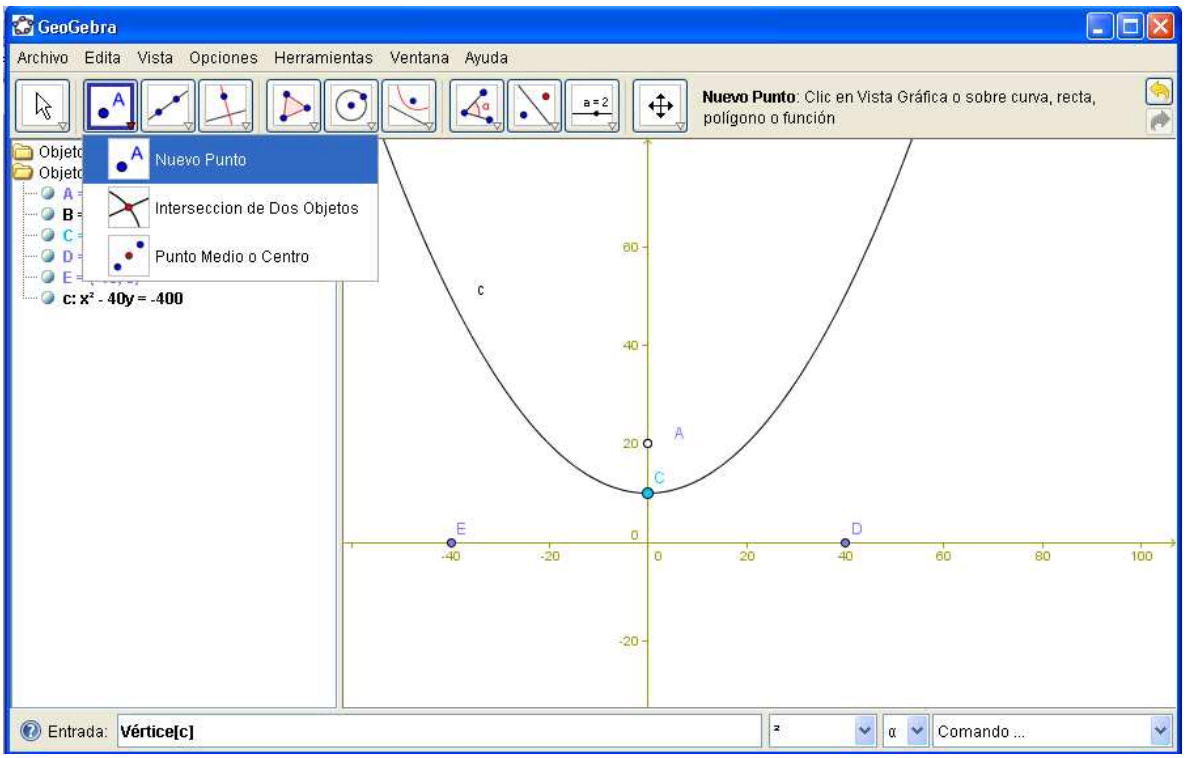
3º Cálculos y Desarrollo.

¿Y cómo encuentro la altura de los pilares luego de haber avanzado los 40 metros en ambas direcciones, lo puedo hacer con geogebra?

Lo primero que haremos será agregar dos puntos en el eje x, de tal manera que estén 40 unidades más allá del origen, tanto en dirección este, como en dirección oeste. Utilizando la opción “nuevo punto” los podemos agregar, los llamaremos punto D y E.

Ver figura 5.

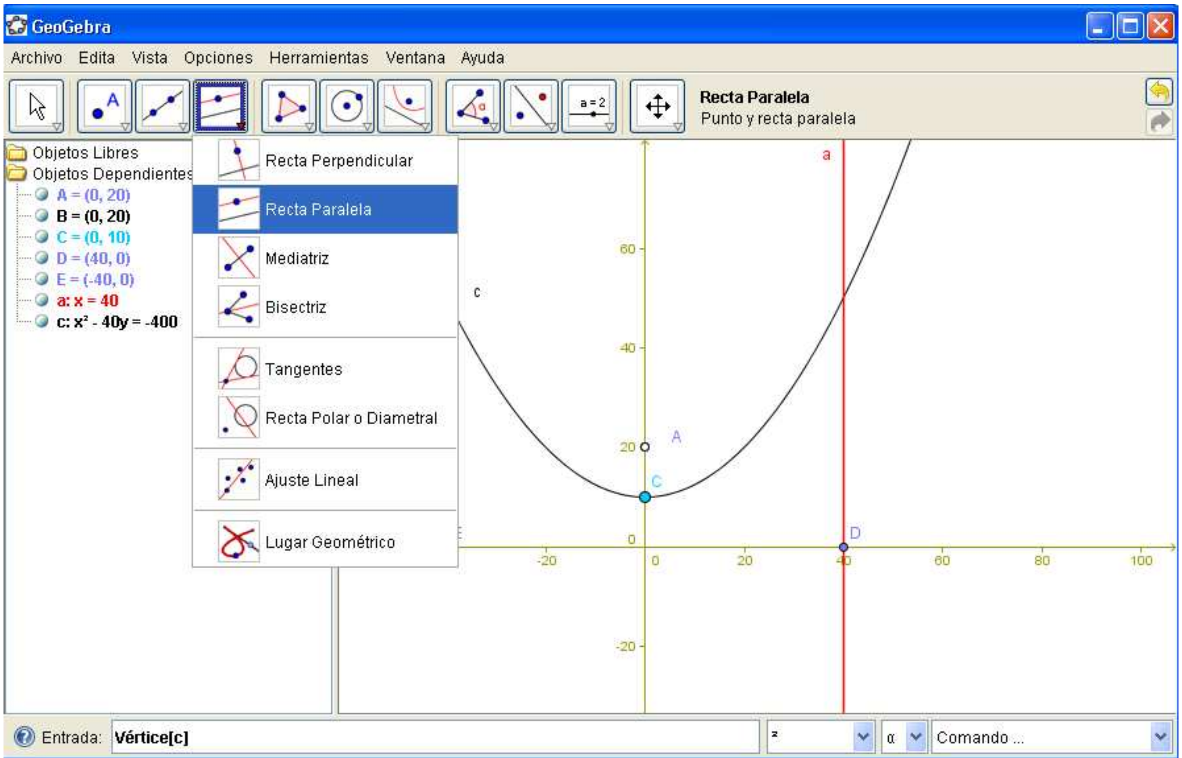
Figura 5



Luego trazaremos la paralela en el punto D al eje y. utilizando la opción “recta paralela” la cual nos permite trazar la recta deseada sólo debemos escoger el punto y marcar a qué recta quieres que sea paralela, nosotros lo haremos por conveniencia paralela al eje y.

Ver figura 6

Figura 6

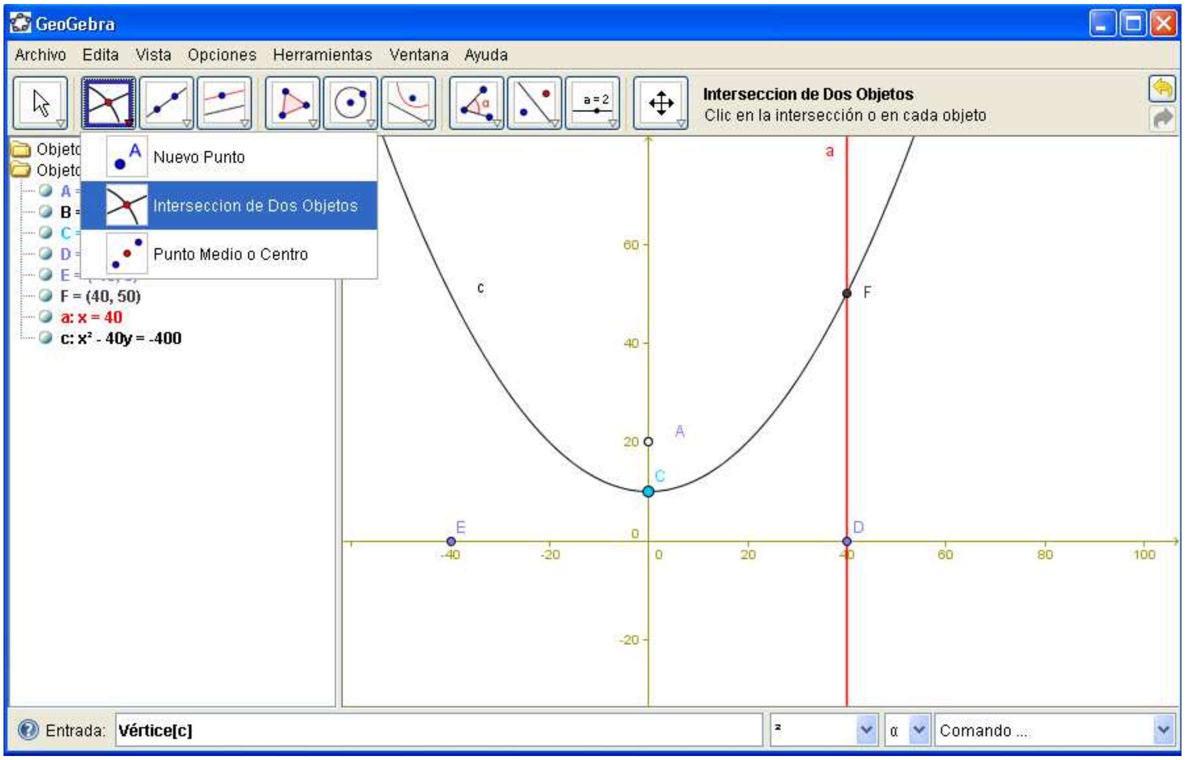


¿Cómo podemos saber la altura de la torre?

Es fácil, por medio de geogebra podemos medir la distancia que hay entre el suelo y el lugar de intersección entre la parábola y la recta, recuerda que la recta representa a nuestra torre. Para ello utilizaremos el punto de intersección entre la parábola y la recta, esto se puede conseguir utilizando la opción “intersección de dos objetos” obteniendo el punto F.

Ver figura 7

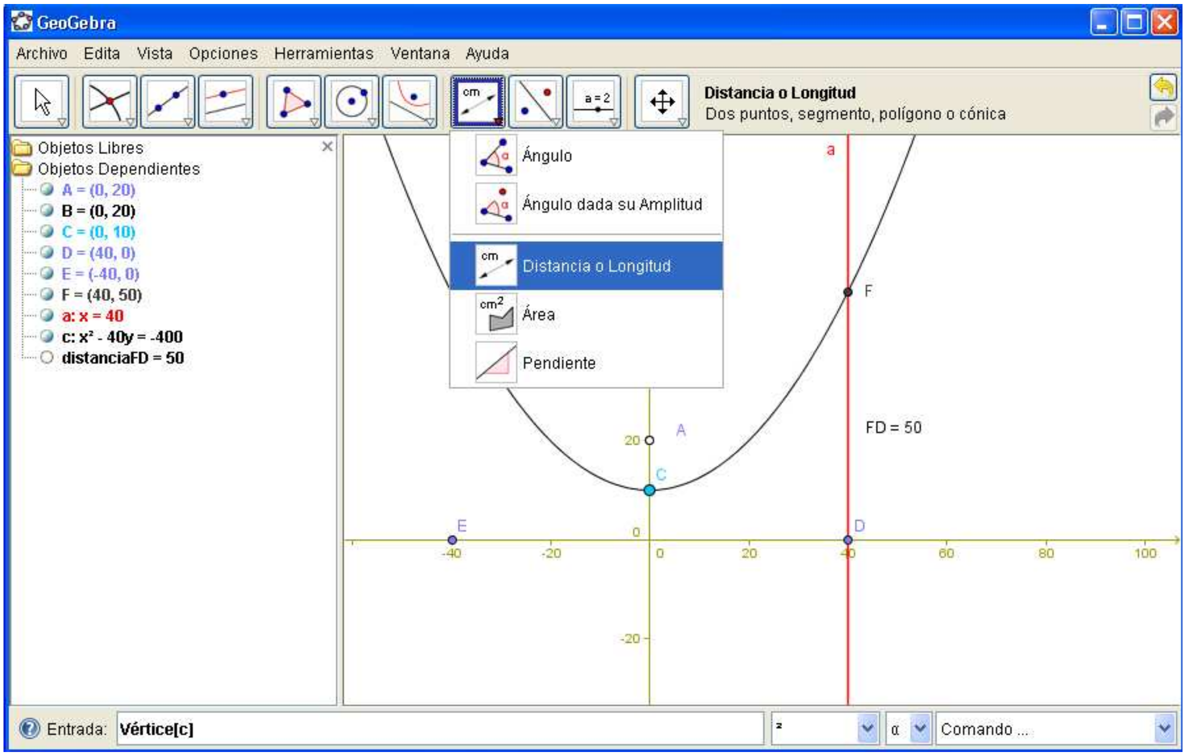
Figura 7



Luego utilizaremos la opción “distancia o longitud” obteniendo que la longitud de nuestra torre es 50 metros, esto se obtiene luego de haber marcado ambos puntos es decir el punto D y el F con la opción nombrada anteriormente. Ahora esto se hace de manera análoga para la otra torre y como la parábola es simétrica a su eje focal, luego la altura de la otra torre es la misma.

Ver figura 8

Figura 8



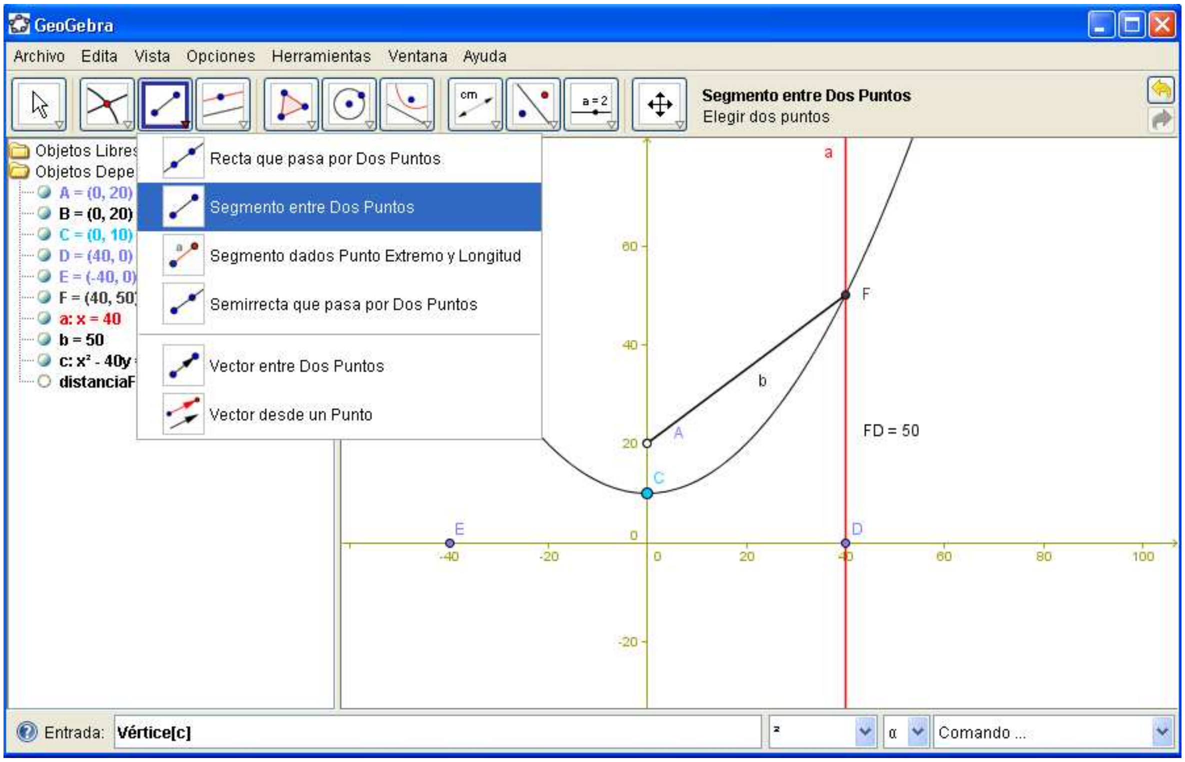
Ahora para saber si la distancia desde el foco a un punto de la parábola es la misma que desde ese punto a la directriz (definición de parábola), lo que haremos primero será medir la distancia desde el foco al punto F, y si coincide con la distancia de F a D, eso significa que la definición de parábola estará correcta, recuerda que el eje x en este ejercicio es la directriz de la parábola.

Lo único que se debe hacer es trazar un segmento de recta entre A y F y medirlo, luego si el valor es 50, la definición es correcta.

Para conseguir esto, utilizaremos la opción “segmento entre dos puntos” marcando los puntos A y F.

Ver figura 9

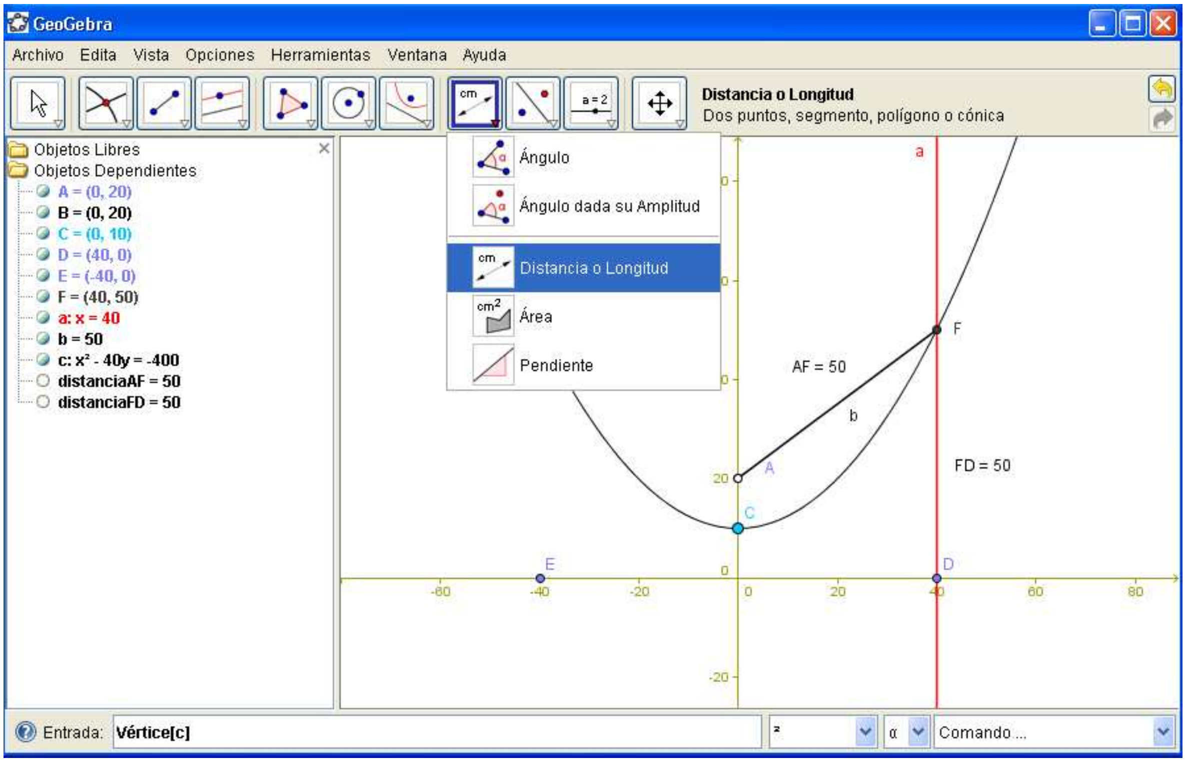
Figura 9



Luego utilizaremos la opción “distancia o longitud” marcando los dos puntos

Ver figura 10

Figura 10



Y justamente la distancia coincidió. Por lo tanto la definición es correcta

(*) Problema anexado en CD.

3.2.3 PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación se presentan una serie de problemas propuestos referente a lo que hemos estado viendo junto a una serie de indicaciones de ejercicios que se pueden encontrar en libros, los cuales serán citados según corresponda.

1) Un proyectil disparado desde el nivel del suelo describe en su trayectoria una parábola abierta hacia abajo. Si la altura máxima alcanzada por el proyectil es 100 metros y su alcance (horizontal) es de 800 metros.

   ¿Cuál es la distancia horizontal del punto de disparo al punto donde el proyectil alcanza por segunda vez la altura de 64 metros?

   Respuesta: 400 metros

2) Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Si el diámetro de la antena es de 4 metros y el receptor está ubicado a 1 metro de distancia del punto más bajo de la antena ¿cuál es la ecuación de la parábola que genera este paraboloide?

   Respuesta: Si ubicas la parábola en el origen la ecuación será $x^2=4y$ o si la ubicas en otro punto $(x-h)^2=4(y-k)$ donde (h,k) es el centro de la parábola

3) En un puente colgante, el cable del cual se sostiene describe una parábola. Este cable esta afirmado en sus extremos por dos torres cuya distancia entre ellas es de 200m. Si la distancia desde el punto más bajo de este cable hasta la superficie del puente es de 20m. ¿cuál es la altura del cable a una distancia de 40 metros desde una de las torres sobre el puente?

   Respuesta: 320 metros

4) Un telescopio de reflexión tiene un espejo con forma de paraboloide de revolución. Si el espejo mide 8 centímetros de diámetro en su extremo y 1 metro de profundidad ¿en dónde se concentrará la luz acopiada?

   Respuesta: 16 metros

A continuación presentamos al lector una serie de libros con sus respectivos autores en los cuales encontrará una serie de ejercicios rutinarios de las secciones cónicas correspondiente a esta unidad.

Libros:

Libro	**Autor**	**Capítulo**	**Ejercicios con Secciones Cónicas**
Cálculo Diferencial e Integral	Frank Ayres	Cap. 5 Pág. 42-55	Pág. 53-55
Cálculo 8va Edición	Purcell, Varberg.	Cap. 12 Pág. 517-539	Pág. 526,530,535
Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica	Walter Fleming, Dale Varberg.	Cap. 4 Pág. 182-204	Pág.196-201
El Cálculo con Geometría Analítica.	Louis Leithold.	Cap. 12 Pág. 586-618	Pág. 603,604,611 616-618

3.3 INTRODUCCIÓN A LA ELIPSE Y SU UTILIDAD

Al ingresar a esta sección nos daremos cuenta que tenemos bastantes cosas que decir referente a esta interesante curva, por ejemplo la elipse es la curva que describe los planetas en su giro alrededor del Sol, pero, por razones obvias no podemos verla tal cual.

Encontrar elipses a nuestro alrededor, aparentemente es difícil, pero sólo aparentemente. Vamos a ver a continuación algunos ejemplos.

En muchas ciudades es fácil encontrar plazas de planta elíptica, normalmente conocidas por el nombre de "plaza elíptica". Por ejemplo, en Madrid y Bilbao existen plazas de este tipo. Sin embargo, la plaza de planta elíptica más famosa en el mundo probablemente sea la Plaza de San Pedro en el Vaticano.

También podemos encontrar edificaciones con planta elíptica. Un ejemplo es la iglesia del Monasterio de San Bernardo, más conocido por "Las Bernardas" en Alcalá de Henares. Un templo con una única nave y planta elíptica, con cúpula del mismo trazado. En sus muros se abren seis capillas, cuatro de ellas también de planta elíptica, con diferentes tamaños de sus portadas. Incluso tenemos mesas elípticas, plantillas para elipses y aunque no lo creas existen altavoces en forma de elipse. Un aspecto en el cual nos podemos interiorizar es el caso del universo y sus astros.

Leyes de Kepler: El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) formuló las tres famosas leyes que llevan su nombre después de analizar un gran número de observaciones realizadas por Tycho Brahe (1546-1601) de los movimientos de los planetas, sobre todo de Marte.

Kepler, haciendo cálculos sumamente largos, encontró que había discrepancias entre la trayectoria calculada para Marte y las observaciones de

Tycho, diferencias que alcanzaban en ocasiones los 8 minutos de arco (las observaciones de Tycho poseían una exactitud de alrededor de 2 minutos de arco), estas diferencias lo llevaron a descubrir cuál era la verdadera órbita de Marte y los demás planetas del Sistema Solar.

3.3.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS CON ELIPSES.

A continuación se presentará un conjunto de 10 ejercicios que tienen relación con la sección cónica denominada elipse, el propósito de estos ejercicios es desarrollar en el lector el interés por aprender más acerca de esta interesante cónica, nos hemos dado cuenta que la utilidad es quizás mayor a la que imaginamos por lo mismo es esta instancia de nuestro trabajo una real oportunidad para mostrar lo útil que es esta sección cónica.

Instamos al lector a hacerse parte de esta exposición en donde se darán a conocer las diferentes propiedades que tiene la elipse, la idea principal y que va a dominar en esta parte del trabajo es que el lector desarrolle sus competencias en torno a esta sección cónica con las diferentes aplicaciones que de ésta se pueden desprender.

3.3.2 PRESENTACIÓN DEL MATERIAL DE ELIPSE

Trabajemos resolviendo los siguientes Problemas de Planteo.

Problema Nº 1 : “El excéntrico planeta”

Objetivo del Problema:

- **Con el siguiente problema aplicarás la primera ley de Kepler logrando así percibir la gran importancia que ésta tiene para el estudio de la órbita de los planetas**.

Planteo del Problema.

1) La distancia mínima y máxima de Plutón al Sol ocurre en los vértices de su órbita. La distancia mínima es de 2,7 billones de millas y la máxima distancia es de 4,5 billones de millas (1 milla= 1.61 Km.). ¿Cuál es la excentricidad de este ex planeta?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

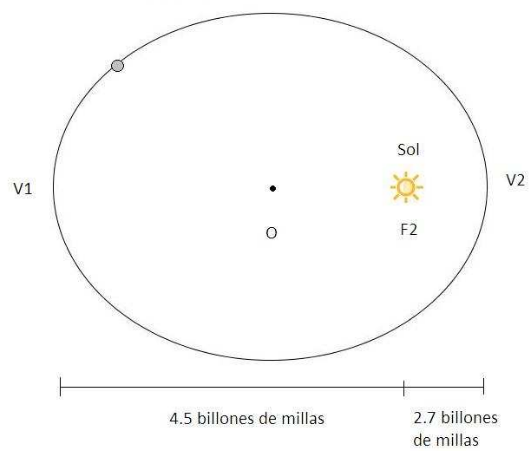
Debes darte cuenta: Como debes saber la órbita de los planetas se comportan de forma elíptica, además sabemos que el sol está ubicado en uno de sus focos. En el enunciado nos dicen la distancia máxima y mínima que existe entre el Sol y Plutón

¿En qué ubicación (dentro de la órbita) crees que se encuentra el planeta en su máxima y mínima distancia?

Esta ubicación serían los vértices del eje mayor, por lo tanto si queremos saber la medida del eje mayor debemos sumar la mínima y máxima distancia.

2º Representación Gráfica.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



Debes darte cuenta: en el gráfico se observa el Sol ubicado en el foco de la elipse, además de la ubicación de los vértices del eje mayor (mínima y máxima distancia), luego ya podemos hacer algunas conclusiones de las medidas de algunos elementos importantes de la elipse.

3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: El largo del eje mayor es "2a", que en este caso sería la suma de la mínima y máxima distancia por lo tanto

$$2a = 4,5 + 2,7 = 7,2 \quad \text{luego } a = 3,6$$

Por lo tanto la distancia desde un vértice del eje mayor al centro de la elipse es 3,6 (semieje mayor).

Se observa que: La distancia desde un foco al centro de la elipse es "C", por los tanto si al semieje mayor le restamos la mínima distancia obtenemos "C", luego haciendo los cálculos resulta

$$C = 3,6 - 2,7 = 0.9$$

Finalmente $e = \frac{c}{a}$, por lo tanto

$$e = \frac{0,9}{3,6} = 2,5$$

Luego podemos concluir: la excentricidad del planeta es 2,5

NOTA: Antiguamente a Plutón se le adjudicaba la mayor excentricidad de los 9 planetas. El planeta que tiene la órbita menos excéntrica es Venus, quien tiene una excentricidad de 0.0068**. ¿Qué significa dicho número? ¿Por qué no es el planeta Mercurio el que tiene menor excentricidad?**

El ex planeta Plutón fue el planeta con mayor excentricidad, es decir era el planeta que tenia la órbita mas aplastada del sistema solar.

Que Mercurio sea el planeta más cercano al sol no quiere decir que su órbita sea la más circular.

Problema Nº 2 "Fasat Beta"

Objetivo del Problema:

- **Con el siguiente problema lograrás identificar cada elemento de la elipse a partir de su ecuación, para posteriormente graficarla.**

Planteo del Problema.

2) Un satélite chileno está en órbita alrededor de la luna. La ecuación que describe el movimiento del satélite esta dado por la ecuación $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Grafica de forma conveniente la órbita del satélite y además determina lo más lejos y lo más cerca que puede estar el satélite del centro de la luna.

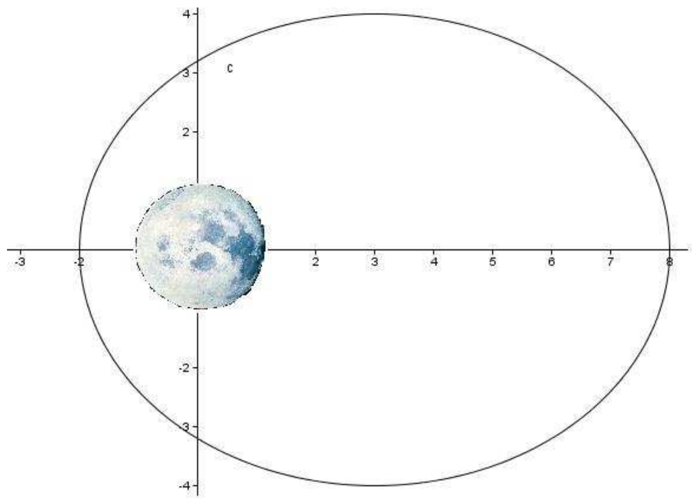
1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: Como se nos entrega la ecuación de la elipse podemos deducir todos sus elementos. Debemos tener en cuenta que la ecuación de la elipse es $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}$, donde "a" es el semieje mayor, "b" el semieje menor y el centro de la elipse seria el punto (h,k). Por lo tanto ya podemos saber todos los elementos de la elipse entregada.

2º Representación Gráfica.

Debes darte cuenta: Graficaremos de forma conveniente la elipse, de forma tal que la luna (uno de sus focos) esté ubicada en el origen, encuentra el valor de cada elemento de la elipse para poder dibujarla, luego la gráfica de la ecuación resulta.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Luego podemos concluir: Como ya tienes graficada la ecuación de la elipse se puede apreciar claramente que la mínima distancia es 2

Debes darte cuenta: Recuerda que la distancia se mide sólo en números positivos y cero, y la máxima sería 8.

Problema Nº 3 “¿Qué tan cercanos son Júpiter y el Sol?”

Objetivo del Problema:

- **Mediante los datos proporcionados por el enunciado deducir algunos elementos de la elipse para luego (mediante el uso de ecuaciones) solucionar el problema.**

Planteo del Problema.

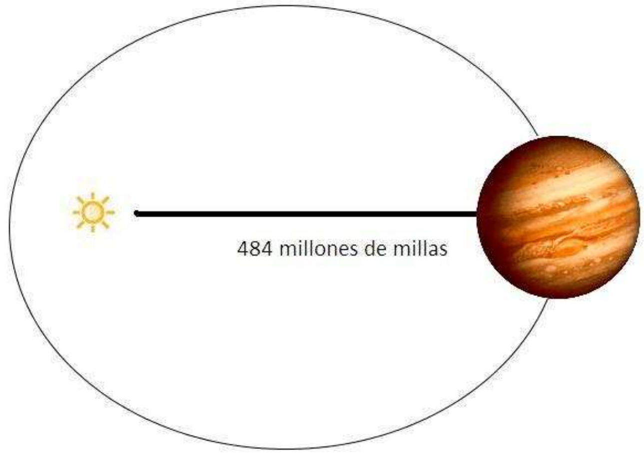
3) La distancia máxima entre el Sol y Júpiter es 484 millones de millas. Si la excentricidad de la órbita de dicho planeta es 0,05 ¿Cuál será la distancia mínima que tendrá la órbita de Júpiter con el Sol?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: Observemos los datos que nos da el enunciado, en primer lugar tenemos la excentricidad que es $e = \frac{c}{a}$, luego $0{,}05 = \frac{c}{a}$ y por otra parte sabemos la máxima distancia que es 484 millones de millas, por lo tanto tendremos que buscar una forma conveniente de escribir esas 484 millones de millas para luego crear un sistema de ecuaciones.

2º Representación Gráfica.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: Como vimos anteriormente $e = \frac{c}{a}$, luego

$\frac{c}{a} = 0{,}05$, despejando resulta $c = 0{,}05a$, a esta igualdad la designaremos como (1)

Se observa que: Por otra parte sabemos que la medida del eje mayor es 2a, lo que resultaría al sumar la máxima y mínima distancia (que es nuestra incógnita a la cual llamaremos “x”), por lo tanto

$2a=484*10^{6}+x$, luego a esta igualdad la designaremos como (2)

Por otro lado sabemos que

$c = a - x$, sea esta igualdad (3)

Luego de (1) y (3) resulta

$0{,}05a = a - x$ Despejando “a” obtenemos $a = \frac{x}{0{,}95}$ (4)

Finalmente de (2) y (4) resulta

$\frac{2x}{0{,}95} = 484*10^{6} + x$, luego despejando “x” resulta $x = 437904761$ millas

Luego podemos concluir: Por lo tanto la distancia mínima que hay entre Júpiter y el Sol es 437904761 millas.

Problema Nº 4 “El comportamiento del satélite”

Objetivo del Problema:

- **Mediante los datos proporcionados por el enunciado deducir algunos elementos de la elipse para luego (mediante el uso de ecuaciones) solucionar el problema.**

Planteo del Problema.

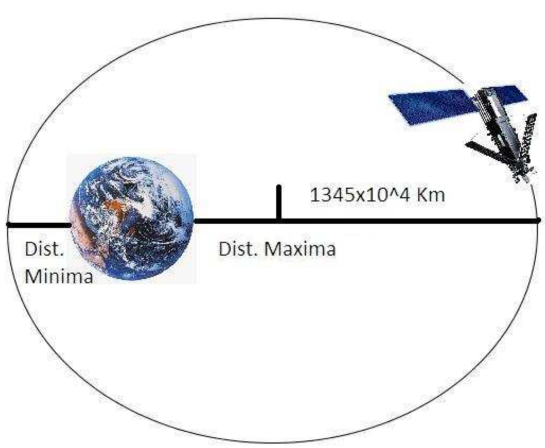
4) Un satélite describe una trayectoria elíptica alrededor de la Tierra que se encuentra en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor mide $1345x10^4$ kilómetros y que su excentricidad es 1/32 aproximadamente, hallar la máxima y la mínima distancia del satélite a la Tierra.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: En el presente ejercicio, en primer lugar, se puede apreciar que nos dan la medida del semieje mayor, por lo tanto seria la medida de “a”, además nos proporcionan el valor de la excentricidad,

2º Representación Gráfica.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: Como vimos en la recopilación de datos el enunciado nos da el valor de la excentricidad y el valor de "a" por lo tanto:

$e = \frac{1}{32} = \frac{c}{a}$, como a=$1345x10^4$ resulta

$\frac{1}{32} = \frac{c}{1345x10^4}$, luego c=420312,5

Sabemos el valor de "c" (distancia entre el foco y el centro de la elipse).

Luego si queremos saber la máxima distancia debemos sumar la distancia desde el foco al centro y el semieje mayor (análogamente con la mínima distancia).

Luego podemos concluir: Finalmente la máxima distancia sería c+a=420312,5+$1345x10^4$ =13870312,5km

Y la mínima distancia sería a-c=$1345x10^4$ -420312,5= 13029687,5km

Problema Nº 5 “Órbita a casa”

Objetivo del Problema:

- **Reconocer los elementos de la elipse dados en el enunciado, para luego, mediante una forma analítica, encontrar los elementos necesarios para construir la ecuación de la elipse.**

Planteo del Problema.

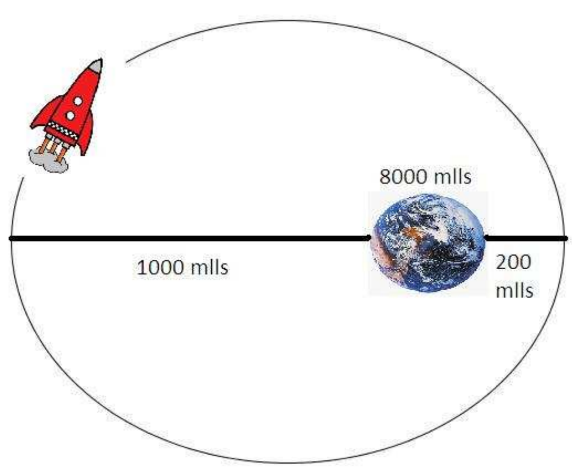
5) Una nave espacial en uno de sus orbitajes alrededor de la Tierra tuvo una altitud mínima de 200 millas y una máxima de 1000 millas. La ruta de la nave es elíptica con el centro de la Tierra en un foco. Encuentre la ecuación de la ruta si el diámetro de la Tierra es de 8000 millas aprox.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: Si deseamos encontrar la ecuación de la elipse debemos encontrar la medida de todos sus elementos. Para hacer más fácil la búsqueda de la ecuación, centraremos ésta en el origen.

2º Representación Gráfica.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: En primer lugar debemos saber la medida del eje mayor que sería igual a 9200 millas, debido a la suma de la mínima y máxima distancia y el diámetro de la Tierra, luego a=4600. Por lo tanto c=400.

Luego

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$400^2 = 4600^2 - b^2$$

Luego b=4599 aprox.

Luego podemos concluir: Finalmente la ecuación de la ruta estaría dada por:

$$\frac{x^2}{4600^2} + \frac{y^2}{4599^2} = 1$$

A continuación para conocimiento del lector presentaremos algunos datos de gran valor para lo que realizaremos más adelante.

Debes recordar que las leyes de Kepler fueron enunciadas para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol, a continuación te presentamos dos:

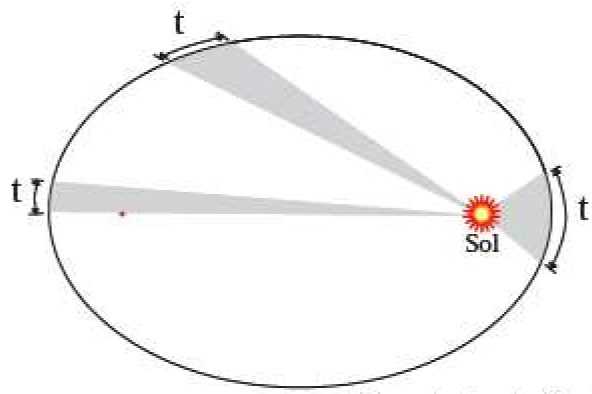
2da Ley: Ley de las Áreas

Las áreas barridas por el radio vector que une a los planetas al centro del Sol son iguales a tiempos iguales.

La velocidad orbital de un planeta (velocidad a la que se desplaza por su órbita) es variable, de forma inversa a la distancia al Sol: a mayor distancia la velocidad orbital será menor, a distancias menores la velocidad orbital será mayor.

La velocidad es máxima en el punto más cercano al Sol (perihelio) y mínima en su punto más lejano (afelio).

El radio vector de un planeta es la línea que une los centros del planeta y el Sol en un instante dado. El área que describe en cierto intervalo de tiempo formada entre un primer radio vector y un segundo radio vector mientras el planeta se desplaza por su órbita es igual al área formada por otro par de radios vectores en igual intervalo de tiempo orbital.



Segunda Ley de Kepler

3ra Ley: Ley Armónica

Los cuadrados de los períodos orbitales sidéreos de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.

El período sidéreo se mide desde el planeta y respecto de las estrellas: está referido al tiempo transcurrido entre dos pasajes sucesivos del Sol por el meridiano de una estrella.

$$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{d_1^{\,3}}{d_2^{\,3}}$$

Donde T1 y T2 son los períodos orbitales y d1 y d2 las distancias a las cuales orbitan del cuerpo central. La fórmula es válida mientras las masas de los objetos sean despreciables en comparación con la del cuerpo central al cual orbitan.

Para dos cuerpos con masas m1 y m2 y una masa central M puede usarse la siguiente fórmula:

$$\frac{T_1^{\,2}(M+m_1)}{T_2^{\,2}(M+m_2)} = \frac{d_1^{\,3}}{d_2^{\,3}}$$

Esta ley fue publicada en 1614 en la más importante obra de Kepler, "Harmonici Mundi", solucionando el problema de la determinación de las distancias de los planetas al Sol. Posteriormente Newton explicaría, con su ley de gravitación universal, las causas de esta relación entre el período y la distancia.

La Elipse transportando el sonido

En el famoso Taj Mahal, construido en el siglo XVII (1630-1652) en la India por el emperador Sah Yahan en honor de su esposa Mumtaz-i Mahall, uno de los máximos logros de la arquitectura mogol, tiene una galería de los suspiros en donde anteriormente a la pareja en luna de miel se le colocaba en los respectivos focos, de tal forma que el novio murmuraba la frase: *A la memoria de mi amada inmortal*, la cual era solamente escuchada por su novia situada a una distancia de algo más de 15 metros.

Problema Nº 6 "El viaje del sonido"

Objetivo del problema:

- **Comprender y aplicar el uso de la elipse anteriormente leída, para luego reconocer cada uno de sus elementos para poder así resolver el problema.**

Planteo del Problema.

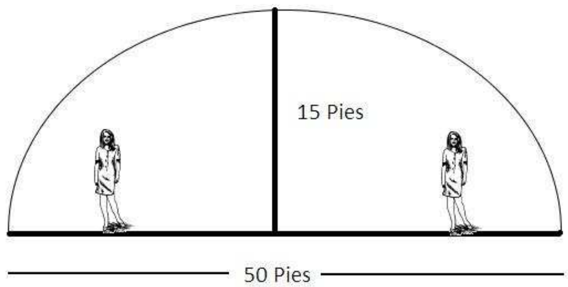
6) En el techo de una galería que tiene la misma arquitectura que la galería de los suspiros, tiene una altura máxima de 15 pies y los vértices del piso están a 50 pies de distancia entre sí. Si dos personas de ubican en los focos de esta sala ¿A qué distancia de los vértices están sus pies?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: En primer lugar debemos percatarnos que en este ejercicio trabajaremos con una semielipse. Nos dan la medida de la distancia entre los vértices que es 50 metros (por lo tanto 50=2a), por lo tanto nos proporcionan la medida del eje mayor. Previamente nos decían que la altura máxima de la galería es 15 pies, pero como en este caso estamos trabajando con una semielipse 15 pies serían la mitad del eje menor (luego b=15).

2º Representación Gráfica.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: Como vimos en el punto 1º del enunciado podemos obtener la medida del semieje menor y mayor, por lo tanto a=25 b=15. Luego recordemos que $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Calculemos el valor de "c"

$c=\sqrt{25^2-15^2}$, luego c=20

Se observa que: Hemos obtenido "c" que es la distancia entre el centro de la elipse y sus focos, como conocemos la medida del semieje mayor que es 25 la distancia solicitada en el ejercicio sería la diferencia entre el semieje mayor y la distancia centro-foco.

Luego podemos concluir: La distancia entre las personas y el vértice de la elipse es 25-20=5

La importancia de la Elipse en la medicina

La propiedad reflexiva de los elipsoides (y de los semielipsoides) se utilizan en la medicina moderna en un dispositivo denominado **litotríptero,** que desintegra cálculos por medio de ondas de choque submarinas de alta energía. Después de tomar mediciones extremadamente precisas, el operador ubica al paciente de modo que el cálculo esté en el foco. A continuación se producen ondas de choque de alta frecuencia en el otro foco y las ondas reflejadas desintegran el cálculo. El tiempo de recuperación con esta técnica suele ser de 3 a 4 días, en vez de las 2 a 3 semanas que se requieren con la cirugía convencional. Además, la tasa de mortalidad es inferior a 0.01% en comparación con el 3% de la cirugía convencional.

Problema Nº 7 “Salvando vidas con la Elipse”

Objetivo del Problema:

- **Según el párrafo anterior, comprender y aplicar el uso de la elipse en la medicina moderna.**

Planteo del Problema.

7) Se construirá un litotríptero de 15 cm. de altura y 18 cm. de diámetro desde el foco F_1 se emitirán ondas de choque submarina de alta frecuencia hasta el foco F_2 más próximo al vértice V. Encontrar la profundidad donde se encuentra el cálculo.

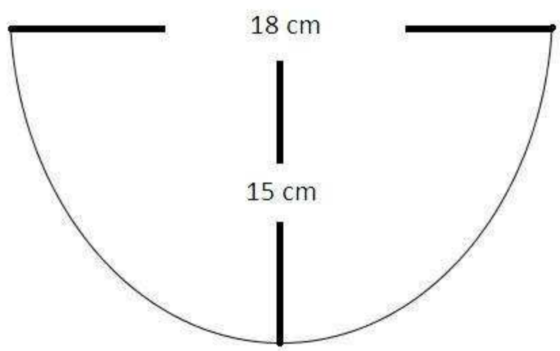
1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: En primer lugar debes imaginar el sentido en el cual estará orientada la elipse, ya que en este caso estamos hablando de una operación por lo tanto la elipse estará orientada hacia arriba.

Analizando los datos entregados por el enunciado, nos dice que en diámetro es 18cm lo que vendría a ser el eje menor, luego b=9cm. Por otra parte nos dicen la altura de este semielipsoide que es 15cm, por lo tanto a=15cm.

2º Representación Gráfica.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: En la primera parte logramos obtener las medidas de “a” y “b” que son 15 y 9 cm respectivamente.

Se observa que: En el enunciado nos preguntan la ubicación del cálculo el cual se encuentra en el foco en donde se hizo la semielipse, por lo tanto nos falta encontrar la medida de “c” que es muy fácil de encontrar debido a que tenemos los valores de “a” y “b”, por lo tanto ocupando la fórmula $a^2 - b^2 = c^2$ resultaría

$c^2 = 15^2 - 9^2$, luego

$c^2 = 144$

Finalmente c = 12cm.

Luego podemos concluir: Por lo tanto la profundidad donde se encuentra el cálculo es 12cm.

Problema Nº 8 "Jugando a ganador"

Objetivo del Problema:

- **Reconocer cada elemento de la elipse, para luego haciendo uso de la definición de esta cónica resolver el problema.**

Planteo del Problema.

8) Una mesa de pool con la forma de una elipse tiene un agujero en la superficie como se ve en la figura. Hay sólo dos bolas en el juego, una bola guía y una bola objetivo. La idea del juego es golpear la bola objetivo con la bola guía y que ésta caiga en el agujero después que rebote con el almohadón elíptico. La pelota guía puede ponerse en cualquier lugar de la mesa.

Describe una técnica que asegure que la bola objetivo caerá al agujero, considerando una ubicación adecuada de la bola guía.

No olvides: **La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.**

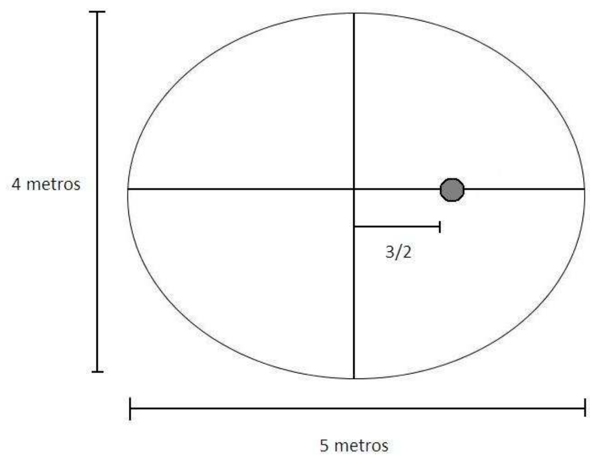
1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: Observando el dibujo podemos apreciar que la medida del eje mayor es 5 y la del menor 4, por lo tanto a=2,5 y b=2. Conocidos estos elementos

¿Qué conclusión puedes sacar respecto de la ubicación del agujero de la mesa?

2º Representación Gráfica.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: Con las medidas que nos proporciona el dibujo podemos calcular la medida de “c” luego

$$c^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2$$

$c^2 = \frac{9}{4}$, por lo tanto

$$c = \frac{3}{2}$$

Luego podemos concluir: la ubicación del agujero es uno de los focos de la elipse. Para que la bola objetivo siempre entre al agujero es necesario ubicarla en el otro foco y sin importar en la dirección que sea golpeada la bola objetivo ésta siempre caerá en el agujero debido a la definición de la elipse.

A continuación presentamos dos ejercicios en el programa computacional para geometría llamado GEOGEBRA.

Problema 9: "Propiedad de la Elipse"**(*)**

Objetivo del Problema:

- **Utilizar Geogebra en la aplicación del ejercicio.**
- **Aprender a usar propiedades de las cónicas con Geogebra.**
- **Encontrar datos específicos**

Planteo del Problema.

9) La elipse es una curva que cumple una curiosa propiedad:

La recta tangente en un punto *P* de la elipse forma ángulos iguales con los vectores que van desde los focos, *F* y *F′*, y el punto *P*.

Debido a esta propiedad, en algunos lugares apropiados (recintos con techo elíptico, instalaciones de museos científicos, etc.), se puede asistir al hecho curioso de que dos personas, situadas cada una en los focos de la elipse, pueden mantener una conversación, pese al tumulto que exista a su alrededor, ya que el sonido sigue la trayectoria que marca la dirección de estos vectores, reflejándose en el punto *P* y llegando desde un foco al otro, prácticamente sin interferencias.

Utilizando Geogebra demuestre esta interesante propiedad dado que los focos de una elipse son los puntos A=(-4,3) y B=(4,3) y un punto que pertenece a ella es C=(2,5)

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

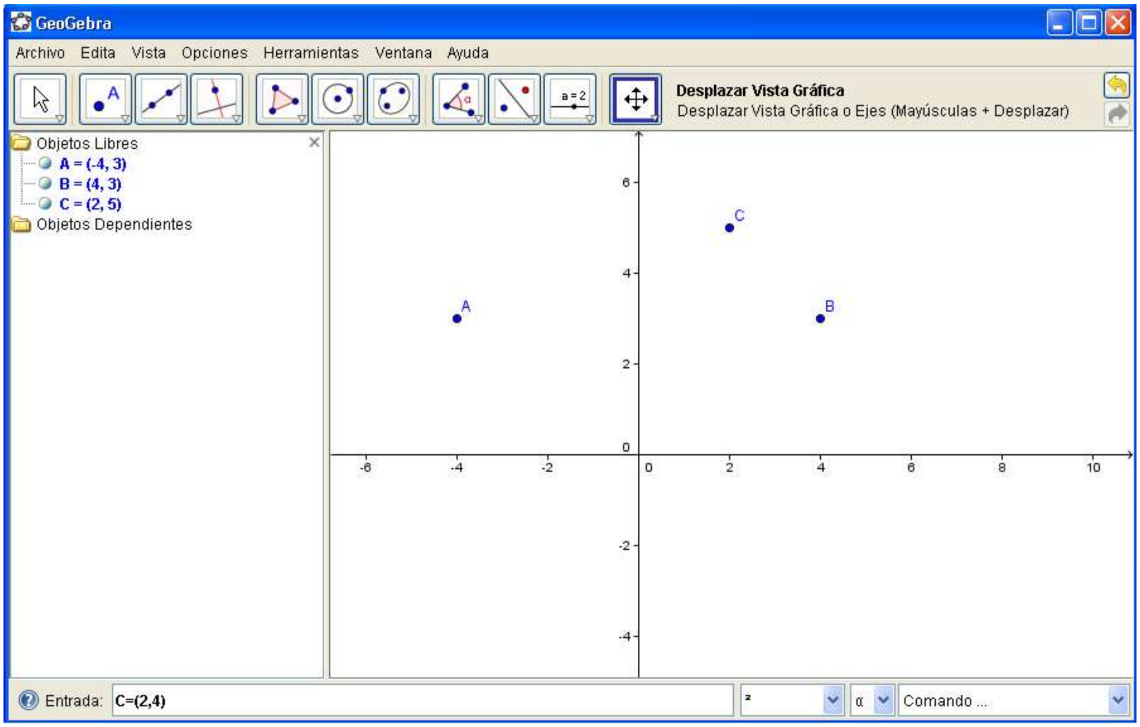
¿Podemos probar esta propiedad utilizando Geogebra?

Por supuesto que si lo primero que haremos será abrir el programa y construir una elipse. En donde A y B serán nuestros los focos y C será un punto de ella.

Para ello ingresaremos los tres puntos es decir A, B, C según vemos a continuación.

Ver figura 1

Figura 1

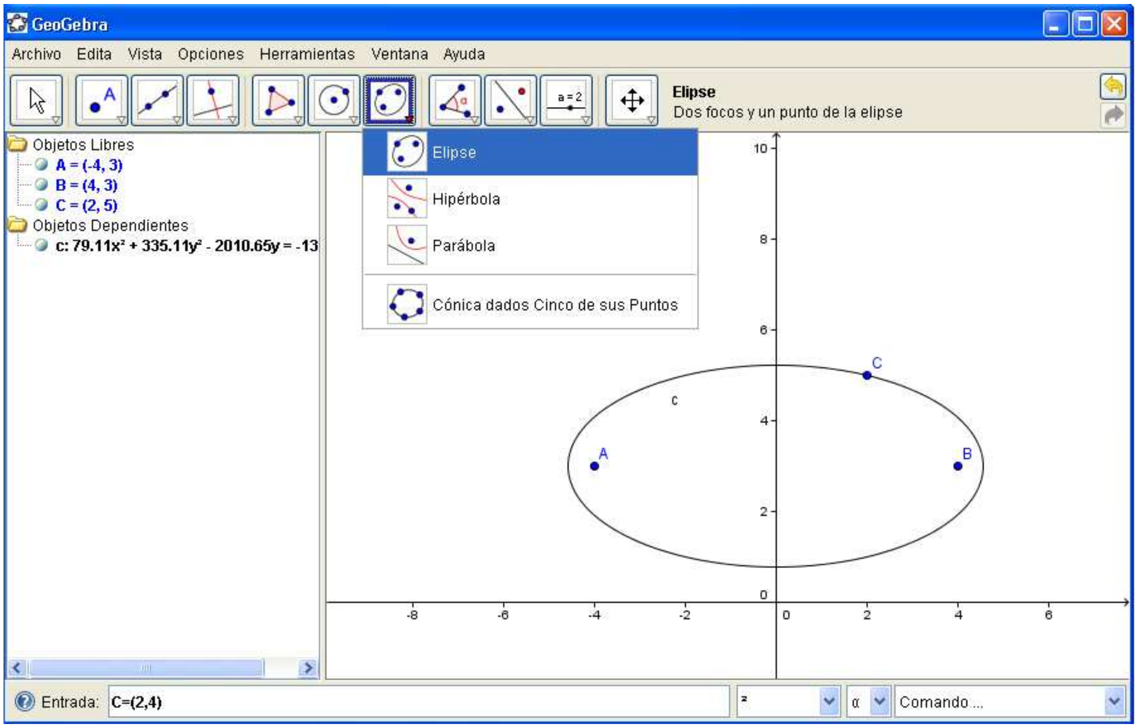


Ahora que tenemos los tres puntos ingresados ¿Cómo formo la elipse?

Es muy sencillo lo que harás será escoger la opción de ELIPSE en el menú.

Ver figura 2

Figura 2



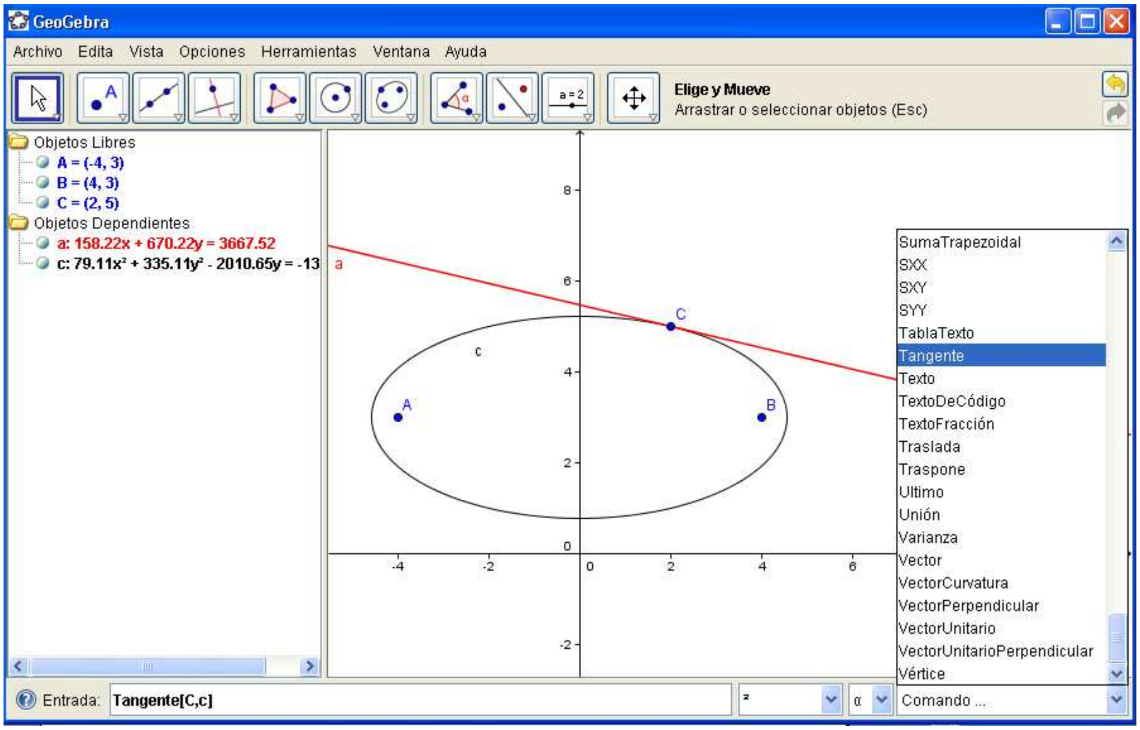
2º Representación Gráfica.

¿Puedo con este programa colocar una tangente a la figura que formé?

Por supuesto que sí, lo que debes hacer será buscar la opción TANGENTE en la barra comando e ingresar el punto en donde quieres la tangente. Debes percatarte que el programa le ha asignado a la sección cónica la letra “c”. luego lo que harás es ingresar el punto en donde se colocará la tangente.

Ver figura 3

Figura 3

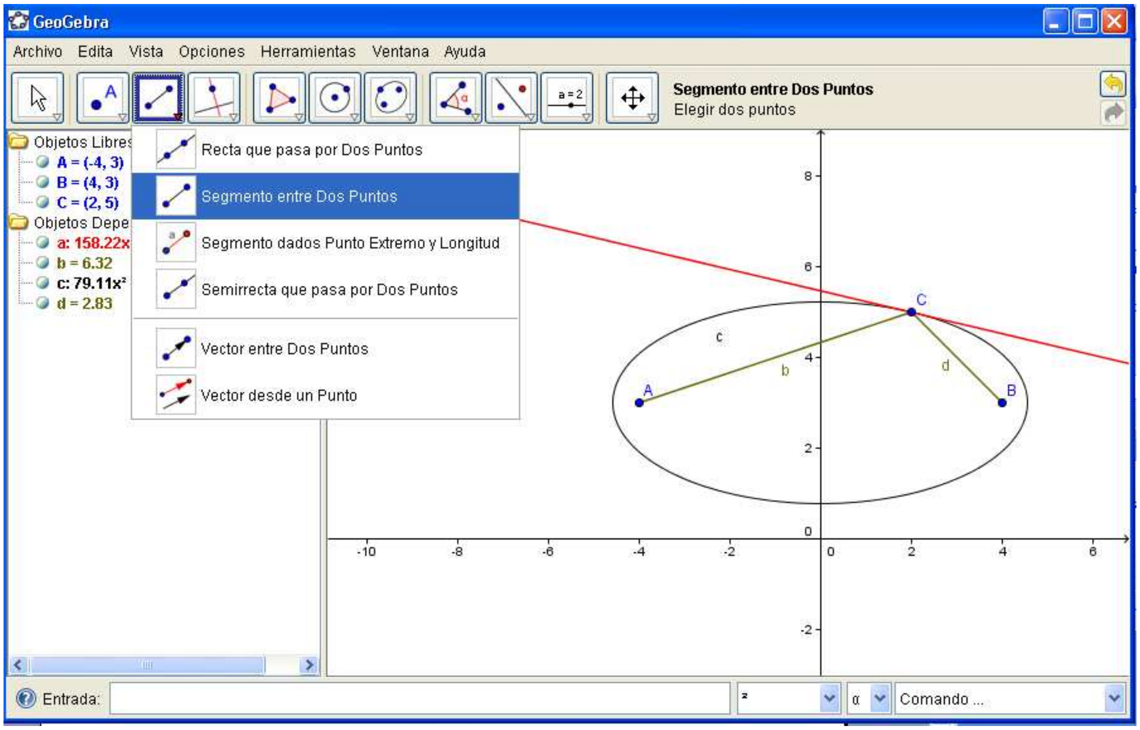


¿Podemos trazar segmentos de recta con Geogebra?

En efecto que se puede, para ello trazaremos un segmento de recta entre A y C como también entre B y C, utilizaremos la opción segmento que nos da a escogen en el menú.

Ver figura 4

Figura 4

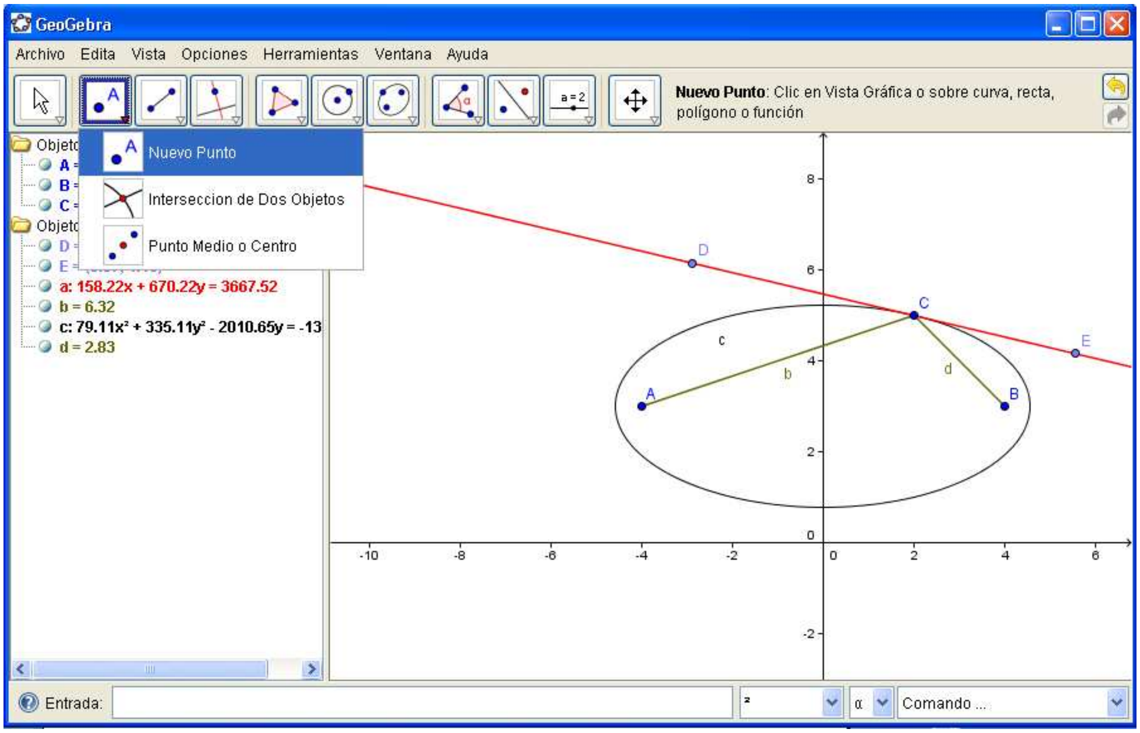


¿Y si quisiera agregar nuevos puntos en Geogebra puedo hacerlo?

Por supuesto que sí, agregaremos dos nuevos puntos en nuestra tangente para medir los ángulos y probar si es cierta esta propiedad.

Ver figura 5

Figura 5



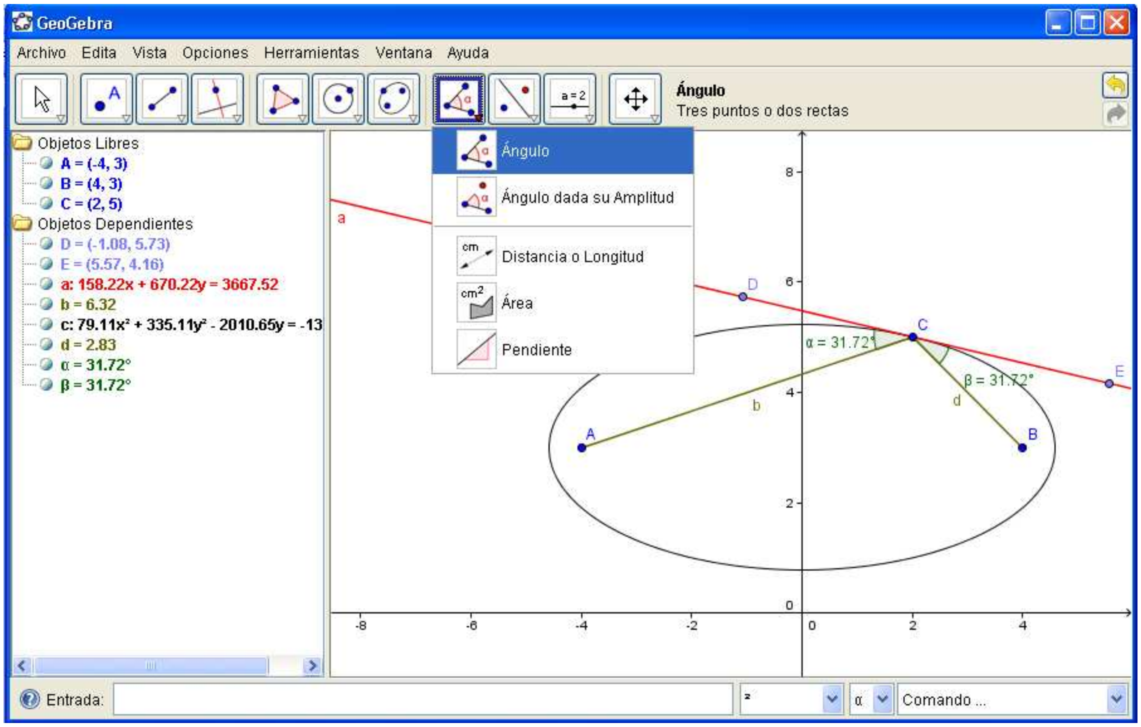
3º Cálculos y Desarrollo.

¿Ahora como podemos medir los ángulos?

Para ello utilizaremos la opción “ángulo” del menú y mediremos los ángulos, ahora bien después de haber hecho esto es cierto la propiedad de la elipse y hemos usado Geogebra para comprobarla.

Ver figura 6

Figura 6


GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Ángulo
Tres puntos o dos rectas
Objetos Libres
A = (-4, 3)
B = (4, 3)
C = (2, 5)
Objetos Dependientes
D = (-1.08, 5.73)
E = (5.57, 4.16)
a: 158.22x + 670.22y = 3667.52
b = 6.32
c: 79.11x² + 335.11y² - 2010.65y = -13
d = 2.83
α = 31.72°
β = 31.72°
Ángulo
Ángulo dada su Amplitud
Distancia o Longitud
Área
Pendiente
α = 31.72°
β = 31.72°
Entrada:
Comando ...

<u>Problema 10</u><u>: “El Velódromo en la capital”</u>**<u>(*)</u>**

<u>Objetivo del Problema</u>:

- **Utilizar Geogebra en la aplicación del ejercicio.**
- **Aprender a usar propiedades de las cónicas con Geogebra.**
- **Encontrar datos específicos**

<u>Planteo del Problema.</u>

10) Se pretende construir un velódromo en el sur de la capital en forma de elipse, y para ello se cuenta con un terreno de 48 decámetros cuadrados.

Los dos pilares principales estarán en los focos de la elipse.

Si la elipse que dará forma al velódromo está dada por la ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Determine por medio de un programa computacional (Geogebra)

1) La forma de la elipse y grafíquela.
2) La ubicación de los focos en donde estarán los pilares.
3) La distancia entre ellos (los pilares)
4) Indique los vértices de la elipse.
5) Calcule el área que ocupará el velódromo y compruebe si alcanza a ser construido en el terreno con el que se cuenta.

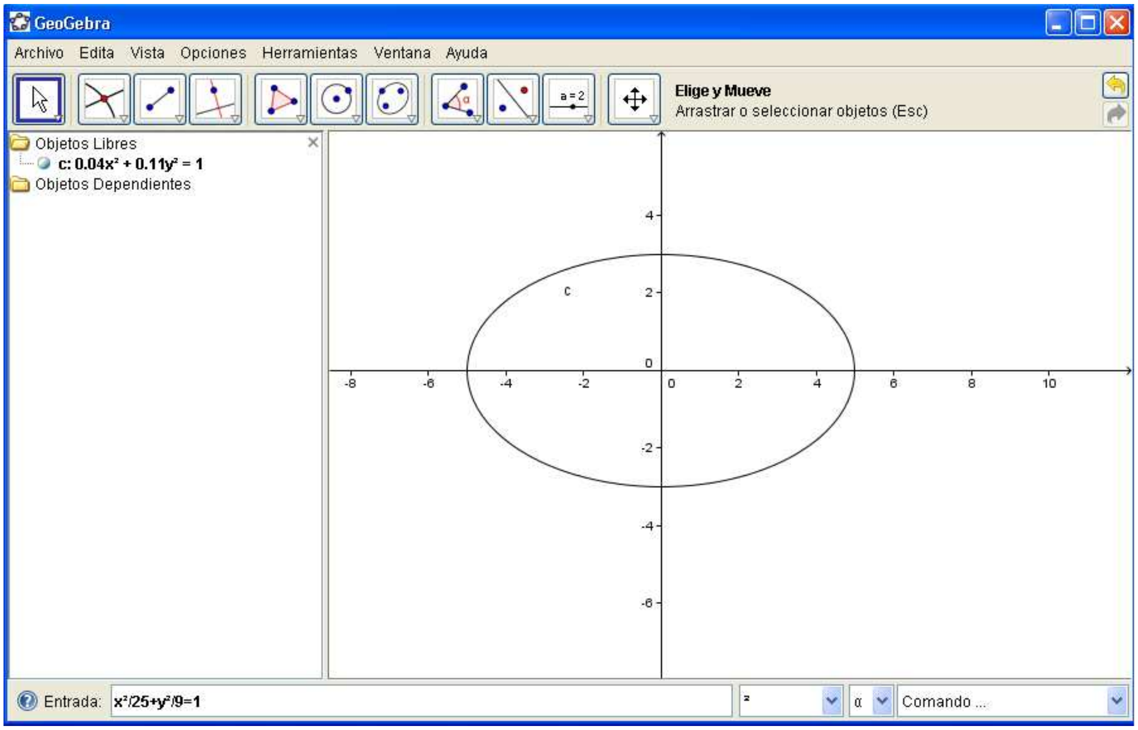
1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿Cómo puedo graficar la elipse con los datos que me proporcionan en Geogebra?

Para que esto sea posible ingresaremos en la parte inferior izquierda del programa Geogebra la ecuación de la elipse, lo cual nos permitirá poder visualizarla como queremos según lo pedido en el enunciado.

Ver figura 1

Figura 1



2º Representación Gráfica.

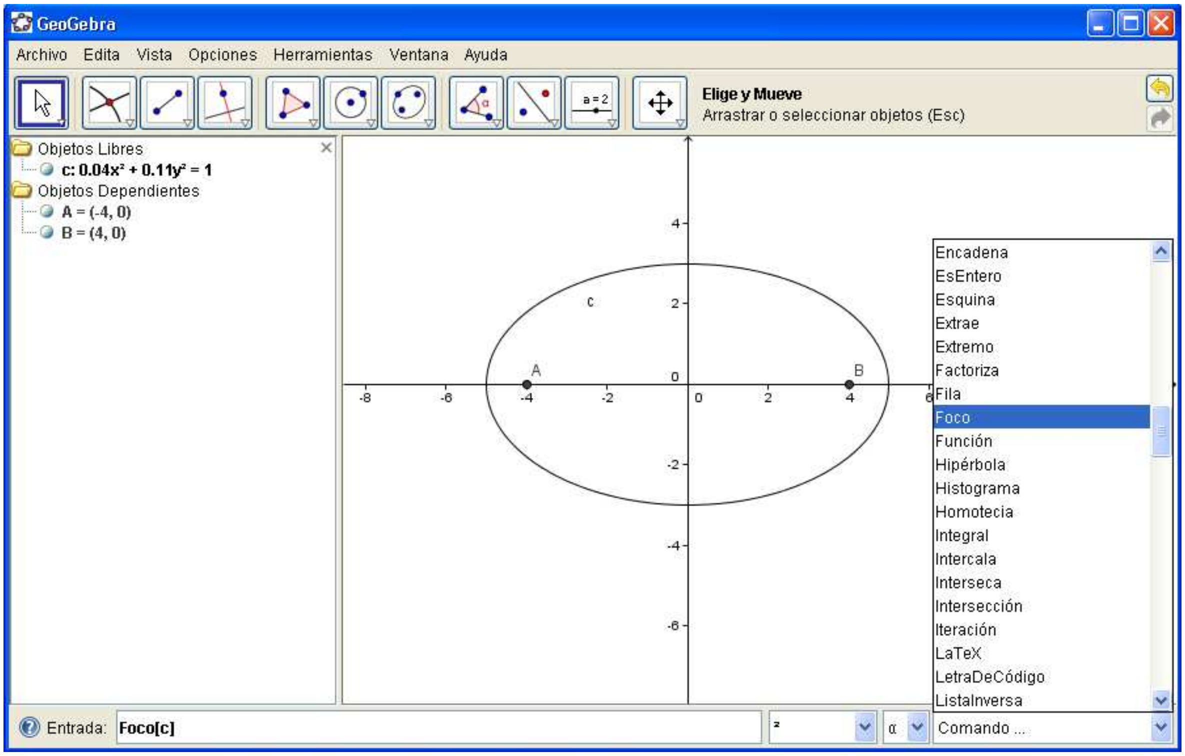
¿Cómo podemos encontrar los focos de nuestra elipse?

Para encontrar los focos de nuestra elipse utilizaremos el comando "FOCOS [c]"

Y ya tenemos la ubicación de los pilares, que son los puntos $F_1(-4,0)$ y $F_2(4,0)$.

Ver figura 2

Figura 2



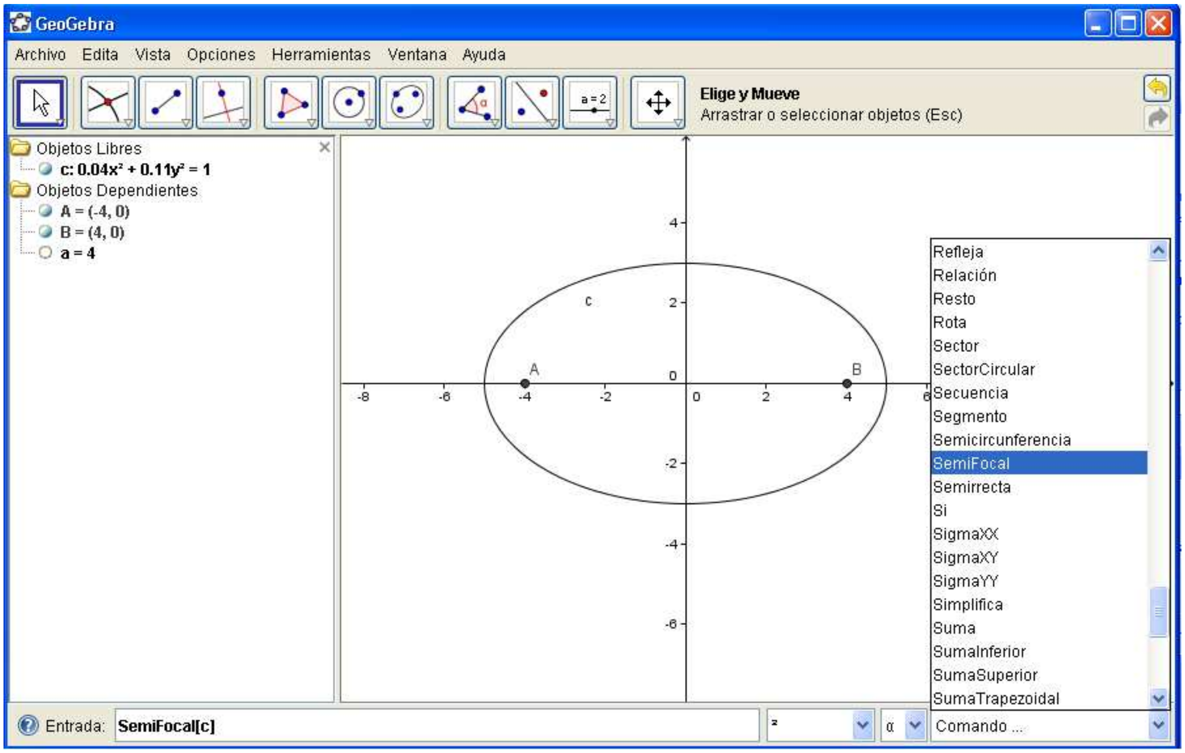
3º Cálculos y Desarrollo.

¿Y cómo encuentro la distancia entre los focos?

Para saber la distancia entre los focos utilizamos la opción “SEMIFOCO[c]” y luego lo que haremos será multiplicar por 2 ese valor obteniendo la distancia pedida, que en este caso es 8.

Ver figura 3

Figura 3

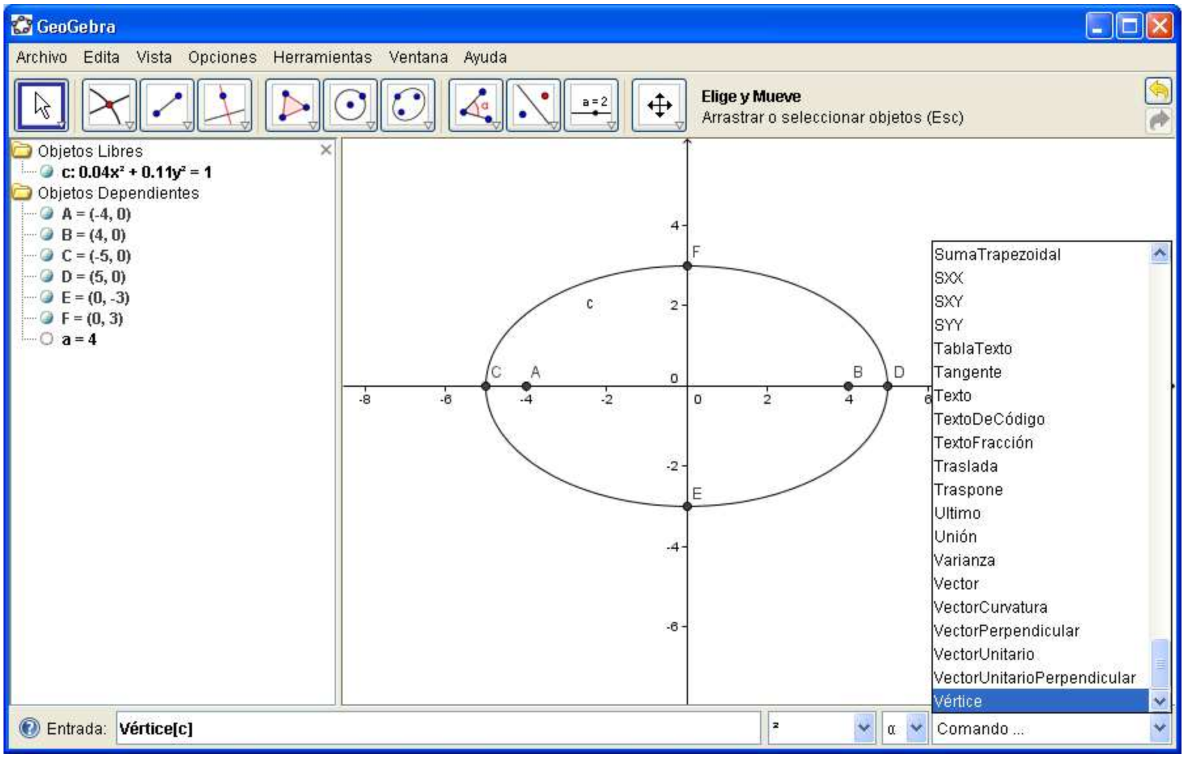


Pero quiero ahora encontrar los vértices ¿Cómo lo hago?

Ahora para encontrar todos los vértices utilizaremos la opción “VERTICE[c]” la cual nos indique que los vértices son los puntos. C(-5,0), D(5,0), E(0,-3) y F(0,3).

Ver figura 4

Figura 4



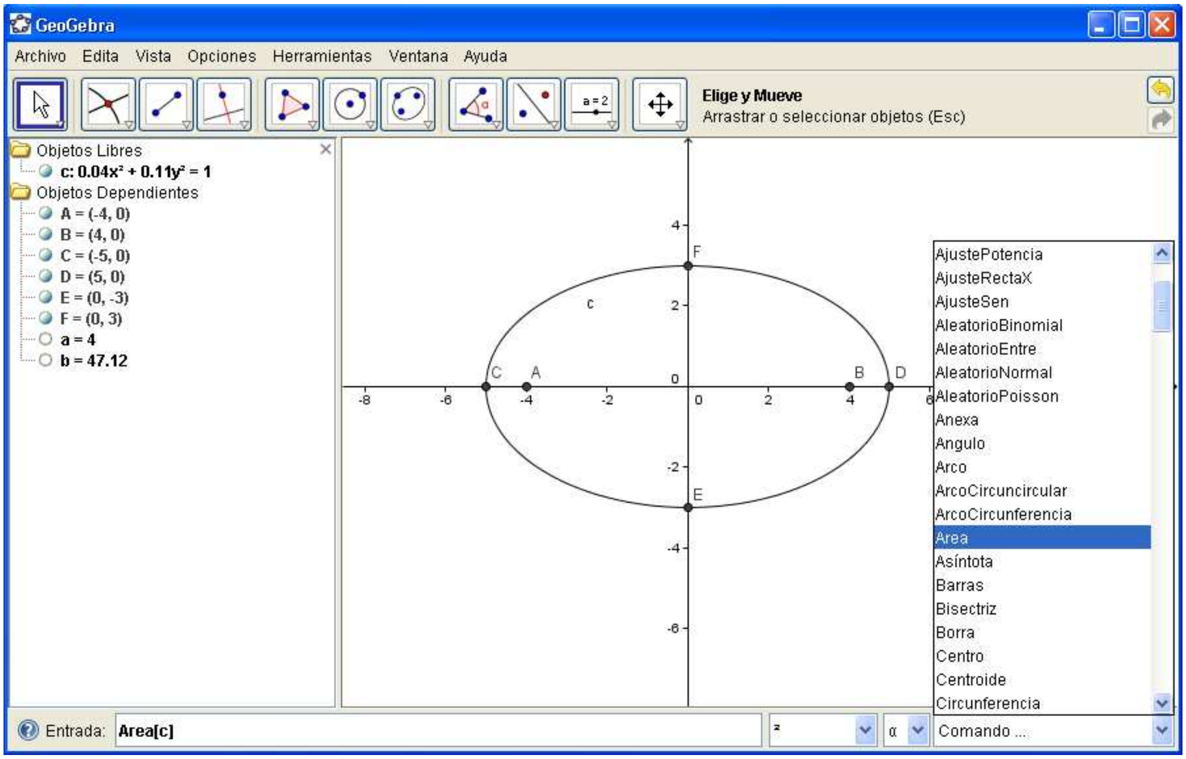
¿Cómo puedo saber si el área que ocupará el velódromo alcanza en el terreno con el que se cuenta?

Por último, para saber el área que ocupará, asumiendo que se mide en decámetros cuadrados. Utilizamos el comando "AREA[c]"

Luego la respuesta es que sí alcanzará ese terreno para construir nuestro velódromo. Ya que el área de la elipse es 47,12 y el terreno son de 48.

Ver figura 5

Figura 5



(*) Problema anexado en CD.

3.3.3 PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación se presentan una serie de problemas propuestos referente a lo que hemos estado viendo junto a una serie de indicaciones de ejercicios que se pueden encontrar en libros, los cuales serán citados según corresponda.

1) El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad e=0,967. La distancia más pequeña a la que el cometa Halley pasa del Sol es 0,587 UA (unidad astronómica, 1 UA=93000000 millas aprox.). Calcula la distancia máxima del cometa al Sol.

Respuesta: 35 UA

2) La distancia mínima que existe entre la Tierra y el Sol es 91446000 millas y la máxima es 94560000 millas. Encontrar la excentricidad de la órbita del planeta Tierra.

Respuesta: 0,01674 aprox.

3) Dos personas se encuentran en un en los focos de una habitación, el cual tiene la forma de un semielipse, si la distancia entre estas dos personas es 25 metros, encontrar el largo del cuarto si su altura es 6 metros.

Respuesta: 22 metros aprox.

4) Una persona debe ser operada de urgencia de cálculo. La profundidad máxima se encuentra a 9 cm al interior del cuerpo ¿Dónde se deberá ubicar el litotríptero del cálculo para disolver el cálculo si el diámetro del semielipsoide es 10 cm?

Respuesta: 15 cm. aprox.

5) Encontrar la ecuación que describe una nave espacial que orbita la luna, si la distancia mínima es 20 UA y la máxima es 52 UA. Una vez encontrada esta ecuación verifica si la nave colisionará o no con un asteroide ubicado en el punto (4, 253)

Respuesta: $\frac{x^2}{1296}+\frac{y^2}{256}=1$ La nave no colisiona con el asteroide.

A continuación presentamos al lector una serie de libros con sus respectivos autores en los cuales encontrará una serie de ejercicios rutinarios de las secciones cónicas correspondiente a esta unidad.

Libro	Autor	Capítulo	Ejercicios con Secciones Cónicas
Cálculo Diferencial e Integral	Frank Ayres	Cap. 5 Pág. 42-55	Pág. 53-55
Cálculo 8va Edición	Purcell, Varberg.	Cap. 12 Pág. 517-539	Pág. 526,530,535
Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica	Walter Fleming, Dale Varberg.	Cap. 4 Pág. 182-204	Pág.196-201

3.4 INTRODUCCIÓN A LA HIPÉRBOLA Y SU UTILIDAD

Por siglos, los barcos han estado utilizando las estrellas como ayuda en la navegación de los océanos. Pilotos de líneas aéreas también han utilizado mapas celestes para determinar su localización durante los largos vuelos. Desde la Segunda Guerra Mundial, los barcos y aviones han utilizado otra ayuda en la navegación. El sistema LORAN (Largo Rango de Navegación). El sistema LORAN hace uso de pulsos de radio que se emiten al mismo tiempo en transmisores ampliamente separados. Por lo tanto, no depende de las condiciones de visibilidad, condiciones que anteriormente eran fundamentales para una buena navegación. Las señales de radio permiten que una nave se sitúe en las curvas de tipo hiperbólicas.

En el sistema de navegación de largo alcance (LORAN), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar. Aunque un barco recibe siempre las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio. Así para cada diferencia de tiempo se tiene como resultado una trayectoria hiperbólica diferente, cada una llevando al barco a una posición distinta en la costa.

Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a diferencias de tiempo distintas, de esta misma forma se puede utilizar para los aviones.

3.4.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS CON HIPÉRBOLAS.

A continuación se presentan una serie de 10 problemas de planteo junto con sus respectivos desarrollos con el objetivo de que, tanto alumnos como profesores, puedan entender de mejor manera el sentido de los mismos. Al final de los ejercicios de planteo se presenta un conjunto de ejercicios de tipo más rutinario. Por otra parte a medida que se avance en el desarrollo de los problemas de planteo se irán presentando las diferentes propiedades de la hipérbola junto a todos los elementos que la componen, insistimos que el deseo es aprender las diferentes utilidades de esta sección cónica.

3.4.2 PRESENTACIÓN DEL MATERIAL DE HIPÉRBOLA

Trabajemos resolviendo los siguientes Problemas de Planteo.

Problema 1: “Barcos Viajando”

Objetivo del Problema:

- **El estudiante deberá ser capaz de establecer un sistema de coordenadas adecuado para traducir los datos entregados.**
- **Relacionar los distintos elementos de la hipérbola**
- **Encontrar datos específicos**

Planteo del Problema.

1) Dos estaciones LORAN están separadas 250 km a lo largo de una costa recta.

I) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 seg. entre las señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar dónde el barco alcanzará la costa si continúa sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

II) Si el barco debe entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 km desde la estación principal, ¿qué diferencia de tiempo debe observar?

III) En relación a **II)**, si el barco está a 80 km. de la costa cuando se obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su ubicación exacta?

(La velocidad de cada señal de radio es de 186.000 km/seg.).

NOTA: A continuación se presentan una serie de ejercicios basados en el sistema de navegación LORAN, y para poder desarrollarlos se debe entender este concepto (ver introducción hipérbola).

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Desarrollemos el problema planteado

Debes darte cuenta: Como la diferencia de tiempo de las señales desde cada estación es constante, esto implica una diferencia constante en la distancia del barco a cada una de las estaciones, se deduce entonces que el barco está localizado sobre una hipérbola cuyos focos son las estaciones de radio.

En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico $v = \frac{d}{t}$, de la cual deducimos que $d = v \cdot t$.

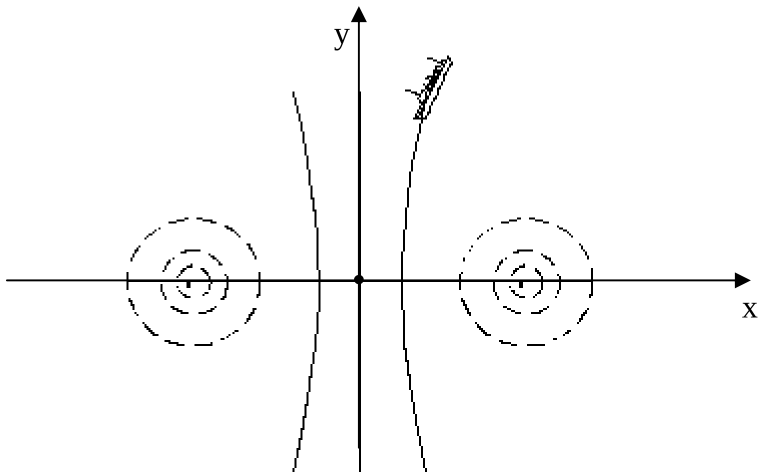
Debes darte cuenta: El dato que se nos entrega referente a que la señal de radio viaja a 186.000km/seg. Se puede utilizar para calcular la distancia Siendo $186.000 \cdot 0{,}00086 = 160km$.

2º Representación Gráfica.

I) Si observas bien debemos establecer un sistema de ejes coordenados, pero tenemos la opción de escoger su ubicación.

¿Qué te parece si lo escogemos de tal manera que las estaciones estén sobre el eje x, siendo el origen de nuestro sistema el centro de las distancias entre las estaciones?

El siguiente gráfico muestra la situación planteada.



No olvides: **se define hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos fijos llamados focos es constante escribiéndose como** $\left\|\overline{PF}-\overline{PF´}\right\|=2a$ **.**

3º Cálculos y Desarrollo.

Esto indica que 2a = 160, luego obtenemos que a = 80, lo que indica que uno de los vértices de la hipérbola está en el punto (80, 0).

Debes darte cuenta: uno de los focos está en el punto (125, 0) esto debido a que es el valor medio de las distancias de las estaciones,

Luego podemos concluir: como el barco está siguiendo una trayectoria hiperbólica alcanzará la costa a

125 – 80 = 45 Km. de la estación principal (la más cercana a él).

No olvides: **En una hipérbola se le asigna las letras F y F\` al los puntos llamados focos, el eje focal es la recta que pasa por los focos y el eje imaginario es la mediatriz de** $\overline{FF`}$ **.**

II) Si el barco desea entrar sobre la costa a 25 km de la estación principal procedemos de la siguiente manera primero:

Debes darte cuenta: esto indica que debe seguir una trayectoria hiperbólica cuyo vértice es el punto
V (100, 0). En donde se obtiene 100 de la resta 125-25.

Luego tenemos que 2a = 200 (diferencia constante entre las distancias del barco a cada una de las estaciones)

En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico $v = \frac{d}{t}$ donde tenemos: $t = \frac{d}{v} = \frac{200}{186000} = 0.001075 seg.$ siendo este valor la respuesta buscada.

No olvides: **En una hipérbola la distancia focal es el segmento $\overline{FF`}$ de longitud 2c, el Eje mayor es el segmento $\overline{AA`}$ de longitud 2a y el Eje menor es el segmento $\overline{BB`}$ de longitud 2b.**

III) Para encontrar la ubicación exacta del barco, necesitamos determinar la ecuación de la hipérbola cuyo vértice es V (100, 0) y uno de sus focos es F (125, 0). Para ello:

Debes darte cuenta: con la información que tenemos podemos deducir que a = 100, c = 125.

Y utilizando la relación, $b^2 = c^2 - a^2$ propia de la hipérbola podemos obtener b, donde su valor es 5625.

Así encontramos que la ecuación de la hipérbola viene dada por:

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{y^2}{5625} = 1$$

Luego podemos concluir: Como el barco está a 80 km sobre la costa, quiere decir el valor de y es 80 ahora debemos encontrar el valor de x, para ello reemplazaremos y en la ecuación de la hipérbola y obtendremos x

Al desarrollar el reemplazo de y en $\frac{x^2}{100^2} - \frac{80^2}{5625} = 1$, obtenemos x = 146.

Por lo tanto, la ubicación exacta del barco es sobre la hipérbola en el punto P (146, 80).

No olvides:

La ecuación de una hipérbola centrada en el origen está dada por la siguiente expresión $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$**.**

La relación entre los semiejes está dada por $c^2 = a^2 + b^2$ **y la excentricidad esta es** $e = \frac{c}{a}$

Problema 2: “Navegación Aérea”

Objetivo del Problema:

- **El estudiante deberá ser capaz de establecer un sistema de coordenadas adecuado para interpretar los datos que le son entregados.**
- **Utilizar la hipérbola como forma de ubicación de cuerpos en movimiento aéreo**

Planteo del Problema.

2) Dos estaciones LORAN están situadas sobre una línea recta este-oeste y A esta a 80km al este de B. Un avión vuela hacia el este en línea recta que se sitúa 60km hacia el norte de la recta que pasa por A y B.

Se envían señales al mismo tiempo desde A y B y la señal de A llega 0.00035 segundos antes de la de B. Si las señales viajan a la velocidad de 200.000km por segundo.

- Localice la posición del avión usando la definición de hipérbola.

Si tienes dudas referentes al por qué usamos una hipérbola en este tipo de ejercicio leer “Introducción Hipérbola”

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

No olvides: **En una hipérbola centrada en el origen las coordenadas de los vértices V y V` viene dada por (a,0) y (-a,0). Y la de los focos F y F` por (c,0) y (-c,0) respectivamente.**

Debes darte cuenta: En cualquier tiempo t el avión se encuentra en un punto P(x,60) Luego en el momento en que le avión recibe la señal de las estaciones LORAN el avión estará sobre la hipérbola con centro en O(0,0) y focos ubicado en A(40,0) y en B(-40,0).

Pero nosotros sabemos que por la definición de hipérbola tenemos: $d(A,P) - d(P,B) = 2a$ **,** para obtener el valor de 2a:

En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico $v = \frac{d}{t}$

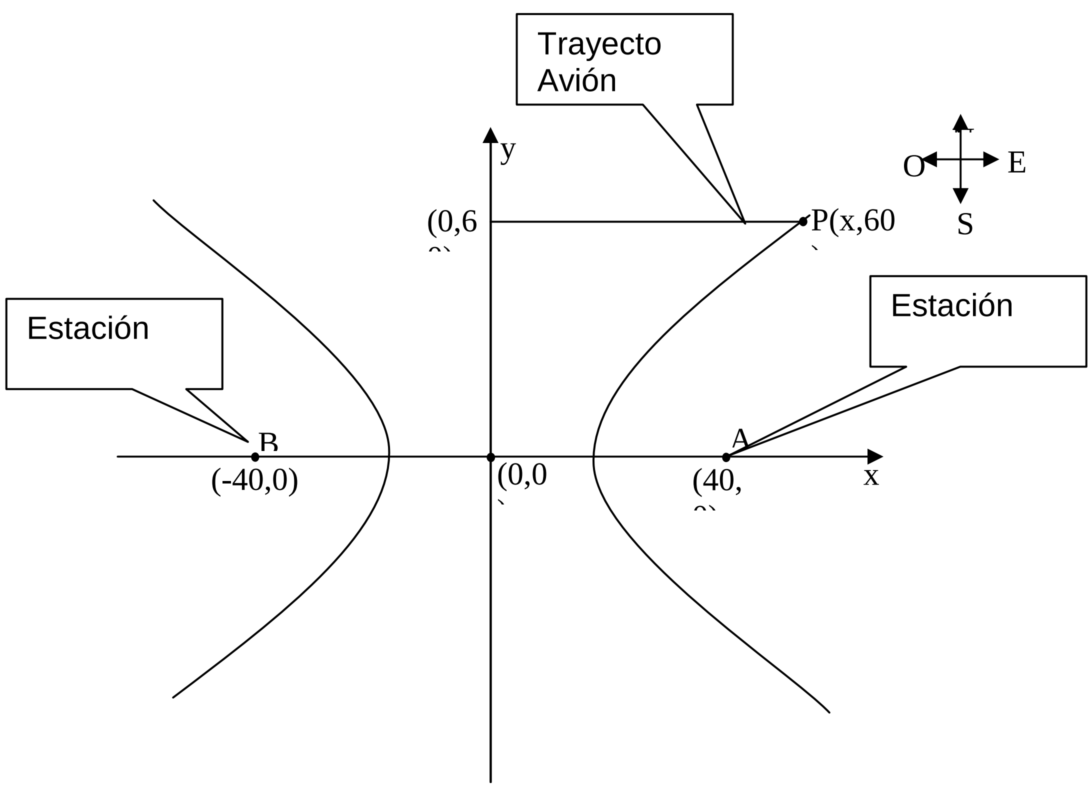
De donde $d = v \cdot t = 200000 \cdot 0{,}00035 = 70km$. Estos datos serán de importancia para el desarrollo del ejercicio.

2º Representación Gráfica.

A continuación lo que haremos será crear un gráfico con toda la información que nos entrega el problema.

¿Qué te parece si lo escogemos de tal manera que las estaciones estén sobre el eje x, siendo el origen de nuestro sistema el centro de las distancias entre las estaciones?

El siguiente gráfico muestra la situación planteada



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: se debe usar la definición de hipérbola con la cual tenemos lo siguiente

$d(A,P) - d(P,B) = 70$ **(Definición de hipérbola)**

$$\sqrt{(40+x)^2 + 60^2} - \sqrt{(40-x)^2 + 60^2} = 70$$

$$\left(\sqrt{(40+x)^2 + 60^2}\right)^2 = \left(70 + \sqrt{(40-x)^2 + 60^2}\right)^2$$

Desarrollando a ambos lados de la igualdad queda:

$$(8x - 245)^2 = \left(7\sqrt{(x-40)^2 + 60^2}\right)^2$$

$x^2 = 12.985$ por lo tanto $x = \pm 113{,}95$

Luego podemos concluir: Como el avión recibe primero la señal de A, x > 0, luego x = 113.95 km. La posición del avión es P (113.95,60). La distancia del punto A es:

$$\sqrt{(113{,}95 - 40)^2 + 60^2} = 95.23km.$$

No olvides: **Se denomina ejes de simetría a las rectas que contienen al eje real y al eje imaginario.**

Las asíntotas son las rectas de ecuaciones: $y = \frac{b}{a}x \quad y = \frac{-b}{a}x$

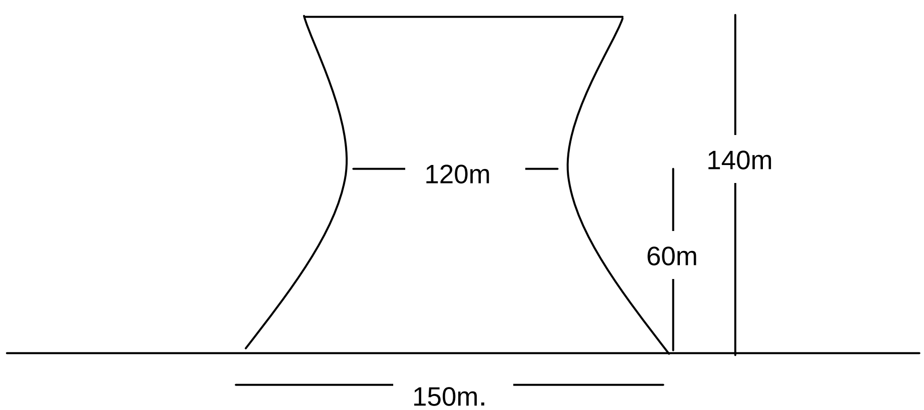
<u>Problema 3</u><u>: “Construcción de Edificios Nucleares”</u>

<u>Objetivo del Problema</u>:

- **El estudiante deberá ser capaz de establecer un sistema de coordenadas adecuado para traducir los datos entregados.**
- **Modelar estructuras a través de cónicas**
- **Encontrar datos específicos**

<u>Planteo del Problema.</u>

3) La figura muestra el corte transversal vertical de una torre de enfriamiento de una planta nuclear, donde el diámetro de la base circular es de 150 metros y el diámetro de la parte más estrecha de la torre la cual está por encima del piso es de 120 metros, estando a una altura de 60 metros. (Ver figura).



De acuerdo a la información proporcionada realice las siguientes tareas
Si se sabe que la ecuación de una hipérbola modela la forma de la torre.

I) Encuentre su ecuación correspondiente.
II) Determine el diámetro aproximado de la parte superior si la altura es de 80 metros.

En este tipo de ejercicios se usa una hipérbola porque es ésta la que modela la forma de la torre de enfriamiento de la planta nuclear, de esta manera nos damos cuenta que entre las distintas utilidades de las secciones cónicas, estas también contribuyen en la arquitectura y forma de edificios tanto estatales como privados.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

En este ejercicio se nos pide encontrar primero la ecuación de la hipérbola que modela la forma de la torre de enfriamiento de la planta nuclear y el diámetro aproximado dado una altura especifica.

Debes darte cuenta: En este caso la ecuación que nos sirve es la de la hipérbola no centrada en el origen.

No olvides: **La ecuación de la hipérbola no centrada en el origen está dada por la siguiente expresión**:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$ **donde el centro es (h,k)**

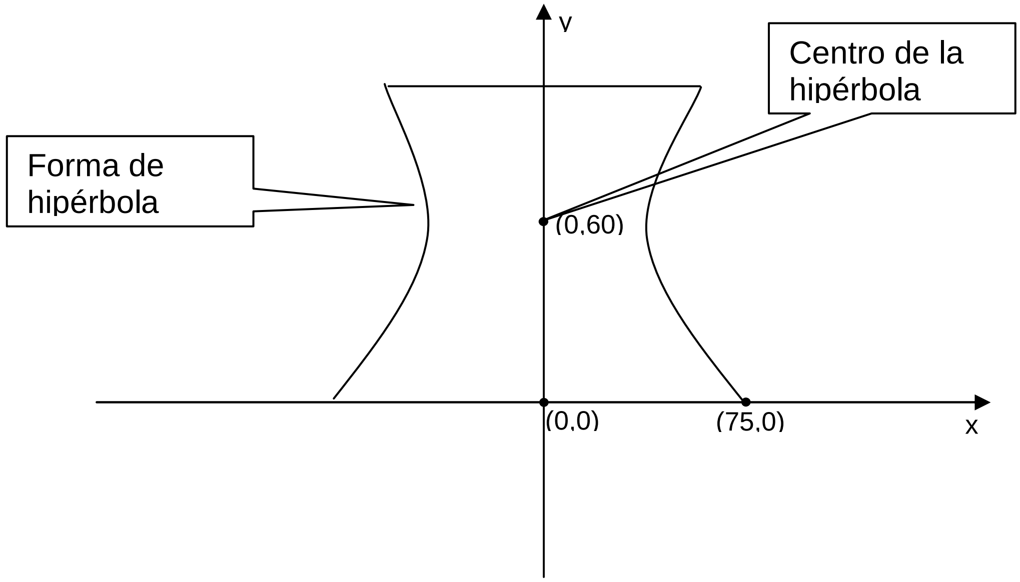
En donde el punto medio entre los vértices de la hipérbola es su centro.

2º Representación Gráfica.

¿Qué te parece si lo escogemos de tal manera que el sistema este ubicado en el piso de la torre, siendo el origen el punto medio del diámetro de los 150 metros?

Ahora dando forma a nuestro sistema de ejes coordenados quedaría de la siguiente manera.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada.



3º Cálculos y Desarrollo.

Ahora podemos comenzar a trabajar:

¿Podrías deducir en donde estará el centro de nuestra hipérbola?

Debes darte cuenta: El centro de la hipérbola estará ubicado en el punto (0,60) además como el diámetro de la parte más estrecha es 120 podemos deducir que el valor de **a** es 60, siendo el punto (60,60) un vértice de nuestra hipérbola, luego el punto (-60,60) será el otro vértice (ver "no olvides").

Se observa que: para dar forma a nuestra ecuación podemos reemplazar los valores que tenemos:

Centro (0,60) y a = 60

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Obteniendo

$\frac{(x-0)^2}{60^2} - \frac{(y-60)^2}{b^2} = 1$,

Para obtener el valor de **b,** utilizaremos un punto que pertenezca a la hipérbola en este caso el punto será (75,0) (ver figura de representación gráfica)

Luego desarrollando tenemos:

$$\frac{(75-0)^2}{60^2}-\frac{(0-60)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{75^2}{60^2}-1=\frac{60^2}{b^2}$$

$$\frac{75^2-60^2}{60^2}=\frac{60^2}{b^2}$$

$$\frac{2025}{3600}=\frac{3600}{b^2}$$

$$b^2=\frac{3600\cdot 3600}{2025}$$

$$b=80$$

Luego podemos concluir: la ecuación de la hipérbola que modela la forma de a torre es: $\frac{x^2}{60^2}-\frac{(y-60)^2}{80^2}=1$

¿Con esta información podemos calcular lo pedido?

Debes darte cuenta: Ahora para calcular cual es el diámetro de la torres de enfriamiento si la altura es 80 mt, sólo debemos reemplazar ese valor en la ecuación obtenida.

Entonces

$$\frac{x^2}{60^2}-\frac{(80-60)^2}{80^2}=1$$

$$\frac{x^2}{60^2}=1+\frac{20^2}{80^2}$$

$$x^2=\left(\frac{80^2+20^2}{80^2}\right)\cdot 60^2$$

Luego podemos concluir: Al desarrollar esta multiplicación el valor de ***x*** aproximadamente es 61,84 metros. Luego el diámetro es el doble siendo 123,69 metros.

Problema 4: “Viaje a las Montañas”

Objetivo del Problema:

- **El estudiante deberá ser capaz de establecer un sistema de coordenadas adecuado para traducir los datos entregados.**
- **Utilizar las diversas propiedades de la hipérbola**
- **Analizar datos encontrados**

Planteo del Problema.

4) En una excursión por los montes, Andrés estaba ubicado en el punto (0,2) de su mapa cuando disparó su rifle, el sonido hizo eco en un acantilado ubicado en el punto (0,-2). Felipe estaba en un punto cualquiera, llamémoslo punto P(x,y), cuando escuchó ambos sonidos. El primero que escuchó inmediatamente fue el disparo de Andrés y luego de 3 segundos volvió a escuchar nuevamente el sonido del disparo del rifle esta vez desde el acantilado en forma de eco.

Desafío:

Existen muchas maneras para encontrar la ubicación de Felipe, o determinar un punto de referencia en el cual ubicarlo, una de ellas es, dada las características de la situación presentada, en donde nos encontramos con una diferencia constante de tiempo de señales (sonidos), es la que hace referencia al sistema LORAN (ver “Introducción Hipérbola”). Invitamos al lector a encontrar la hipérbola en la se encontraba Felipe al momento de escuchar el eco. Suponga que la distancia está en Mt, y el sonido viaja 1km por segundo.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: Para resolver este ejercicio debemos tener en cuenta que tanto el acantilado como el lugar en donde está ubicado Andrés son los focos de nuestra hipérbola.

Ahora podemos comenzar con la definición de la hipérbola:

$d(A,P) - d(P,B) = 2a$

Para saber la distancia nos dan el dato que el sonido viaja a 1km/seg.

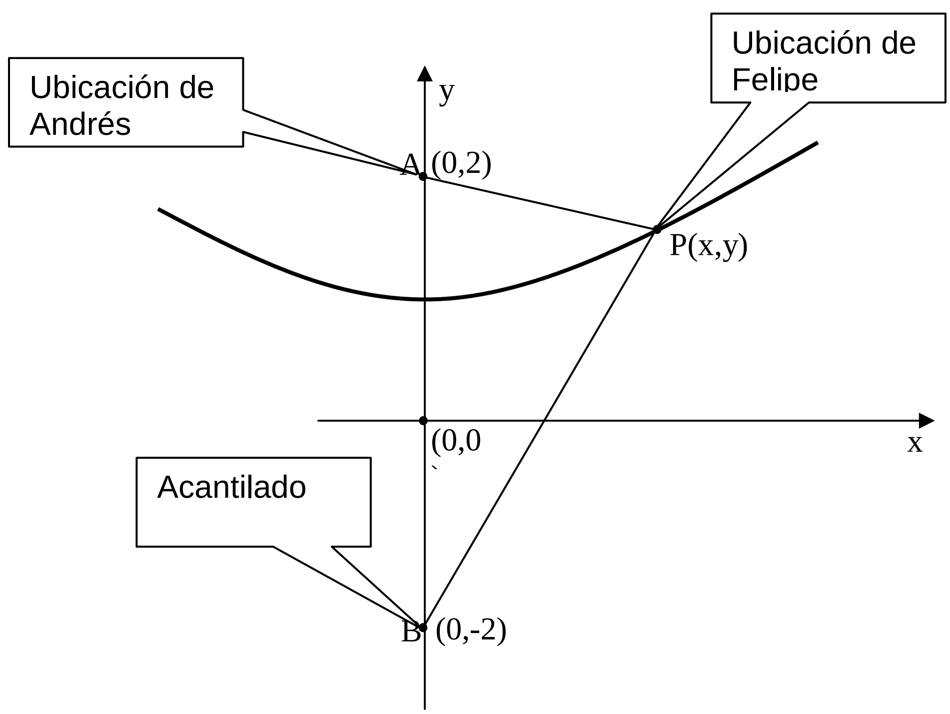
En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico $v = \dfrac{d}{t}$ además sabemos que se demora 3 segundos el sonido en llegar, luego $d = v \cdot t$, obteniendo $d = 1 \cdot 3 = 3km$

2º Representación Gráfica.

¿Podemos establecer un sistema adecuado para resolver este problema?

En efecto podemos establecer que Felipe esta en el punto (x,y) y llamaremos al punto donde estaba Andrés “A” y al punto donde está el acantilado “B”, P es la ubicación de Felipe. El cual de acuerdo a nuestro problema está en una hipérbola. Esto de cuerdo a que la diferencia de distancias sería constante.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada.



3º Cálculos y Desarrollo.

Luego con todos los datos que hemos recopilado:

Se observa que: reemplazando en la definición de hipérbola se puede desarrollar lo siguiente.

$d(A,P)-d(P,B)=2a$ **(Definición de hipérbola)**

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-\sqrt{x^2+(y+2)^2}=3$$

$-\sqrt{x^2+(y+2)^2}=3-\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ / $(\ )^2$, Elevamos al cuadrado y eliminamos los valores correspondientes

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+4y+\cancel{4}=9-6\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+\cancel{4}$$

$8y-9=-6\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ / $(\ )^2$, Nuevamente elevamos al cuadrado y simplificamos.

$$64y^2-144y+81=36(x^2+y^2-4y+4)$$

$$64y^2-\cancel{144y}+81=36x^2+36y^2-\cancel{144y}+144$$

Posteriormente se obtiene la hipérbola pedida

$$28y^2-36x^2=225$$

Luego podemos concluir: que también se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{y^2}{\frac{225}{28}}-\frac{x^2}{\frac{225}{36}}=1$$

Problema 5: “Navegación Marina, señal de auxilio”

Objetivo del Problema:

- **Reconocer las variadas formas de comunicación entre los barcos.**
- **Relacionar y utilizar las propiedades de la hipérbola**
- **Encontrar datos específicos**

Planteo del Problema.

5) Dos estaciones de guarda costa están localizadas a 600 Km. de separación entre ellas en los puntos A (0,0) y B (0,600), una señal de socorro es recibida desde un barco en momentos ligeramente diferentes por las dos estaciones LORAN. Se ha determinado que el barco esta 200 Km. más lejos de la estación A que de la estación B.

- Determine la ecuación de una hipérbola que pase por la ubicación del barco

Para aclarar cualquier confusión del por qué se utiliza una hipérbola para desarrollar este tipo de ejercicios ver “Introducción Hipérbola”

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿Podemos realizar un recuento de la información que se nos ha entregado en el problema?

- **A** y **B** son las estaciones de guardacostas y están a una distancia de 600 Km.
- Llamaremos la distancia que hay entre el barco y las estaciones con la letra “*d*”.
- Luego de acuerdo al problema el barco está 200 Km. más lejos de la estación A que de la estación B.

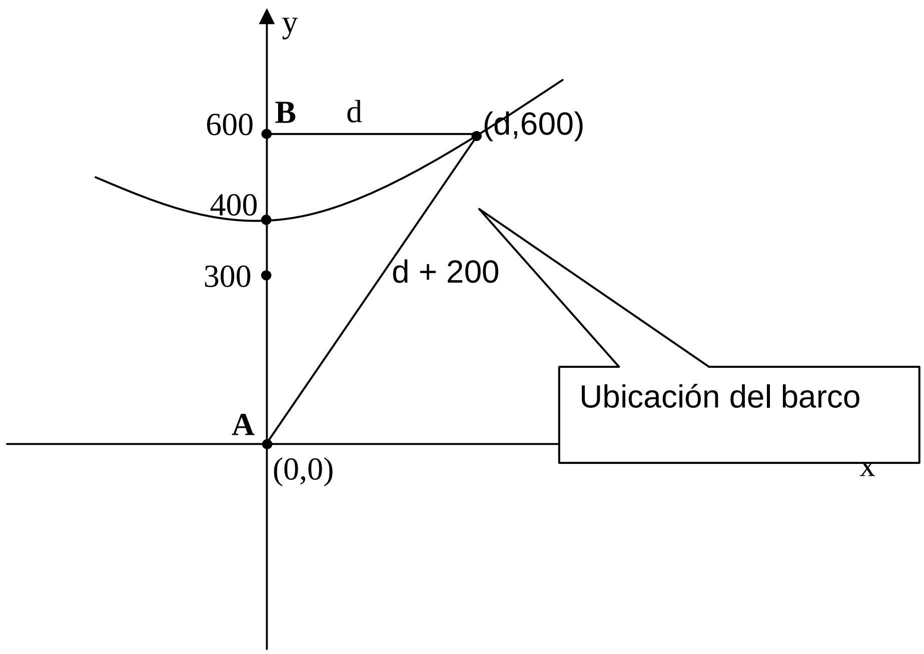
Debes darte cuenta: De acuerdo a los datos que tenemos, para encontrar la ecuación solicitada en el sistema LORAN debemos asumir que **A** y **B** son los focos de la hipérbola buscada, eso quiere decir el punto medio será el centro de nuestra hipérbola. Y como la distancia entre A y B es de 600, luego el centro de nuestra hipérbola será (0,300)

2º Representación Gráfica.

¿Podemos llevar toda esta información a un gráfico?

En efecto podemos introducir toda la información entregada en un gráfico.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada.



No olvides: **cuando una hipérbola no está centrada en el origen y sus focos están de manera vertical entre sí, o forman una recta paralela al eje y, la forma de su ecuación es:** $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

3º Cálculos y Desarrollo.

Luego de haber recopilado la mayor cantidad de datos del problema podemos continuar trabajando.

Se observa que: al reemplazar el punto centro de nuestra hipérbola en la ecuación anterior tenemos lo siguiente:

$$\frac{(y-300)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1$$

¿Podemos encontrar los valores de a y b que son importantes en nuestra hipérbola?

En efecto lo que podemos hacer para encontrar los valores de *a* y *b* es utilizar un punto que pertenezca a nuestra hipérbola buscada. Luego tenemos el punto (0,400) que pertenece a nuestra hipérbola porque cumple con la condición de que la distancia del barco será 200 km. mas lejos de la estación A que de la estación B.

Se observa que: al reemplazar tenemos,

$$\frac{(400-300)^2}{a^2}-\frac{(0)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(100)^2}{a^2}=1$$

$$a^2=10000$$

$$a=100$$

¿Podemos encontrar el valor b que nos falta?

En efecto la respuesta es sí.

Debes darte cuenta: Ahora para encontrar el valor *b* utilizaremos la relación que se da en la hipérbola.

Entonces conocemos la distancia a que es 100 y la distancia c que es 300, obtenida de la semisuma entre 0 y 600 que es la distancia que separa a ambas estaciones.

Luego reemplazamos en la relación anterior obteniendo:

$$300^2=100^2+b^2$$

$$90000-10000=b^2$$

$$b^2=80000$$

Luego podemos concluir: que con los datos obtenidos la ecuación de la hipérbola pedida es:

$$\frac{(y-300)^2}{10.000}-\frac{x^2}{80.000}=1$$

Problema 6: “La caída de un rayo”

Objetivo del Problema:

- **El estudiante deberá ser capaz de establecer un sistema de coordenadas adecuado para traducir los datos entregados.**
- **Relacionar las propiedades de la hipérbola**
- **Encontrar datos específicos**

Planteo del Problema.

6) Dos personas A y B se encuentran en un campo en las coordenadas A(0,0) y B(8,0) en donde las unidades están en Km., durante un tormenta cae un rayo en el campo, la persona ubicada en A tarda $8seg.$ más en oír el sonido del rayo que la persona B. si la coordenada x del lugar en donde cayó el rayo es 3, ¿En qué lugar cayo el rayo?.

Dada la cercanía de los puntos puede considerar que ambos ven el rayo simultáneamente y que la velocidad del sonido es de $\frac{1}{4} km/seg$.

NOTA: Existen variadas formas para encontrar la ubicación de algún objeto, o de determinar un punto de referencia en el cual ubicarlo, una de ellas es, dada las características de la situación presentada en este ejercicio, en donde nos encontramos con una diferencia constante de tiempo de sonidos, es la que hace referencia al sistema LORAN (ver “Introducción Hipérbola”). Invitamos al lector a utilizar esta forma para resolver el problema planteado.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

¿A qué tipo de problemas se parece este?

Debes darte cuenta: Este tipo de problemas es similar al sistema LORAN, la diferencia es que en vez de existir las estaciones (Focos), en esta ocasión son las personas las que reciben la señal que es, en este caso, el sonido del un rayo.

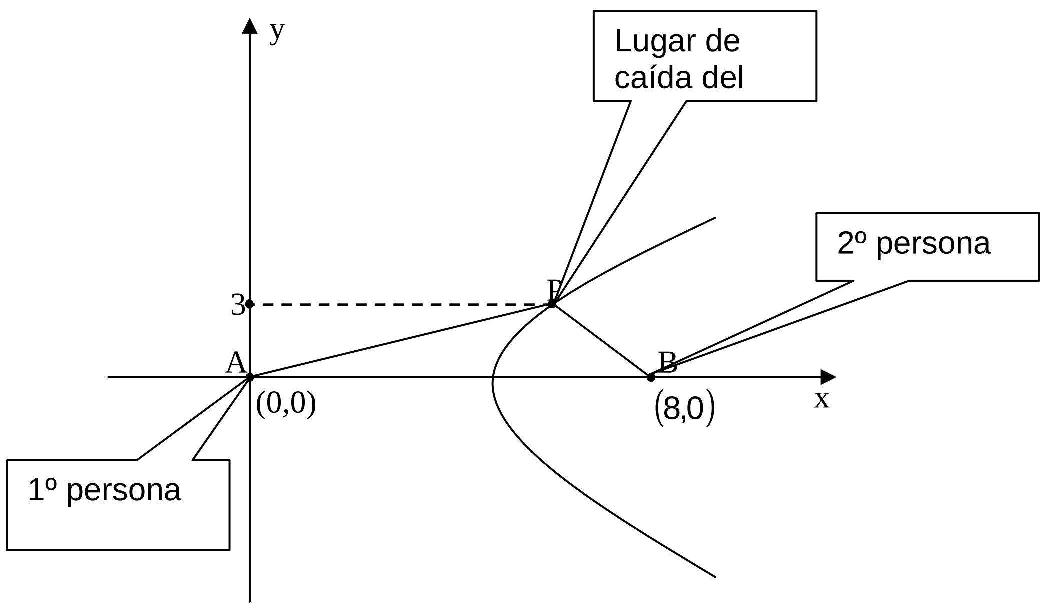
Para encontrar el valor constante de la diferencia de distancia que corresponde a la definición de hipérbola tenemos que:

En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico $v = \frac{d}{t}$ de donde deducimos que $d = v \cdot t$ por lo tanto tenemos $d = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2km$.

2º Representación Gráfica.

¿Podemos llevar toda esta información a un gráfico? En efecto podemos introducir toda la información entregada en un gráfico. Para ello ubicaremos las dos personas (A y B) en un par de ejes coordenados y llamaremos "P" al lugar donde cayó el rayo.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada.



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: ahora lo que haremos será utilizar la definición de hipérbola

$d(A,P) - d(P,B) = 2a$ **,** Donde $2a$ = 2, este valor viene dado por la deducción que hicimos en la parte "Recopilación y análisis de los datos del problema".

Además utilizaremos los puntos son: A (0,0), P(x,3) y B(8,0).

Se observa que: al reemplazar los valores tenemos que el desarrollo será de la siguiente manera:

$d(A,P)-d(P,B)=2$ **(Definición de hipérbola)**

$\sqrt{(x-0)^2+(3-0)^2}-\sqrt{(8-x)^2+(0-3)^2}=2$

$\sqrt{x^2+3^2}=2-\sqrt{(8-x)^2+3^2}$ / ( )^2 se eleva y se desarrolla.

$\cancel{x^2}+\cancel{9}=4-4\sqrt{(8-x)^2+3^2}+64-16x+\cancel{x^2}+\cancel{9}$,

Simplificando y desarrollado queda la siguiente expresión

$(4x-17)=\left(-4\sqrt{(8-x)^2+9}\right)$

$(4x-17)^2=\left(-4\sqrt{(8-x)^2+9}\right)^2$ / ( )^2 se eleva y se desarrolla.

$16x^2-136x+289=16(64-16x+x^2+9)$, al desarrollar queda

$\cancel{16x^2}-136x+289=1024-256x+\cancel{16x^2}+144$, luego se simplifican los términos comunes quedando

$120x=879$

$x=\frac{879}{120}=\frac{293}{40}=7{,}325$

Luego podemos concluir: que el punto donde cayó el rayo es $\left(\frac{293}{40},3\right)$.

No olvides: **Para determinar si una hipérbola estará de manera vertical u horizontal es necesario notar en cuál de las dos variables x o y está el signo negativo. De esta manera si x es negativo la hipérbola será vertical y si y es negativo la hipérbola será horizontal.**

Problema 7: “Cometas en el espacio”

Objetivo del Problema:

- **El estudiante deberá ser capaz de establecer un sistema de coordenadas adecuado para traducir los datos entregados.**
- **Dar a conocer al estudiante fenómenos físicos regidos por cónicas.**

Planteo del Problema.

7) En el espacio exterior existen algunos cometas que describen trayectorias en forma de hipérbola, siendo el sol uno de sus focos. Si un cometa viene en una trayectoria en forma de hipérbola y se sabe que la distancia más cercana al sol (foco de la hipérbola) es 3 años luz, encuentre la hipérbola por la cual se rige la trayectoria de dicho comenta y grafique lo obtenido. Otro dato a considerar es que se ha calculado que el otro foco esta a 10 años luz del sol (en línea recta).

NOTA: para poder resolver este tipo de ejercicio es tan simple como saber las diferentes propiedades, junto con los elementos y la definición de la hipérbola, por lo mismo invitamos al lector a experimentar y a aprender de este novedoso ejercicio.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: que con todos los datos ya podemos formar nuestra hipérbola.

¿Cómo podría formar la hipérbola con los datos que tengo?

Lo primero que debemos establecer es un sistema de ejes coordenados adecuados para nuestros propósitos, para ello el sol estará en el eje focal.

El punto medio de la distancia hacia el otro foco será nuestro origen.

¿Qué datos puedo extraer del problema plateado anteriormente?

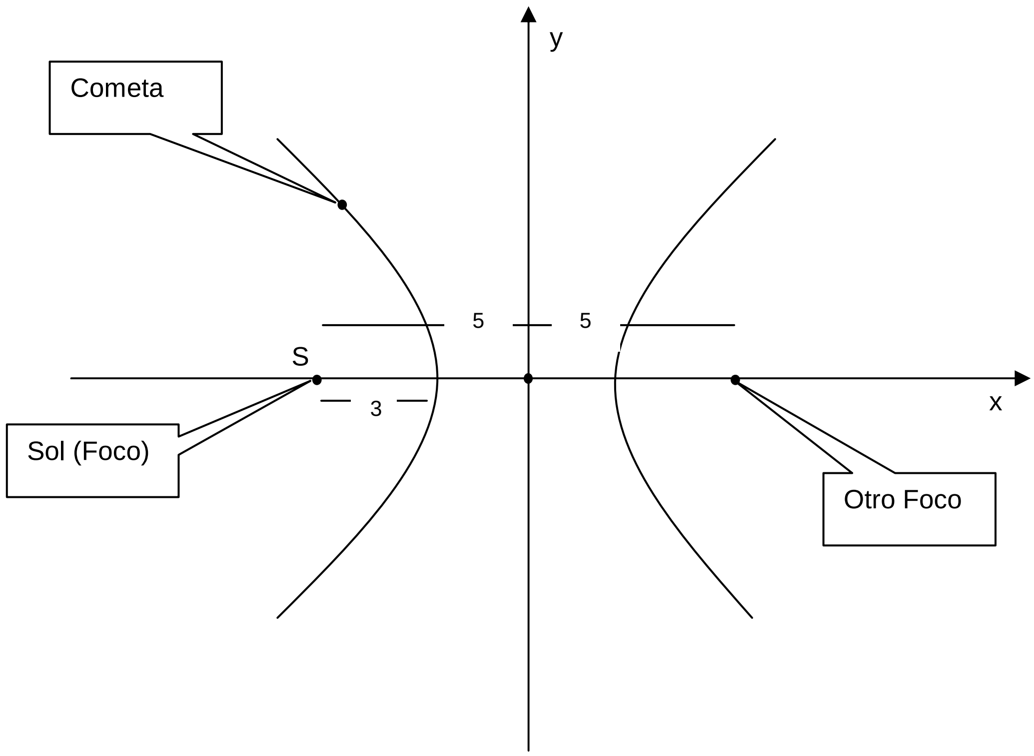
La verdad es que puedes extraer varios datos interesantes.

Lo primero es que en el trayecto del cometa, en la parte más cercana al sol, estará ubicado un vértice de la hipérbola, por lo tanto el valor de “a” de acuerdo al problema será 3, otro dato que se puede extraer es que la distancia entre los focos es 10 y sabemos que la distancia entre los dos focos es 2c luego c es 5.

Estos datos los usaremos más adelante.

2º Representación Gráfica.

El gráfico siguiente describe lo anteriormente señalado:



3º Cálculos y Desarrollo.

Se observa que: Hemos establecido de manera arbitraria un sistema de ejes coordenados.

Debes darte cuenta: hemos ubicado nuestra hipérbola en el origen de nuestro sistema de ejes coordenados luego con los datos que hemos obtenido.

¿Puedo utilizar la relación $a^2+b^2=c^2$ que se da en la hipérbola para encontrar el valor de b?

Por supuesto, de hecho eso es lo que se debe hacer ya tenemos a y b, luego al reemplazar queda de la siguiente manera

$3^2 + b^2 = 5^2$, de donde se obtiene que b = 4

Luego podemos concluir: la ecuación de la hipérbola que modela la trayectoria del cometa es: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Problema 8: “Escuchando una Explosión”

Objetivo del Problema:

- **Guiar al estudiante al uso de secciones cónicas, especialmente la hipérbola.**
- **Relacionar las propiedades de la hipérbola**
- **Encontrar datos específicos**

Planteo del Problema.

8) Angélica, Camila y Cecilia están localizadas en A(-8,0), B(8,0), C(8,10) respectivamente, se tiene que ellas anotaron los tiempos exactos cuando oyeron una explosión. Comparando sus anotaciones descubrieron que Camila y Cecilia oyeron la explosión al mismo tiempo, pero que Angélica la oyó 12 segundos más tarde. Suponiendo que las distancia están en km. Y que el sonido viaja a $\frac{1}{3} km/seg.$, determinar el punto exacto de la explosión.

NOTA: Existen variadas formas para encontrar la ubicación de algún objeto, o de determinar un punto de referencia en el cual ubicarlo, una de ellas es, dada las características de la situación presentada en este ejercicio, en donde nos encontramos con una diferencia constante de tiempo de sonidos, es la que hace referencia al sistema LORAN (ver “Introducción Hipérbola”). Invitamos al lector a utilizar esta forma para resolver el problema planteado.

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Debes darte cuenta: las ubicaciones de Angélica y Camila serán los focos de nuestra hipérbola de acuerdo al problema.

¿De qué nos sirve que Camila y Cecilia hayan escuchado la explosión al mismo tiempo?

Nos sirve de mucho, este dato es interesante porque al haber escuchado la explosión al mismo tiempo se quiere decir que el lugar de la explosión que buscamos tendrá como coordenada y el valor 5, esto porque el sonido viaja en ambas direcciones a la misma velocidad, si sabemos que Camila esta en (8,0) y Cecilia esta en (8,10) el punto que buscamos tendrá que ser por obligación (x,5), ahora el desafío que tenemos es encontrar el valor de x.

No Olvides se tiene como coordenada y el valor 5 porque es el valor medio de la distancia entre las niñas.

Debes darte cuenta: Para saber la distancia, se nos da el dato que el sonido viaja a $\frac{1}{3} km/seg$. además Angélica escucho 12 segundos después el sonido.

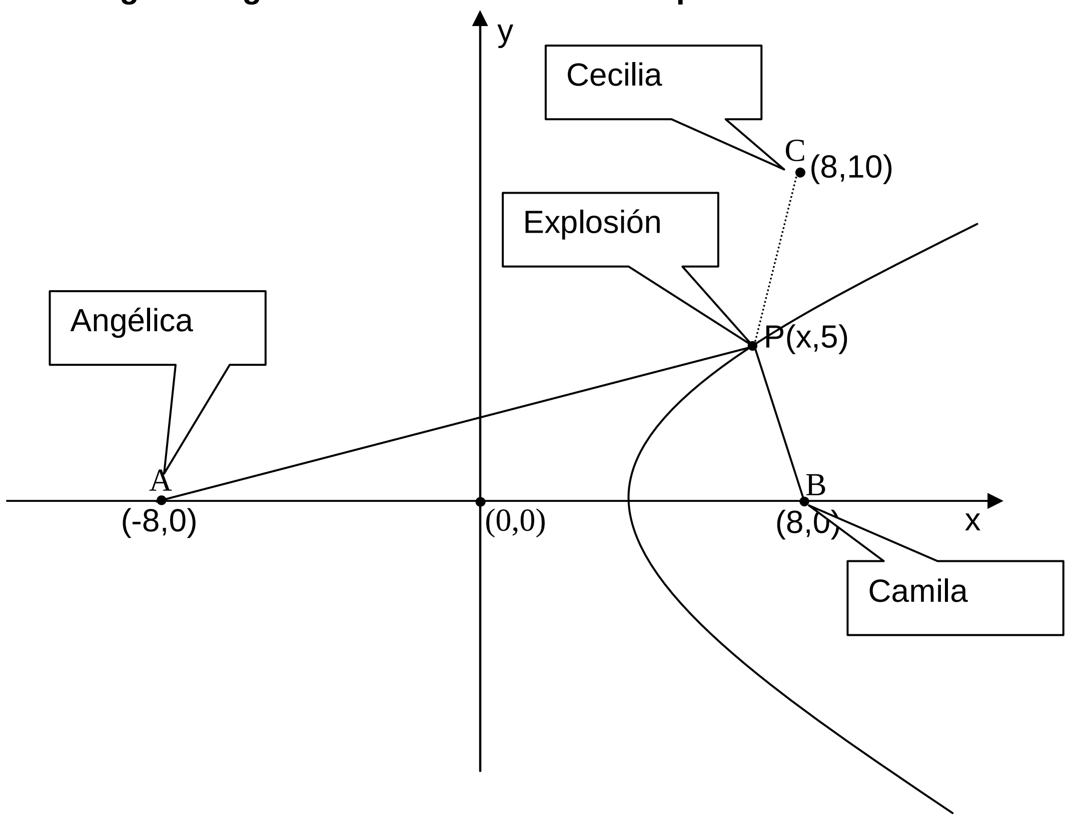
En ayuda nuestra vendrá el siguiente concepto físico $v = \frac{d}{t}$

De la cual obtenemos $d = v \cdot t$, siendo $d = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4km$

2º Representación Gráfica.

¿Podemos llevar toda esta información a un gráfico? En efecto podemos introducir toda la información entregada en un gráfico. Para realizar esto llamaremos a Angélica, Camila y Cecilia con las letras A, B, C respectivamente y las ubicaremos en nuestro gráfico y P al punto de la explosión.

El siguiente gráfico muestra la situación planteada.



3º Cálculos y Desarrollo.

Debes darte cuenta: que para avanzar en nuestro problema utilizamos la definición de hipérbola junto a todos los datos que hemos recolectado hasta ahora.

$d(A,P)-d(P,B)=2a$ **,** Donde $2a = 4$.

Los puntos son: A(-8,0), P(x,5) y B(8,0).

Se observa que: Se debe desarrollar de la siguiente manera

$d(A,P)-d(P,B)=4$ **(Definición de hipérbola)**

$$\sqrt{(x+8)^2+(5-0)^2}-\sqrt{(8-x)^2+(0-5)^2}=4$$

$\sqrt{(x+8)^2+5^2}=4-\sqrt{(8-x)^2+5^2}$ / $(\ )^2$ se eleva y se desarrolla.

$$\cancel{x^2}+16x+\cancel{64}+\cancel{25}=16-8\sqrt{(8-x)^2+5^2}+\cancel{64}-16x+\cancel{x^2}+\cancel{25}$$

$$32x-16=-8\sqrt{(8-x)^2+25}$$

$(4x-2)^2 = \left(-\sqrt{(8-x)^2+25}\right)^2$ / ( )^2 se eleva y se desarrolla.

$16x^2 - 16x + 4 = 64 - 16x + x^2 + 25$

$15x^2 = 21$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{21}{15}} = \pm\sqrt{\dfrac{7}{5}}$

Luego podemos concluir: que el punto de la explosión es $\left(\sqrt{\dfrac{7}{5}},5\right)$.

A continuación presentamos dos ejercicios en el programa computacional para geometría llamado GEOGEBRA.

Problema 9: “Radiotransmisores”(*)

Objetivo del Problema:

- **Utilizar geogebra en la aplicación del ejercicio.**
- **Aprender a usar propiedades de las cónicas con geogebra.**
- **Encontrar datos específicos**

Planteo del Problema.

9) Tres niños están jugando en un gran campo con sus radiotransmisores de tal manera que Roberto está en el punto A, Javier se encuentra en el punto B y Esteban en el punto C quien se está moviendo por el campo, siempre se da que la señal enviada por Esteban llega primero a Javier y a Roberto 2 segundos más tarde. Si la diferencia en la llegada de las señales desde Esteban a los otros radiotransmisores se mantiene constante durante todo el trayecto de Esteban:

Realice las siguientes tareas utilizando un programa computacional

Si se sabe que A= (-6,4), B= (10,4) y C= (8,8)

1) Grafique la cónica,
2) Encuentre el centro.
3) Encuentre las rectas que son ejes y distancia focal,
4) Encuentre las asíntotas.
5) ¿Cuál es el valor constante de la cónica?

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

Si observas bien en este ejercicio nos piden que utilicemos un programa computacional, y para ello el programa que utilizaremos será ***Geogebra***

¿Podemos graficar en Geogebra los datos que tenemos y obtener una cónica?

En efecto, se puede y no sólo eso, sino que además podemos obtener mucha información utilizando este programa informático.

Debes darte cuenta: que este tipo de problemas es de aquellos similares al sistema LORAN en donde en esta ocasión los focos de nuestra hipérbola serán las posiciones de Roberto y Javier y será Esteban quien de la forma a la cónica nombrada.

2º Representación Gráfica.

Realizaremos los siguientes pasos

1) Debes primero abrir el programa, posteriormente deberás ingresar los datos que tenemos, es decir los puntos A, B, C donde A y B serán los focos de nuestra hipérbola y C será el punto móvil.

Ver figura 1 y 2

Figura 1

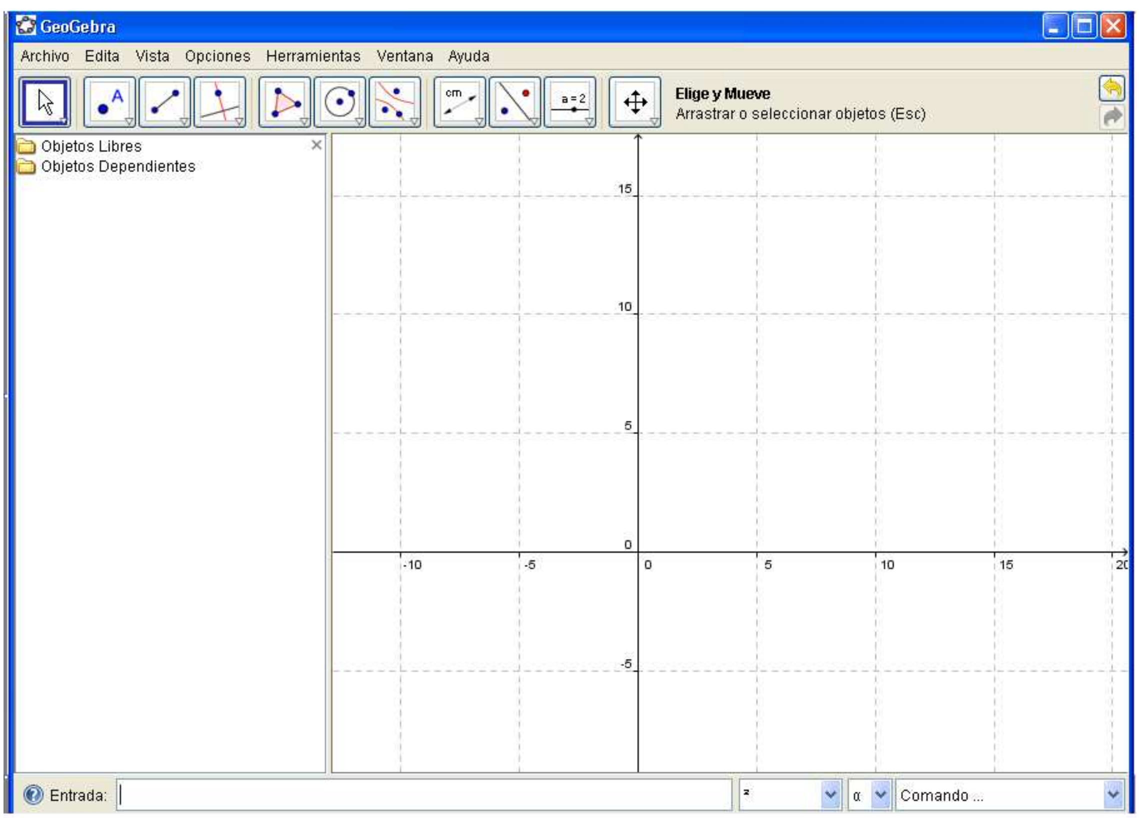
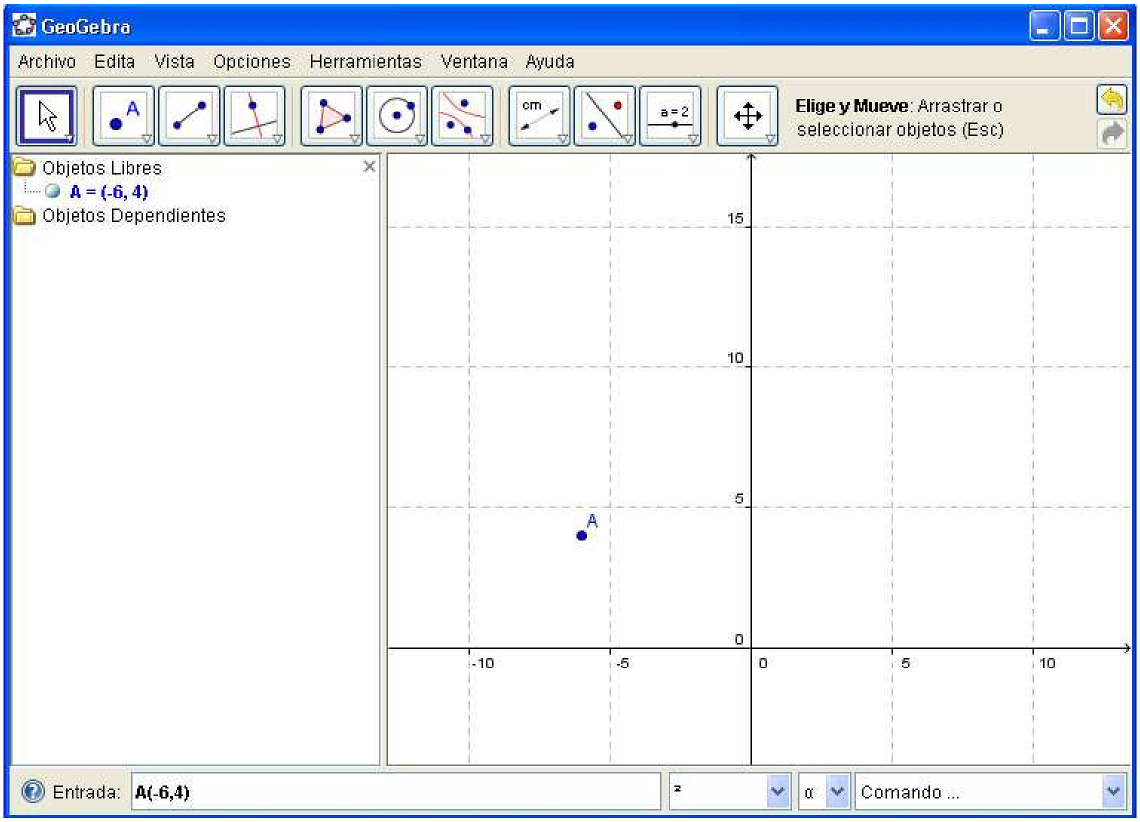


Figura 2



2) Debes buscar en la opción comando la palabra “HIPERBOLA” e ingresar las letras de los puntos en este caso A, B, C.

Ver figura 3 y 4

Figura 3

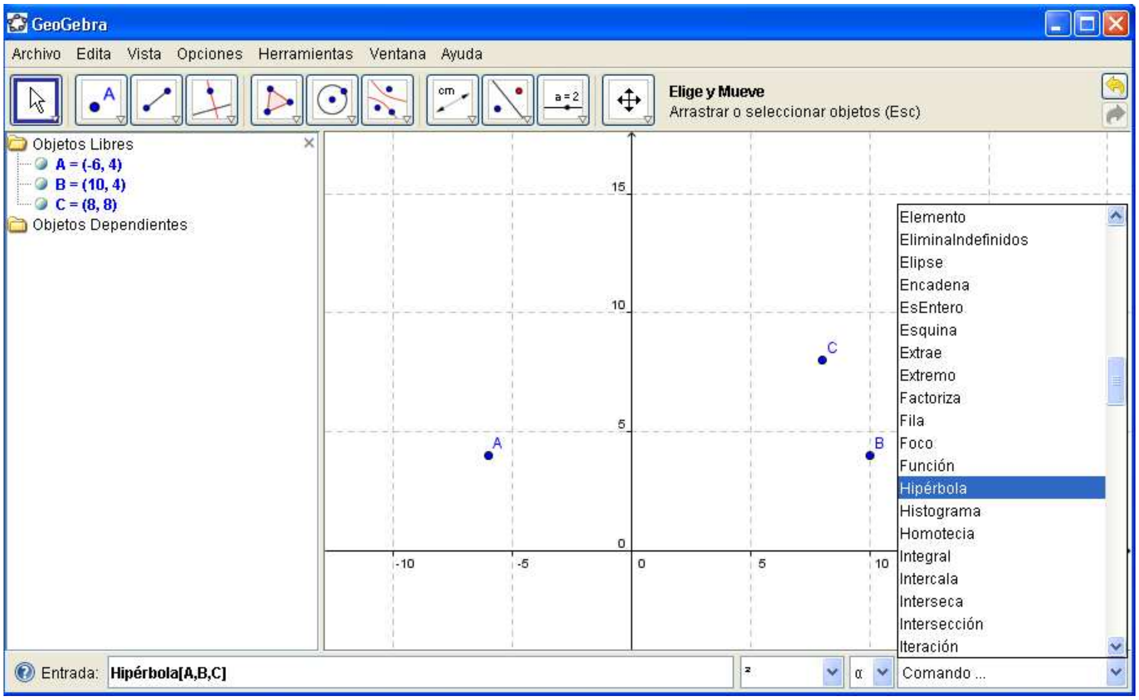
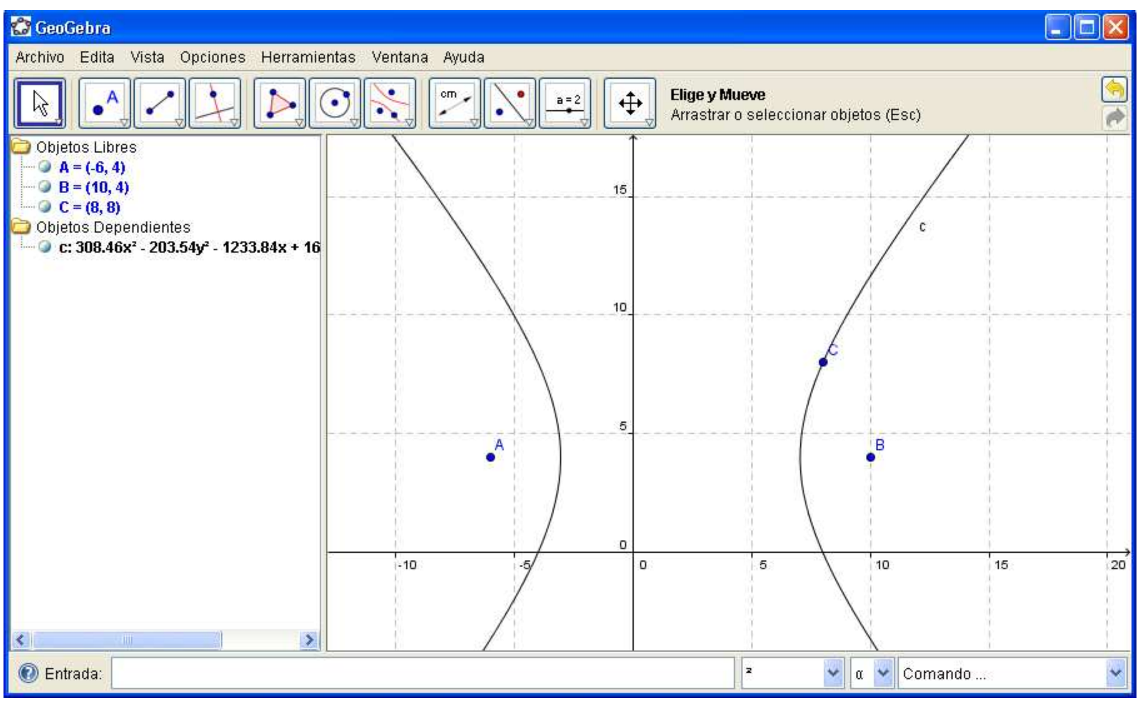


Figura 4



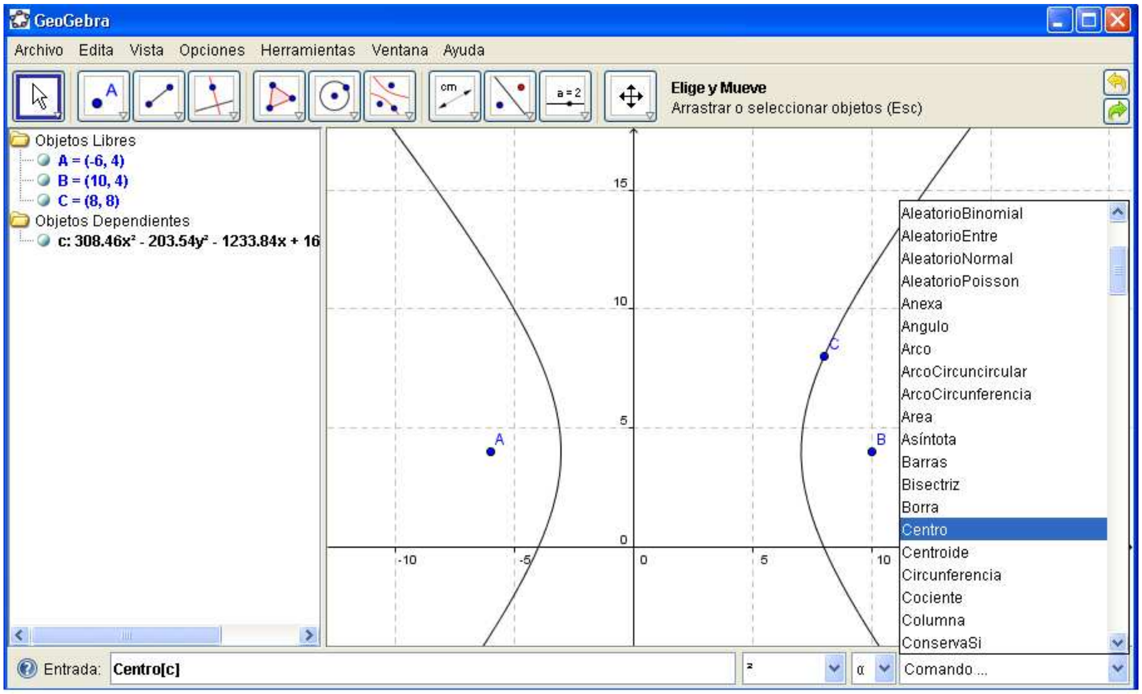
3º Cálculos y Desarrollo.

¿Ahora, cómo podemos encontrar el centro de nuestra hipérbola?

Puedes realizar lo siguiente, en la opción comando busca la palabra "CENTRO" luego ingresa la letra "c" si te das cuenta representa a la hipérbola observa la parte superior derecha de la pantalla.

Ver figura5

Figura 5



¿Podemos encontrar los ejes y la distancia focal, es decir la distancia desde el centro hasta un foco?

En efecto, se puede, debes buscar en la opción comando la palabra "EJES[c]" y aparecerán los ejes, luego busca de la misma manera la palabra "SEMIFOCAL[c]" y aparecerá el valor de la distancia entre el foco y el vértice.

Ver figura 6 y 7

Figura 6

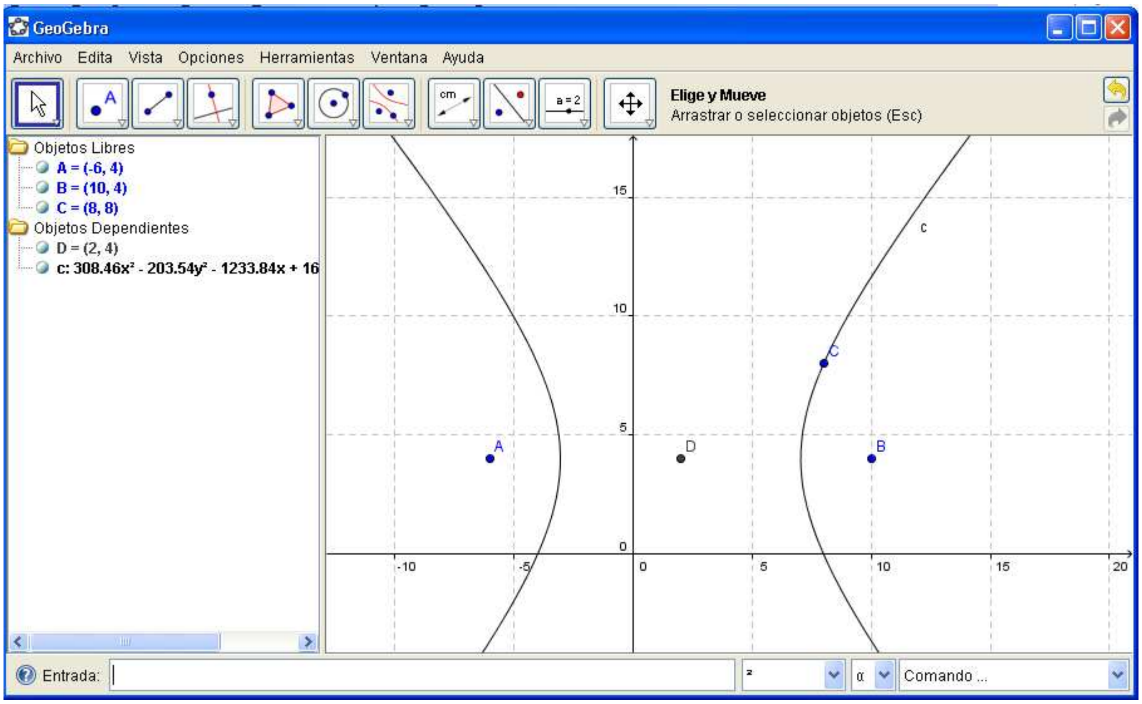
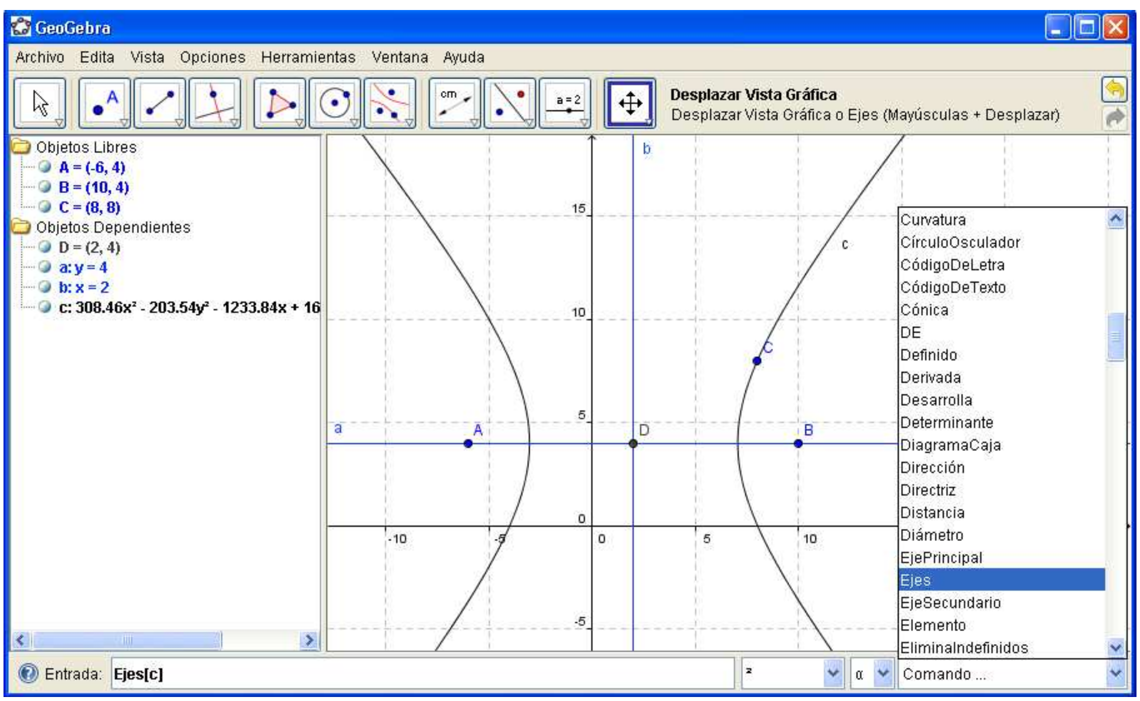


Figura 7

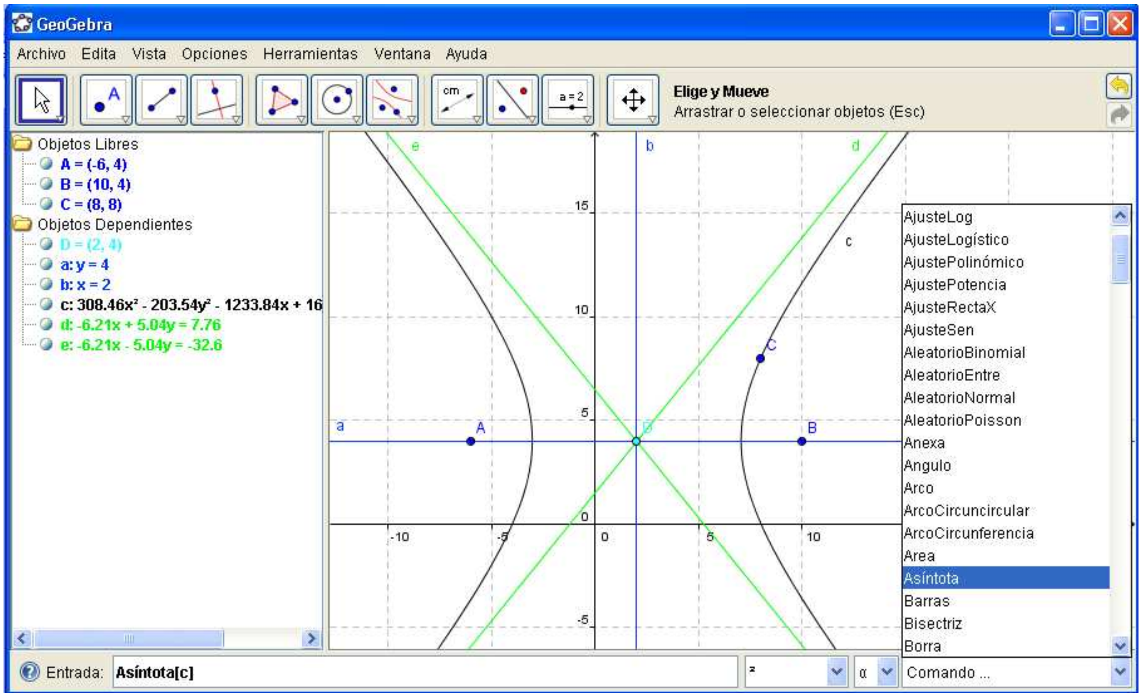


¿Cómo podemos encontrar las asíntotas?

Es muy simple en la opción comando busca la palabra ASINTOTAS[c] y aparecerán.

Ver figura 8

Figura 8



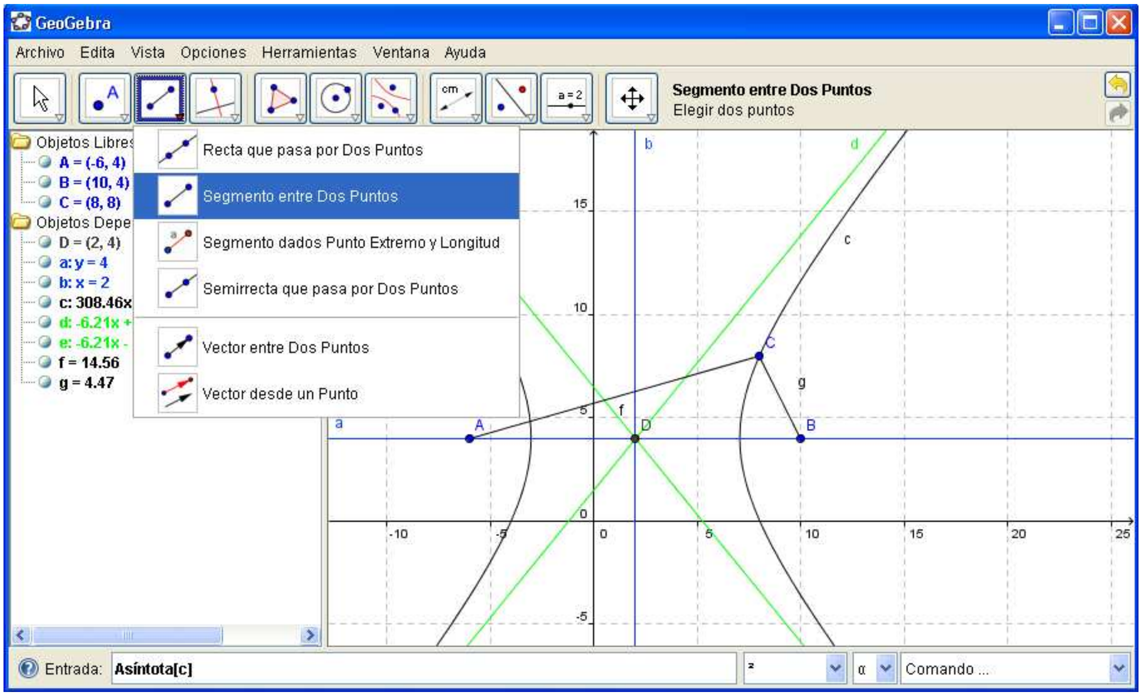
¿Cómo podemos saber el valor constante de la hipérbola?

Debes primero marcar la longitud entre los dos segmentos en este caso entre A y C como entre C y B.

Escoge “SEGMENTO ENTRE DOS PUNTOS” y marca los puntos.

Ver figura 9

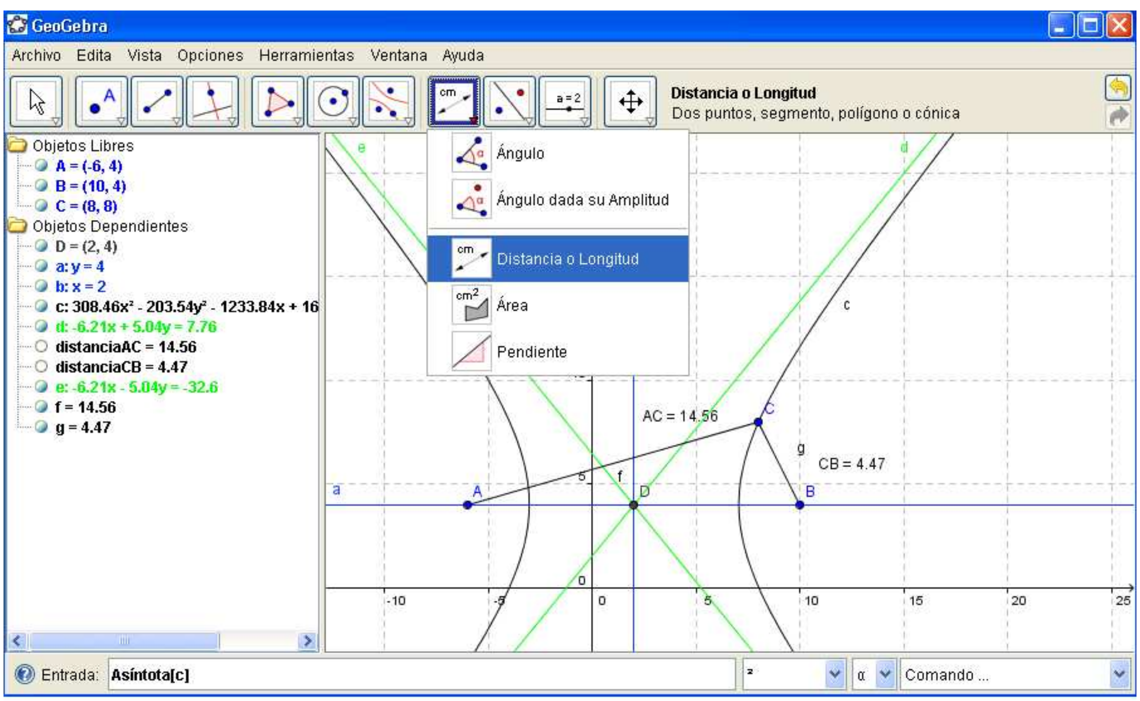
Figura 9



Luego escoge la opción “DISTANCIA O LONGITUD” y marca los puntos, así tendrás las dos distancias y luego haz la resta y tendrás el valor que querías.

Ver figura 10

Figura 10



Problema 10: “Propiedad de la hipérbola”(*)

Objetivo del Problema:

- **El estudiante podrá comprobar por medio del programa computacional una extraordinaria propiedad de la hipérbola.**
- **Permite al estudiante experimentar y comprobar resultados**

Planteo del Problema.

10) Hay una propiedad que dice que si se traza una tangente en un punto P perteneciente a una hipérbola esta tangente bisectará el ángulo que se forma entre el foco F’ el punto P y el foco F, siendo esta propiedad muy utilizada en los espejos de los telescopios, en otras palabras la recta tangente en un punto P de una hipérbola es bisectriz del ángulo formado por los radios focales.

Utilizando un programa computacional demuestre dicha propiedad, para ello construya una hipérbola cuyos focos son A = (-5,5), B = (12,5) y trace la tangente en el punto C = (9,9).

1º Recopilación y análisis de los datos del Problema.

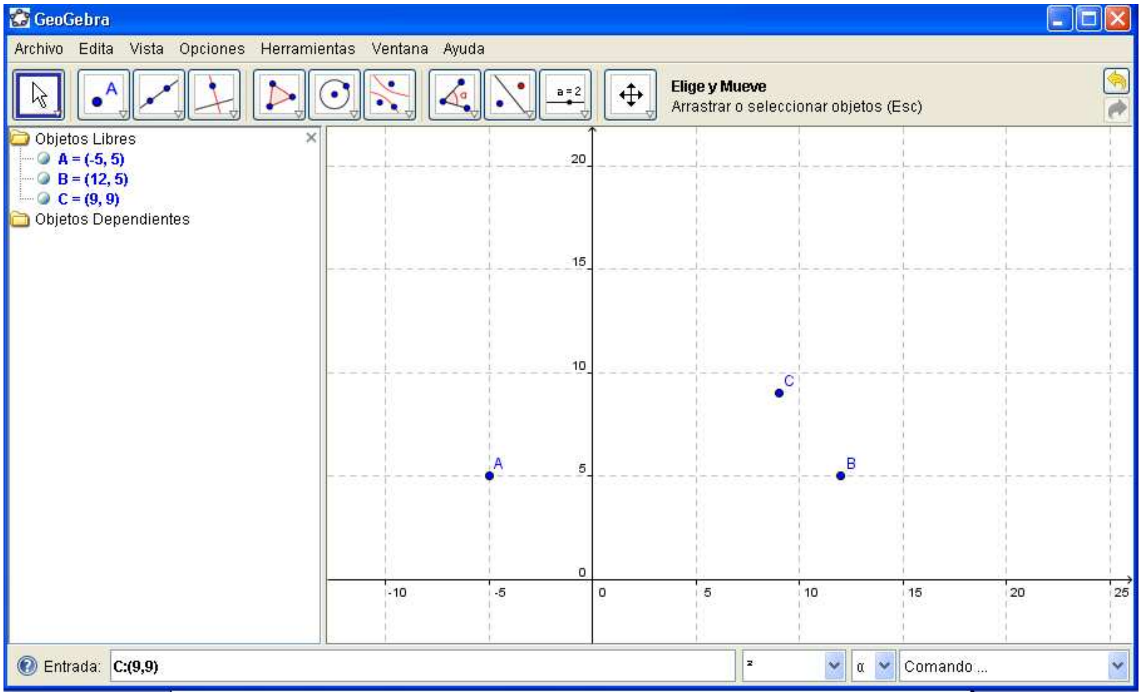
Debes darte cuenta: Para comenzar a construir la hipérbola con los datos que nos han proporcionado abriremos geogebra e ingresaremos los puntos que tenemos.

¿Podemos ingresar los datos que nos dan en geogebra?

En efecto, se puede, para ello utilizamos la opción entrada, ubicada en la parte inferior izquierda de la pantalla de geogebra en ingresamos los puntos

Ver figura 1

Figura 1



¿Cómo podemos hacer una hipérbola con los datos que tenemos?

Es simple para ello utilizaremos la opción “HIPERBOLA” dado dos focos y un punto perteneciente a ella.

Ver figura 2 y 3

Figura 2

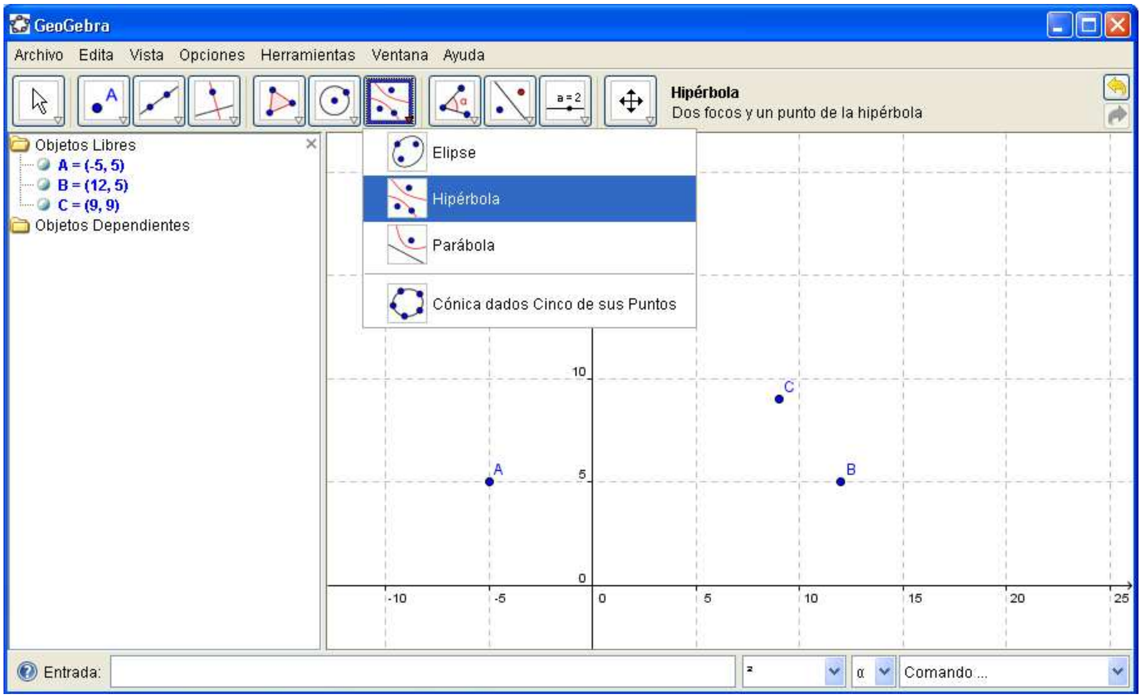
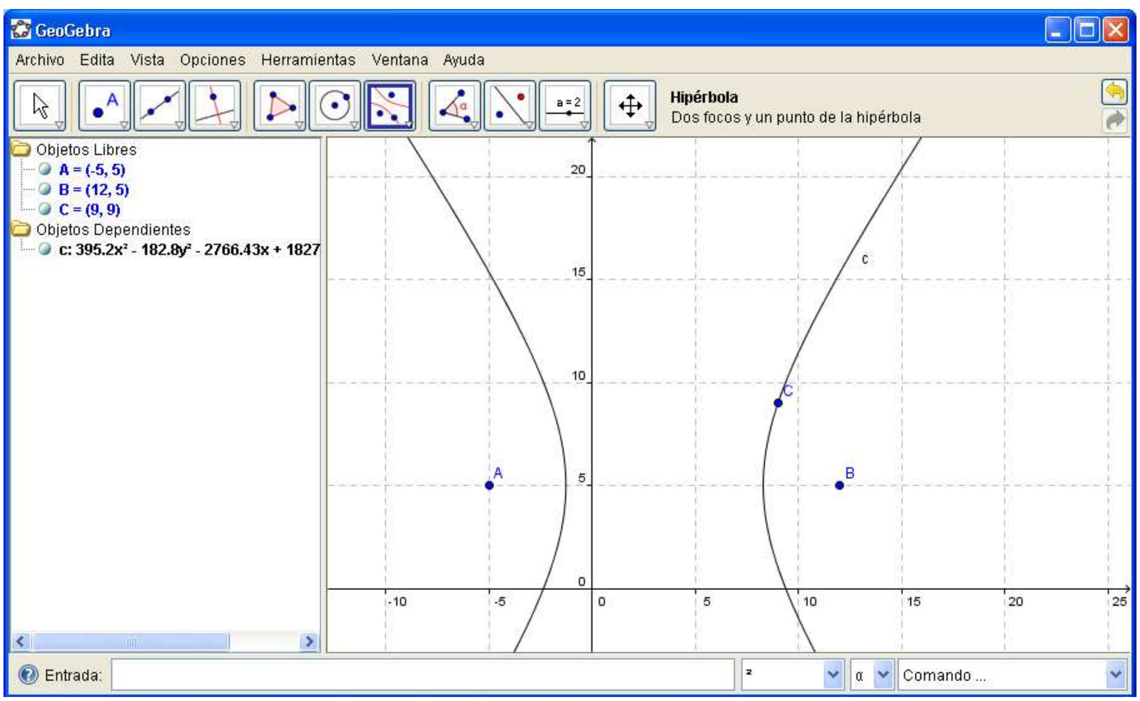


Figura 3



2º Representación Gráfica.

¿Se pueden marcar los segmentos AC y CB en geogebra?

Por supuesto, para ello utilizaremos la opción "SEGMENTO ENTRE DOS PUNTOS", donde escogemos entre qué puntos queremos los segmentos.

Ver figura 4 y 5

Figura 4

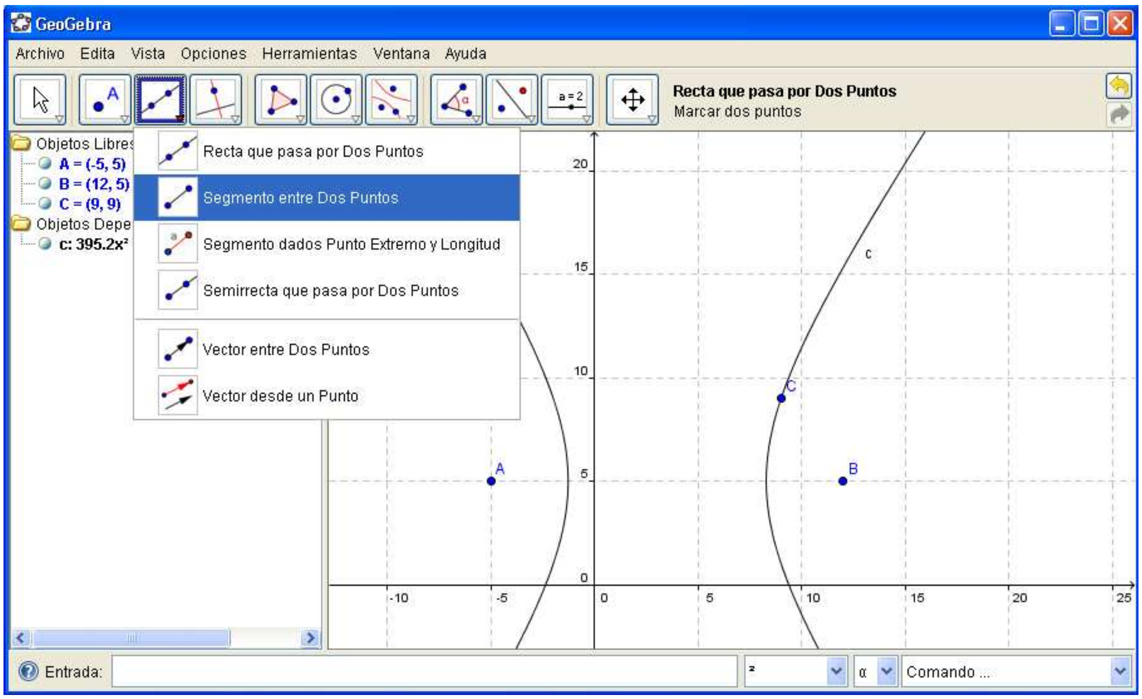
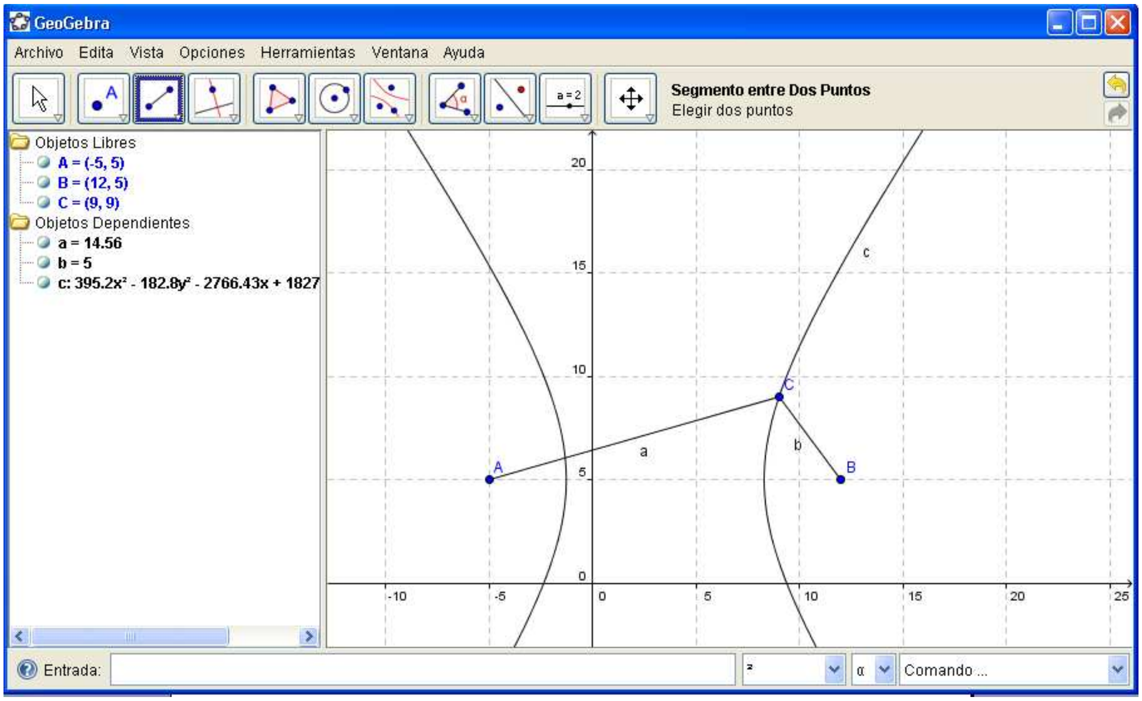


Figura 5



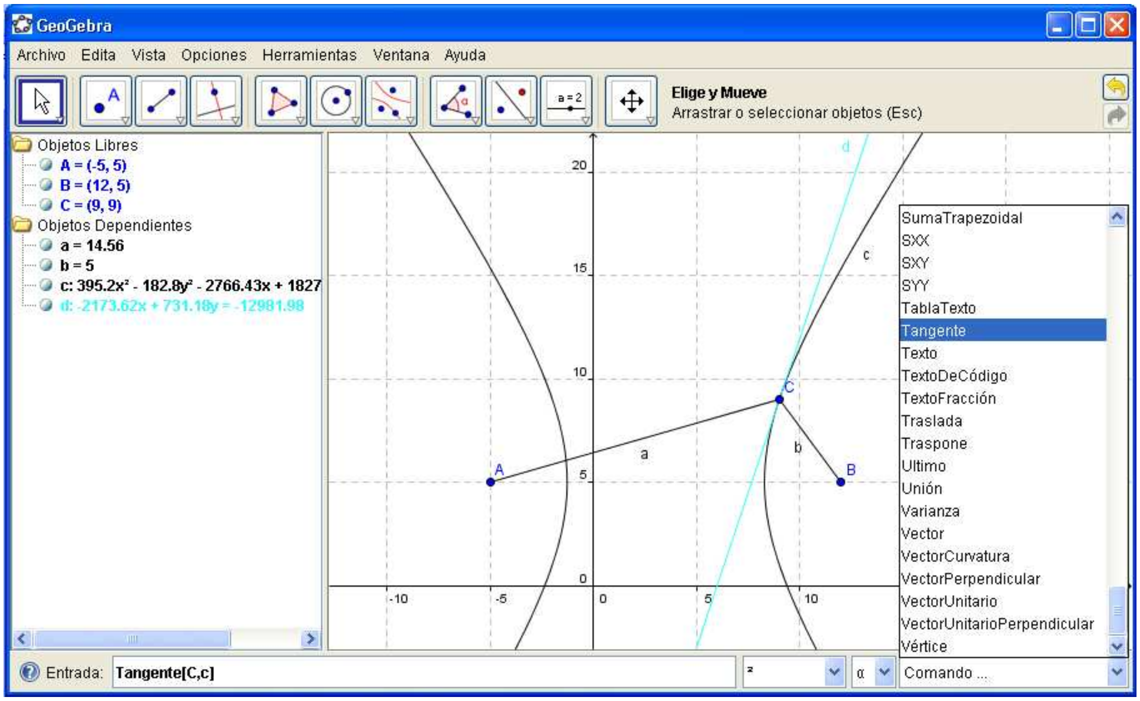
3º Cálculos y Desarrollo.

¿Cómo podemos trazar una tangente en el punto C?

En geogebra tenemos esa opción, para ello en la parte donde dice comando escogeremos la opción “TANGENTE [C,c]”

Ver figura 6

Figura 6

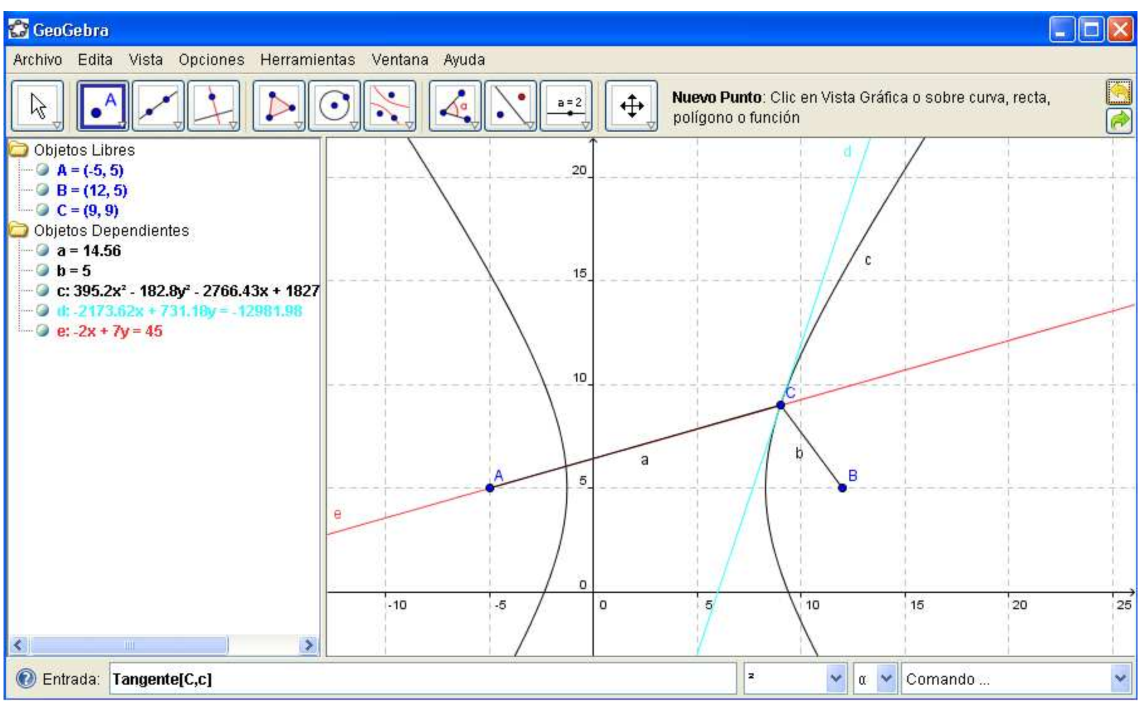


¿Cómo puedo proyectar el segmento AC como si fuese una recta?

Para realizar aquello marcamos la opción “recta que pasa por dos puntos”

Ver figura 7

Figura 7

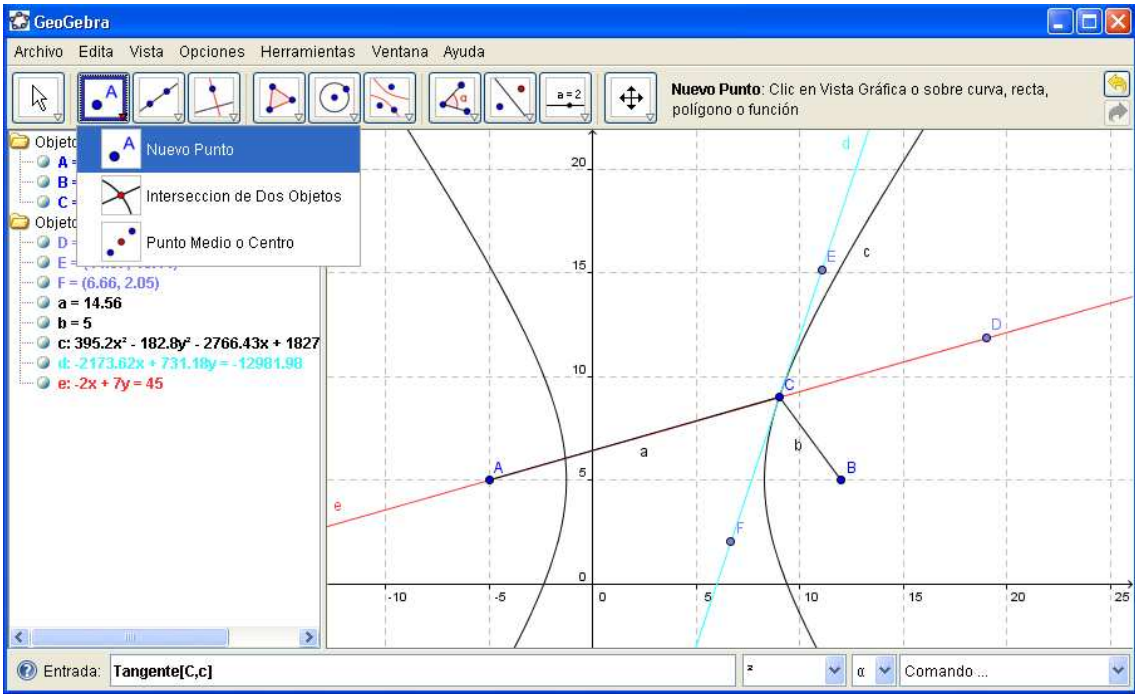


¿Y si quisiera agregar más puntos en las rectas como lo hago?

Simple, debes escoger la opción “NUEVO PUNTO” y podrás proceder de esta manera agregaremos tres nuevos puntos, uno en la recta AC (el punto D) y los otros en la recta tangente en C (los puntos E y F)

Ver figura 8

Figura 8

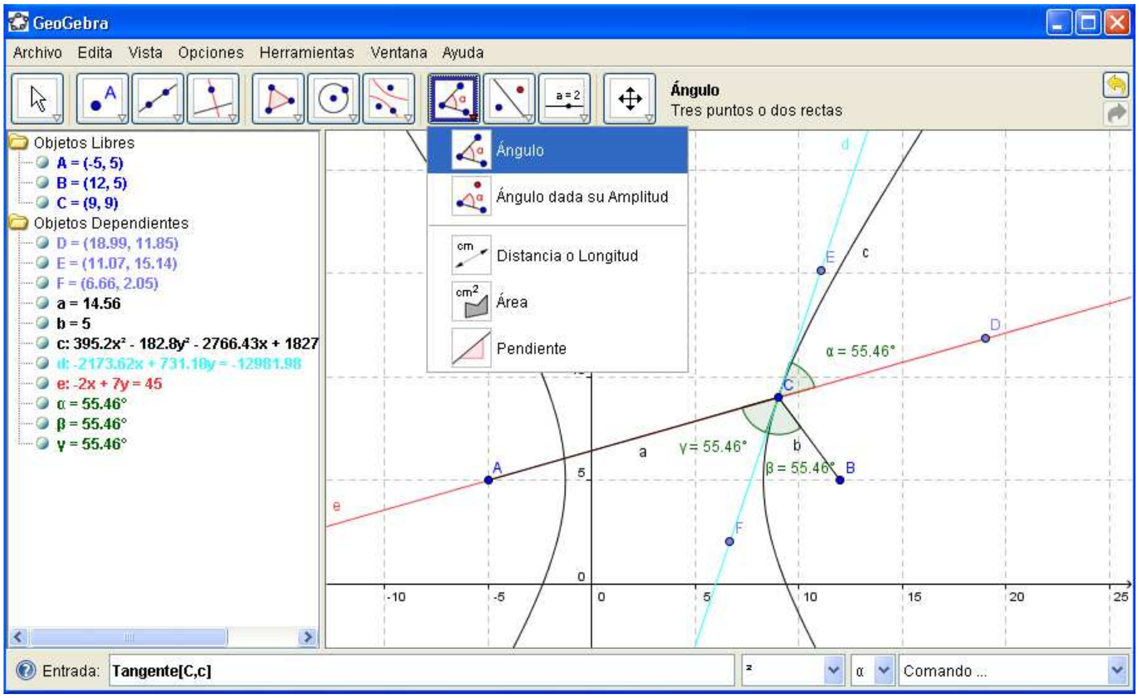


Debes darte cuenta: que después de todo este trabajo ahora podemos medir los ángulos para saber si tienen igual medida.

Para ello utilizaremos la opción “ANGULO” y marcaremos los tres puntos en los cuales queremos saber la medida. Por ejemplo en los puntos ACF y en los puntos ECD y EFB.

Ver figura 9

Figura 9



Luego podemos concluir: Luego hemos comprobado que la recta tangente ha sido bisectriz del ángulo formado por los radios focales.

(*) Problema anexado en CD.

3.4.3 PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación se presentan una serie de problemas propuestos referente a lo que hemos estado viendo junto a una serie de indicaciones de ejercicios que se pueden encontrar en libros, los cuales serán citados según corresponda.

1) En las calles de una cuidad la policía local realiza una persecución aérea de un vehículo robado. A través de una súper computadora y por medio de la información entregada se descubre que el trayecto del vehículo tiene como forma una hipérbola en donde los focos son las dos comisarías que se encuentran en línea recta de este a oeste. La computadora arrojó que la excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{5}{3}$, un dato no menor es que la distancia entre las comisarías es de 10km.

Realice las siguientes tareas con la información entregada.

- Determine un sistema de ejes coordenados adecuado para describir la situación.
- Encuentre la hipérbola que describe el trayecto del vehículo robado.
- Grafíquela.

Respuesta: Se debe establecer un sistema de ejes coordenados de tal manera que esté en el centro de la distancia que hay entre las bases.

La ecuación de la hipérbola es. $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

La gráfica se la dejamos al lector para que la desarrolle.

2) Un avión del ejército sobrevuela la cuidad y se sabe que su trayecto está determinado por la recta $y = 1,\overline{3}x$ para cada avance es su trayecto. Curiosamente esta recta es una asíntota de una hipérbola en donde sus focos son las bases del ejército. Las bases están ubicadas en dirección este-oeste. Un dato interesante es que en la relación entre los semiejes mayor “a” y menor “b” es que la suma de ambos es 14 es decir, a + b = 14. nota: la distancia se mide en km.

Realice las siguientes tareas con la información proporcionada.

- Encuentre la hipérbola que describe la situación planteada.
- Determine a qué distancia se encuentran las bases del ejército.

Respuesta: La ecuación de la hipérbola es. $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$

La distancia entre las bases del ejército es 10 km.

3) Los científicos han descubierto un extraño tipo de meteorito en el espacio exterior, el cual tiene como trayecto una hipérbola en donde uno de sus focos es el sol, de acuerdo a la información entregada por una súper computadora se han descubierto tres datos interesantes: el primero es que la distancia entre los focos de esta hipérbola, es decir entre el sol y seguramente otro asteroide es de 20 años luz, estos están ubicados en posición este-oeste.; segundo, de acuerdo a los cálculos de la computadora la distancia entre el foco y el vértice de la hipérbola es 4 años luz y, por último, se descubrió que el lugar de la explosión de este meteorito tiene como coordenada x = 8 el problema es que no se sabe el valor de la coordenada y.

Realice las siguientes tareas con la información proporcionada.

- Establezca un sistema de ejes coordenados apropiado para la situación presentada.
- Encuentre la hipérbola que describe el movimiento el meteorito.
- Determine el punto exacto en donde el meteorito explotará.

Respuesta: Se debe establecer un sistema de ejes coordenados de tal manera que el centro (origen) esté entre ambos focos nombrados en el problema.

La ecuación de la hipérbola es. $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$.

El punto exacto es $\left(8, \frac{8}{3}\right)$.

4) En una parte del trayecto de un ferrocarril el recorrido está determinado por una hipérbola. Se sabe que en el momento de la curva del tren la distancia del centro de la hipérbola al vértice de ésta es 6, esta distancia esta en dirección este-oeste,

además se ha determinado que el punto $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{3}\right)$ es un punto en el cual se encontraba el tren al momento de descubrir que estaba su trayecto sobre una hipérbola.

Realice las siguientes tareas con la información proporcionada

- Encuentre la ecuación de la hipérbola que representa la situación anterior.
- Grafique la situación planteada.

Respuesta: La ecuación de la hipérbola es. $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

El punto exacto es $\left(8, \frac{8}{3}\right)$.

A continuación presentamos al lector una serie de libros con sus respectivos autores en los cuales encontrará una serie de ejercicios rutinarios de las secciones cónicas correspondiente a esta unidad.

Libros:

Libro	**Autor**	**Capitulo**	**Ejercicios con Secciones Cónicas**
Cálculo Diferencial e Integral	Frank Ayres	Cap. 5 Pág. 42-55	Pág. 53-55
Cálculo 8va Edición	Purcell, Varberg.	Cap. 12 Pág. 517-539	Pág. 526,530,535
Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica	Walter Fleming, Dale Varberg.	Cap. 4 Pág. 182-204	Pág.196-201
El Cálculo con Geometría Analítica.	Louis Leithold.	Cap. 12 Pág. 586-618	Pág. 603,604,611 616-618

CONCLUSIONES

1.-Aporte al crecimiento personal

1.1 Esta memoria, nos ayudó a crecer y madurar como profesionales de la educación, principalmente nos ayudó a desarrollar nuestra creatividad a la hora de elaborar ejercicios, permitió desarrollar y mantener una perseverancia constante frente a los diferentes desafíos que aparecían a medida que avanzábamos en nuestro trabajo. En un comienzo fue complicado, pero con el paso del tiempo, el trabajo en equipo, además del esfuerzo de cada uno de los integrantes de esta memoria, se cumplió el objetivo.

1.2 El trabajo en equipo fue fundamental para el progreso y conclusión de esta memoria, esto contribuyó a desarrollarnos en el ámbito socio-profesional, mejorar el trabajo en equipo y sobre todo fortalecer el valor de la responsabilidad lo que fue parte esencial de nuestro trabajo.

2.-Acerca de la especialidad y su aplicación a los distintos ámbitos del Sistema Nacional de educación.

2.1 Durante el proceso de nuestro trabajo nos informamos y aprendimos acerca de la gran importancia que tienen las cónicas actualmente, por ejemplo pudimos tocar el tema referente al sistema de navegación LORAN con la hipérbola (sistema que desconocíamos hasta ese momento), las leyes de Kepler con la elipse y el estudio del lanzamiento de proyectiles con la parábola. Dichas aplicaciones son de importancia en los distintos ámbitos de las ciencias aplicadas.

3.-Bajo la perspectiva de la Enseñanza de la Geometría en el Sistema Nacional de Educación.

3.1 Descubrimos que en el Currículo Nacional de Educación Media, la importancia al tema de secciones cónicas es escasa, siendo que las cónicas aparecen en todo libro de cálculo, por lo tanto, son vistas en toda carrera de educación superior que incluya actividades curriculares relacionadas con la matemática, debido a esto, creemos que se le debería dar mayor importancia, tanto al contendido, como al material pedagógico, que se presenta a los estudiantes, y de esta manera ellos puedan tener una mejor preparación para la educación superior.

3.2 Al revisar libros de geometría analítica, aparecerán en su gran mayoría, ejercicios comunes, rutinarios, en cambio en cuanto los problemas de planteo, éstos siempre serán los menos, aspecto que, según las mismas intenciones del Ministerio de Educación, debiera ser totalmente lo contrario.

4.-Evaluación de logro

4.1 Los objetivos propuestos al iniciar esta memoria son:

1) Diseñar material de apoyo para profesores dirigidas a estudiantes de tercero medio que contengan aplicaciones de cónicas a situaciones cotidianas.

2) Buscar aplicaciones de las cónicas en otras áreas de las ciencias y en situaciones cotidianas con el fin de familiarizar el contenido a los alumnos.

Creemos que ambos objetivos han sido logrados a cabalidad. Se presentan más de 25 situaciones problemáticas entre desarrolladas y propuestas, su nivel de dificultad es básico-medio con diversas aplicaciones de las cónicas, además cada aplicación es justificada con un texto, lo cual lleva a la familiarización del problema para poder lograr así la motivación del estudiante.

Sería ideal que generaciones posteriores usaran y mejoraran este texto, complementándolo con otros problemas, pero de un nivel más avanzado, además de aprovechar de mejor manera la tecnología para motivar a los estudiantes.

GLOSARIO

A continuación se presentan una serie de palabras utilizadas en nuestra memoria junto con su definición.

- **Cónicas**: Se denomina sección cónica (o simplemente cónica) a la curva producto de la intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice.

- **Trisectriz**: Rectas que dividen a un ángulo o un plano en tres ángulos congruentes (Pág.21).

- **Planimétricos**: La planimetría es la parte de la topografía que estudia el conjunto de métodos y procedimientos que tienden a conseguir la representación a escala de todos los detalles interesantes del terreno sobre una superficie plana (plano geometría), prescindiendo de su relieve. (Pág. 16).

- **Evolutas**: Se llama evoluta de una curva "*C*" dada, al lugar geométrico de los centros de curvatura de "*C*" (Pág. 17).

- **Dióptica**: Parte de la óptica que trata de los fenómenos de la refracción de la luz (Pág. 21).

- **Semicuerda**: Es la mitad de un *cuerda* (Pág. 25)

- **Semielipsoide**: Mitad de un elipsoide.

- **Psicoeducativo**: Hace referencia a la educación o información que se ofrece a las personas que sufren de un trastorno psicológico, aunque este tipo de intervenciones psicológicas también incluyen el apoyo emocional, la resolución de problemas y otras técnicas (Pág. 40).

- **Metacognición**: Es la capacidad que tenemos de autorregular el propio aprendizaje, es decir de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación. (Pág. 56).

- **Subsumidores**: Son conocimientos específicamente relevantes que componen la estructura cognitiva del aprendizaje (Pág. 59).

- **Reflector**: Es una superficie que refleja la luz o cualquier otro tipo de onda (Pág. 74).

- **Orbitaje**: Movimiento de un objeto alrededor de otro objeto. (Pág. 112).

- **Bisectar:** Dividir un ángulo por la mitad. Dividir un objeto a la mitad (Pág. 164).

- **Paraboloide**: El paraboloide es una superficie geométrica que se forma al girar una parábola alrededor de su eje (parábola).

- **Excentricidad**: Representado por “e”, es el cociente entre la distancia focal y la longitud del eje principal (elipse).

- **Elipsoide**: Es la superficie generada por una elipse que gira alrededor de uno de sus dos ejes de simetría (Elipse).

- **Litotríptero**: Aparato usado para triturar las piedras del riñón, cálculos renales (Elipse).

- **Asíntotas**: Son dos rectas simétricas que pasan por el centro geométrico de la hipérbola, de tal forma que la hipérbola no las toca, aunque la distancia entra la curva y las asíntotas es cada vez menor (Hipérbola).

BIBLIOGRAFÍA

1. LIBROS.

- Ayres Frank, “Calculo Diferencial e Integral”. Año.
- Purcell, Varberg. “Cálculo 8va Edición”. Año.
- Fleming Walter, Dale Varberg. “Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”, Año.
- Leithold Louis “El Cálculo con Geometría Analítica”, Año.

2. PÁGINAS WEB

- http://www.epsilones.com/paginas/t-historias1.html
- http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Apolonio3.as
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Apollonius.html
- http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/apollonius.html
- http://library.thinkquest.org/22584/temh3031.htm#top
- http://smard.cqu.EDU.AU/Links/Websites/History_of_Mathematics/
- http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/_1000_AD.html
- http://math.rice.edu/~lanius/Geom/his.html
- http://www.inper.edu.mx/ensenanza/pdf/Constructivismo5.doc
- http://ares.unimet.edu.ve/programacion/psfase3/modII/biblio/CONDUCTISMO_%20COGNITIVISMO_%20CONSTRUCTIVISMO.pdf
- http://www.monografias.com/trabajos7/aprend/aprend.shtml.
- http://www.contextoeducativo.com.
- http://www.aldeaeducativa.com.
- http://www.laondaeducativa.com.
- http://boards2.melodysoft.com/sistemase/re-septimo-topico-de-discusion-modelo-134.html.

3. LIBROS O ARTÍCULOS REVISADOS EN INTERNET.

- Hernández L. Víctor “Apuntes de Historia de la Matemática” volumen 1, Nº 1, enero 2002.
- Haydee blanco, “Un cambio en el paradigma de la Geometría”, Instituto Superior del profesorado 2003.
- MINEDUC, “Marco Para la Buena enseñanza”, CPEIP, Ministerio de Educación 2003.
- Rodríguez Palmero María Luz “La Teoría del Aprendizaje Significativo” Centro de Educación a distancia. Santa Cruz de Tenerife. 2004.
- MINEDUC. “Álgebra y Modelos Analíticos, Programa de Estudio Tercer Año Medio, Formación Diferenciada” 2005.
- Perich Campana Danny “Articulación Educación Media – Educación Superior”. Profesor de Matemática.
- Vergel Brenda. Diseño Instruccional y Teoría del Aprendizaje. Universidad de Saskatchewan.
- Diaz Roberto, Glaría Jaime, “Reconocimiento de secciones cónicas en luces y sombras”. Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María. 2003.
- Santiere Juan, “Diccionario Enciclopédico Quillet (1976). Apolonio, Cónicas, Parábola”. Cumbre S.A. México D.F. 6a Ed.
- Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-Americana (1981). Apolonio. Espasa- Calpe, S.A. Madrid.
- Cáceres, Alberto (1999) “Una experiencia llamada Cálculo” Dialogo UPR.
- Bárbara Eyzaguirre A. y Carmen le Foulon m. (2001) “Estándares Altos para Educación” Centro de Estudios Públicos.
- Eduardo Castro Silva (2003) “Lo que no miden las Pruebas de Selección Universitaria”.
- Gustavo Hawes B. (2003) “Un currículum para la formación profesional en la Universidad” Universidad de Talca.

- José Weinstein (2002) “Gestión de proyectos de pregrado del fondo competitivo en las Universidades” Seminario MECESUP Santiago.
- Luis Eduardo González y Oscar Espinoza (1994) “Propuestas para la modernización de la educación superior chilena” Santiago, Chile.
- Boyer, Carl P. (1968). A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Jorge Baeza (2003) “PSU y el currículum de la Enseñanza Media, ¿Prueba de selección universitaria o evaluación de la reforma?” Universidad Central.
- Stemberg, R. J. y Spear-Swerling L. (1996), “La comprensión de los principios básicos y de las dificultades de enseñar a pensar”, en: Teaching for Thinking, Trad. De R. Llavori Enseñar a pensar, Santillana, Madrid, pp.95-118.
- Harald Beyer (2004) “Reflexiones Preliminares sobre la Prueba de Selección a la Universidad” Centro de estudios públicos.
- Propuesta para una Reforma Docente en la Escuela de Ingeniería y Ciencias U. de Chile, (2003) Escuela de Ingeniería y Ciencias, U. de Chile.
- Claudia Cento y Daniel Soza (2004) “Mala nota” Revista “qué Pasa” “Estructura de percepciones y atribuciones en estudiantes de primer año, promoción 2000, de la Universidad de Talca”.